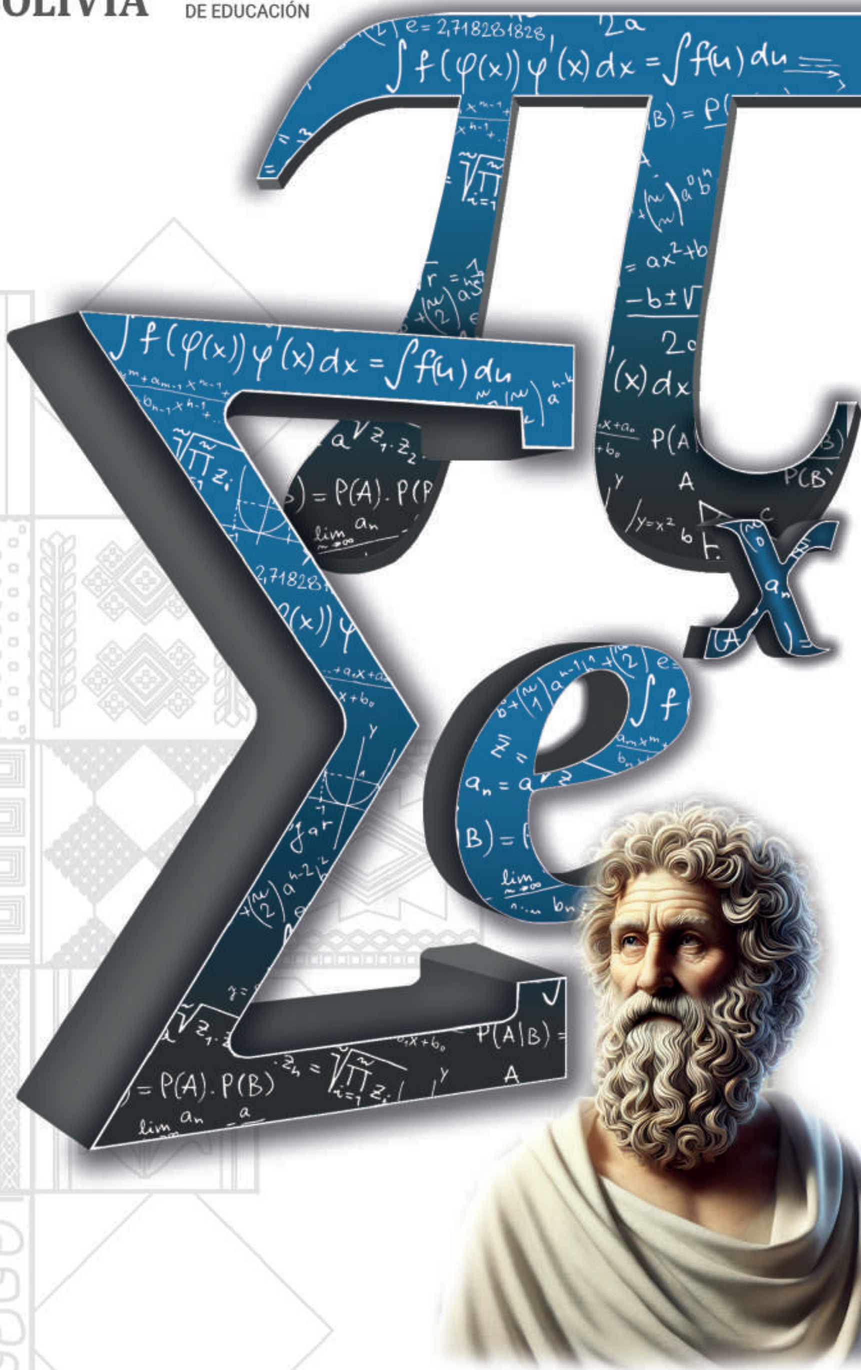
BICENTENARIO DE BOLIVIA

ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

# SOLUCIONARIO MATEMÁTICA

EDUCACIÓN SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA



PITÁGORAS DE SAMOS
569 A.C. - 475 A.C.

## TOMO I

*"2025 BICENTENARIO DE BOLIVIA"*

# SOLUCIONARIO

# MATEMÁTICA

EDUCACIÓN SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA

## TOMO I

*"2025 BICENTENARIO DE BOLIVIA"*

Solucionario de Matemática
Educación Secundaria Comunitaria Productiva

Omar Veliz Ramos
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Manuel Eudal Tejerina del Castillo
VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN REGULAR

Delia Yucra Rodas
DIRECTORA GENERAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Equipo de redacción
Dirección General de Educación Secundaria

Revisión
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación (2025). Subsistema de Educación Regular. “Solucionario de Matemática” Educación Secundaria Comunitaria Productiva. La Paz, Bolivia.

Depósito Legal
4-1-267-2024 P.O.

Impresión
Editorial del Estado Plurinacional de Bolivia


Luis Alberto Arce Catacora
PRESIDENTE DEL ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

# Índice general



## Matemática

# Presentación

La Constitución Política del Estado establece que la educación, es un derecho fundamental que tiene como objetivo formar integralmente a las personas y fortalecer su conciencia social crítica. En este contexto, la enseñanza de la Matemática juega un papel crucial al desarrollar el pensamiento lógico y las habilidades analíticas necesarias para enfrentar los desafíos del siglo XXI.

El **Solucionario de Matemática**, elaborado por el Ministerio de Educación del Estado Plurinacional de Bolivia, se convierte en una herramienta fundamental para la formación académica de los estudiantes de secundaria. Este recurso no solo refuerza los contenidos de Matemática, sino que también fomenta el razonamiento lógico, la creatividad y la resolución de problemas en contextos prácticos y desafiantes.

Dividido en dos tomos, el solucionario abarca desde conceptos básicos hasta los más avanzados, organizados de manera progresiva:

- En el **Tomo I**, se trabajan áreas fundamentales como Álgebra, Aritmética, Geometría, Trigonometría y Combinatoria, destacando aplicaciones prácticas en problemas reales.

- En el **Tomo II**, se profundiza en temas como Lógica, Conjuntos, Estadística, Cálculo y Razonamiento Lógico, proporcionando una preparación sólida para competencias académicas y desafíos universitarios.

Los ejercicios están clasificados en niveles de dificultad, desde básico hasta avanzado, incluyendo problemas tipo olimpiada que retan el pensamiento crítico y la creatividad. Además, cada tema incluye una clave de respuestas que facilita el aprendizaje autónomo, permitiendo que los estudiantes revisen sus errores y mejoren sus estrategias de resolución.

El momento histórico que vivimos exige una educación transformadora, y la Matemática, como herramienta para la construcción del conocimiento científico, es clave para el desarrollo del país. Este solucionario no solo responde a las demandas de los planes educativos nacionales, sino que también fortalece el potencial de nuestros estudiantes para enfrentar los retos de la industrialización y el crecimiento con justicia social.

Con este material, reafirmamos nuestro compromiso de garantizar una educación de calidad que promueva el pensamiento lógico, crítico y creativo, pilares para la formación de mujeres y hombres comprometidos con el Vivir Bien colectivo y el desarrollo integral del Estado Plurinacional de Bolivia.

**Luis Alberto Arce Catacora**
*Presidente Constitucional del Estado Plurinacional de Bolivia*

## Números enteros y racionales

Primero se hizo el estudio de los números naturales, luego los enteros y al hacer las divisiones entre cantidades apareció el conjunto de los números racionales.

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\cdots\}$$

## Divisibilidad y números primos

Decir que $a$ es divisible entre $b$ equivale a decir que $a$ es múltiplo de $b$. Los múltiplos de un entero positivo $b$ tienen la forma $kb$.

$$a/b \Leftrightarrow a = kb$$

Donde: $b \in \mathbb{Z}^+, a, k \in \mathbb{Z}$

## Potenciación y radicación

La radicación es la operación inversa de la potenciación, consiste en determinar la base conociendo el exponente y la potencia.

$$P = b^n \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{P} = b$$

Donde: $b \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{Z}^+; n \geq 2$

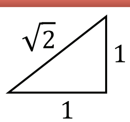
## Números decimales y notación científica

Un número decimal resulta de un número racional o de una fracción y la notación científica o potencia de 10 sirve para abreviar las cantidades muy grandes y pequeñas. Por ejemplo, la masa de la Tierra es aproximadamente:

$$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

## Números irracionales

Son aquellos que tienen la parte decimal infinita y de donde aparecen los números irracionales, algebraicos y trascendentales. El primer número irracional que surge es $\sqrt{2}$.




## Razones, proporciones y porcentajes

La razón aritmética es la comparación entre dos cantidades, se realiza mediante una operación aritmética.

## Ecuaciones

Son expresiones de la Matemática que equilibran lados de una igualdad, mediante operaciones y propiedades.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

## Progresión aritmética, geométrica

Progresión aritmética es una secuencia de números en la que la diferencia entre cada par es constante y la progresión geométrica es una secuencia de números en la que cada término a partir del segundo, se obtiene multiplicando el anterior por una constante llamada razón.

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

## Exponentes y radicales

Los exponentes indican cuántas veces se multiplica una base por sí misma y los radicales expresan la operación inversa a la potencia, representada por la raíz, busca un número que multiplicado por sí mismo dé como resultado otro número.

$$a^{b/c} = \sqrt[c]{a^b}$$

## Factorización

Es el proceso de descomponer una expresión matemática en factores que multiplicados entre sí den como resultado la igualdad.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

## Función exponencial, logaritmo

El logaritmo indica qué exponente necesitamos elevar una base para obtener un número, mientras que la exponencial dice qué valor obtenemos al elevar una base a un exponente.

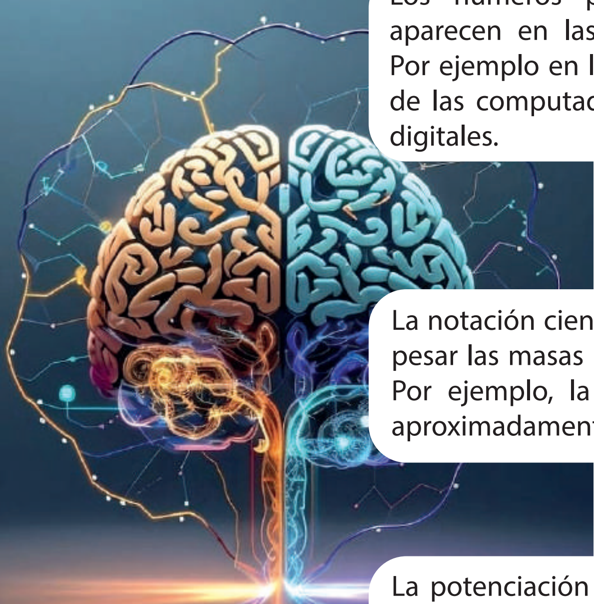
$$e^{\ln x} = x$$

## Desigualdades

Son expresiones de la matemática que comparan dos cantidades o expresiones, indicando si una es mayor, menor o igual a la otra.

$$|a| < b \Rightarrow -b < a < b$$

## USOS Y APLICACIONES EN LA VIDA COTIDIANA



El uso de los números enteros, con frecuencia aparece en la medición de la temperatura. Por ejemplo, en la ciudad de Cochabamba, en una mañana de invierno la temperatura es de $5°$ y en Potosí es de $-3°$.

*Fuente: Bolivia cerro rico (Potosí)*

Los números primos 2, 3, 5, ... etc, aparecen en las transacciones bancarias. Por ejemplo en los sistemas de protección de las computadoras para proteger datos digitales.

*Fuente: Bolivia emprende*

La notación científica nos ayuda a medir o pesar las masas muy grandes o pequeñas. Por ejemplo, la masa de un camión es aproximadamente 45 000 000 g.

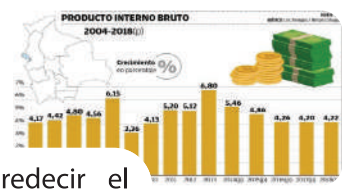
*Fuente: Bolivia-INE*

La potenciación nos ayuda a expresar los números grandes en forma de exponentes. Por ejemplo, la población en Bolivia era aproximadamente 11 999 296 hace 5 años, lo cual se puede expresar como $P = 3464^2$.

*Fuente: Anapu*

Los porcentajes se ven en la economía nacional. Por ejemplo, en los préstamos bancarios, en los cambios de la moneda nacional, en la producción minera que existe en algunos departamentos de Bolivia.

*Fuente: Bolivia emprende*




Se utilizan ecuaciones para modelar y predecir el crecimiento económico de Bolivia en función de variables como la inversión extranjera, el gasto público y la inflación.

*Fuente: Periódico Los Tiempos*

Se aplican técnicas de factorización para optimizar el uso de la tierra y aumentar la productividad agrícola en regiones del oriente como Santa Cruz, por ejemplo.

*Fuente: Instituto del seguro agrario*

Las funciones logarítmicas sirven para proyectar el crecimiento demográfico y planificar políticas de desarrollo urbano sostenible en ciudades como Sucre y Oruro, por ejemplo.

*Fuente: Periódico La Patria*

Se implementan operaciones con exponentes y radicales para diseñar estructuras resistentes a terremotos y desastres naturales en zonas sísmicas como Potosí.

*Fuente: Diario el Potosí*

Para estudiar la propagación de enfermedades infecciosas, como el COVID-19, se puede utilizar una progresión geométrica, para modelar la expansión de la enfermedad en una población como el departamento de Beni.

*Fuente: Periódico El País*

## Números enteros, racionales y fracciones

**1.** En una unidad educativa rural hay 650 estudiantes, de ellos 430 son varones, ¿cuántas mujeres hay en la unidad educativa?

### Datos

$E$= 650 (Total de estudiantes)
$V$= 430 (Varones)
$M$= ? (Mujeres)

### Resolución

Se efectúa la operación de sustracción para saber la cantidad de mujeres que hay entre los 650 estudiantes, es decir:

$$\begin{array}{r} E = 650 \\ - \quad V = 430 \\ \hline M = 220 \end{array}$$

Fuente: *Unidad Educativa-Cota Pata*

### Respuesta

Hay 220 mujeres en la unidad educativa.

**2.** Ángel tiene 12 años, Beatriz es 4 años mayor que Ángel y Carlos tiene el doble de la edad de Beatriz, ¿cuál es la suma de las edades de Ángel, Beatriz y Carlos?

### Datos

$A$=12 años (Ángel)
$B$= Beatriz
$C$=Carlos
$S$=Suma de edades

### Resolución

La suma de edades es:

$$\begin{aligned} S &= A+B+C \\ &= 12+(4+12)+2(4+12) \\ &= 12+(4+12)+2(4+12) \\ &= 12+16+32 \\ &= 60. \end{aligned}$$

$=> S = 60$ años

### Saber más...

Algunos símbolos utilizados:

$\Longrightarrow$ : implicación, se lee "entonces"
$\Longleftrightarrow$ : bicondicional, se lee "sí y solo sí"
$<$ : desigualdad, se lee "menor que"
$>$ : desigualdad, se lee "mayor que"

### Respuesta

Por consiguiente, la suma de las edades es 60 años.

**3.** Juan quiere simplificar al mínimo, la siguiente operación:

$$A = -2+\{-3-[7+4(-2+5)]\}+30$$

**Resolución**

$A = -2+\{-3-[7+4(-2+5)]\}+30$
$= -2+\{-3-[7+4\cdot3]\}+30$ operaciones dentro de paréntesis
$= -2+\{-3-[7+12]\}+30$ operación dentro de corchetes
$= -2+\{-3-19\}+30$ operación dentro de corchetes
$= -2-22+30$ operación dentro de llaves
$= -24+30=6$
$\Rightarrow A=6$

**Respuesta**

El resultado de la operación propuesta es 6.

**4.** En la clase de matemática, el maestro le pide a un grupo de estudiantes que representen los números -6, -2, 0, + 3, + 5, en una recta numérica y el orden en forma creciente.

**Saber más...**

El conjunto de los números enteros

$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, +1, +2, \cdots\}$

Enteros positivos:

$\mathbb{Z}^+ = \{+1, +2, +3, \cdots\}$

Enteros negativos:

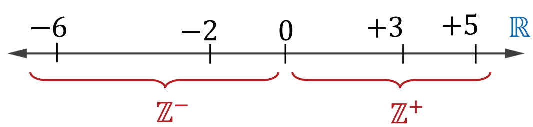
$\mathbb{Z}^- = \{\cdots, -3, -2, -1\}$

Enteros por comprensión:

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$

**Resolución**

Tomando los instrumentos del laboratorio, los estudiantes representan los números -6,-2,0,+3,+5 en la recta numérica, es decir:




Ahora, en la recta numérica, se ordenan los números en forma creciente, usando el símbolo de la desigualdad (<), así:

$-6<-2<0<+3<+5$ o bien $-6<-2<0<3<5$

**Respuesta**

$-6<-2<0<3<5$.

**5.** En una unidad educativa, la maestra le pide a Ana que multiplique los números $\frac{5}{3}$ y $2\frac{1}{3}$, a Carlos le pide que sume los mismos números. Si a la respuesta de Carlos le restamos la de Ana, ¿cuánto nos queda?

**Datos**

$A$: Ana
$C$: Carlos
$d$: diferencia

Primer número:

$$x = \frac{5}{3}$$

Segundo número:

$$y = 2\frac{1}{3}$$

**Resolución**

Como Ana multiplica los números, entonces:

$$A = xy$$

$$\Rightarrow A = \frac{5}{3}\left(2\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{6+1}{3}\right)$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{3}$$

$$= \frac{35}{9}$$

$$\Rightarrow A = \frac{35}{9}$$

Fuente: Ministerio de Educación

Como Carlos suma los números, entonces:

$$C = x + y \Rightarrow C = \frac{5}{3} + 2\frac{1}{3} = \frac{5}{3} + \frac{6+1}{3}$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{7}{3} \quad \text{desarrollo de fracción compuesta operaciones}$$

$$= \frac{5+7}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\Rightarrow C = 4$$

Diferencia entre ambas respuestas:

$$d = C - A = 4 - \frac{35}{9} \quad \text{reemplazando valores de } A \text{ y } C$$

$$= \frac{9 \cdot 4 - 35}{9}$$

$$= \frac{36 - 35}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{9}$$

**Respuesta**

La diferencia entre las respuestas de Ana y Carlos es $\frac{1}{9}$.

**6.** El maestro de matemática, le pide a Jaime efectuar la siguiente operación combinada:

$$F=\tfrac{3}{2}-2+4\tfrac{5}{2}-1\tfrac{1}{4}+\tfrac{2}{3}$$

**Resolución**

$$\begin{aligned}
F&=\frac{3}{2}-2+4\frac{5}{2}-1\frac{1}{4}+\frac{2}{3} && \text{expresión dada}\\
&=\frac{3}{2}-2+4+\frac{5}{2}-\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{3} && \text{por fracción mixta}\\
&=\frac{3}{2}-2+4+\frac{5}{2}-1-\frac{1}{4}+\frac{2}{3} && \text{operaciones}\\
&=(-2+4-1)+\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right) && \text{asociando}\\
&=1+\frac{3+5}{2}+\frac{8-3}{12} && \text{fracciones homogénea y mixta}\\
&=1+\frac{8}{2}+\frac{5}{12} && \text{operaciones}\\
&=\frac{12\cdot 1+6\cdot 8+5}{12} && mcm(2{,}12)=12\\
&=\frac{12+48+5}{12} && \text{operaciones}\\
&=\frac{65}{12} && \text{expresada en fracción mixta}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad F=5\tfrac{5}{12}$$

**Saber más...**

**Fracciones mixtas:**

$$4\frac{5}{2}=\frac{2\cdot 4+5}{2}=\frac{13}{2}$$

$$\updownarrow$$

$$4\frac{5}{2}=4+\frac{5}{2}=\frac{13}{2}$$

Se lee
"cuatro enteros y
cinco medios"

**Respuesta**

La operación efectuada de la fracción es $5\frac{5}{12}$.

## Divisibilidad y números primos

**7.** Una empresa consultora financiera, pide a Santos que calcule el máximo común divisor ($MCD$) de los números 27, 25 y 28.

**Resolución**

Se descomponen simultáneamente cada número en sus factores primos, es decir:

$$\begin{array}{r|l}
27 & 3\\
9 & 3\\
3 & 3\\
1 &
\end{array}\qquad
\begin{array}{r|l}
25 & 5\\
5 & 5\\
1 &
\end{array}\qquad
\begin{array}{r|l}
28 & 2\\
14 & 2\\
7 & 7\\
1 &
\end{array}$$

$$27=1\cdot 3^3$$
$$25=1\cdot 5^2$$
$$28=1\cdot 2^2\cdot 7$$

Se observa que hay un solo divisor común, entonces el mayor divisor común es 1, es decir:

$$MCD(27, 25, 28) = 1$$

**Respuesta**

El máximo común divisor de los números 27, 25 y 28 es 1.

**8.** La maestra de matemática le pide a Sebastián que descomponga el número 840 en sus factores primos.

**Resolución**

Primero se divide 840 entre 2, se obtiene 420, se vuelve a dividir 420 entre 2 y así sucesivamente hasta agotar la división, es decir:

$$\begin{array}{c} 840 \div 2 = 420 \\ 420 \div 2 = 210 \\ 210 \div 2 = 105 \\ 105 \div 3 = 35 \\ 35 \div 5 = 7 \\ 7 \div 7 = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 840 & 2 \\ 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

De donde se obtiene, $840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$

Esto se puede escribir de la forma: $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$

Lo que se denomina descomposición canónica (DC).

**Respuesta**

La descomposición en factores primos del número dado es

$$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

**9.** En una unidad educativa, el maestro de matemática pide a los estudiantes que calculen el mínimo común múltiplo ($MCM$) de los números 36, 45, 60 y 90.

**Resolución**

Se descomponen todos los números de forma simultánea, consiste en ir agotando la divisibilidad por cada número, se procede de la siguiente forma:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 36 | 45 | 60 | 90 | 2 |
| 18 | 45 | 30 | 45 | 2 |
| 9 | 45 | 15 | 45 | 3 |
| 3 | 15 | 5 | 15 | 3 |
| 1 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | |

$$\Longrightarrow \quad MCM(36,45,60,90) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$$

De donde, 180 es el menor número que divide a 36, 45, 60 y 90.

**Respuesta**

El mínimo común múltiplo de los números 36, 45, 60 y 90 es 180.

**10.** En una población rural de Bolivia, una empresa privada distribuye equitativamente 6300 cuadernos, por un concurso de lectura veloz, de los cuales son seleccionados 630 estudiantes, de ciertas unidades educativas, ¿cuántos cuadernos le toca a cada estudiante?

*Fuente: Bolivia-Cota Pata*

**Resolución**

**Datos**

6300 total de cuadernos
630 estudiantes seleccionados

Ahora se dividen los 6300 cuadernos entre 630 estudiantes, es decir:

$$\begin{array}{r|l} 6300 & 630 \\ \cline{2-2} \underline{630} & 10 \\ (0) & \end{array}$$

Equitativamente, le tocan a cada estudiante 10 cuadernos.

**Respuesta**

Cada estudiante recibe 10 cuadernos.

## Potenciación y radicación

**11.** Empleando definiciones y propiedades de exponentes, el maestro efectúa, de manera detallada, la siguiente expresión:

$$A = (3^{-2}5^{2})^{3}(3^{3}5^{-3}7)^{2}$$

**Resolución**

$$A = (3^{-2}5^{2})^{3}(3^{3}5^{-3}7)^{2}$$

| | |
|---|---|
| $= (3^{-2})^{3}(5^{2})^{3}(3^{3})^{2}(5^{-3})^{2}7^{2}$ | potencia de un producto |
| $= 3^{-2\cdot 3}5^{2\cdot 3}3^{3\cdot 2}5^{-3\cdot 2}7^{2}$ | potencia de una potencia |
| $= 3^{-6}5^{6}3^{6}5^{-6}7^{2}$ | operando en exponente |
| $= (3^{6}3^{-6})(5^{6}5^{-6})7^{2}$ | asociando |
| $= (3^{6-6})(5^{6-6})7^{2}$ | producto de potencias con igual base |
| $= 3^{0}5^{0}7^{2}$ | $a^{0} = 1, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$ |
| $= 1 \cdot 1 \cdot 7^{2}$ | $1 \cdot a = a, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$ |
| $= 7^{2} = 49$ | cuadrado perfecto |
| $\Rightarrow A = 49$ | |

**Respuesta**

El resultado es 49.

**12.** José efectúa la siguiente operación:

$$A = \sqrt{\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} - \left[\frac{5^{2}-4^{2}}{9} - \frac{3}{4}\right]$$

Y simplifica al máximo.

**Resolución**

En principio usando la propiedad $\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^{n}}{b^{n}}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, n \in \mathbb{N}.$

| | |
|---|---|
| $A = \sqrt{\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3^{2}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} - \left[\frac{25-16}{9} - \frac{3}{4}\right]$ | expresión dada |
| $= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}\cdot\frac{1}{3^{2}} + \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} - \left[\frac{9}{9} - \frac{3}{4}\right]$ | $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[b]{b}}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$ |
| $= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3^{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^{3}}} - \left[1 - \frac{3}{4}\right]$ | $\sqrt[n]{a^{n}} = a, \quad n \in \mathbb{N}$ |
| $= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \left[\frac{4-3}{4}\right]$ | $mcm(1,4) = 4$ dentro los corchetes |
| $= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ | realizando operación |

$$= \frac{2+6-3}{12} \qquad mcm(6,2,4) = 12$$

$$= \frac{5}{12}$$

**Respuesta**

Por consiguiente, la expresión simplificada es $\frac{5}{12}$.

**13.** Empleando definiciones y propiedades de exponentes, Sandra simplifica la siguiente expresión:

$$B = \frac{35^{19}(8 \cdot 5)^{16} 27^{13}}{(2 \cdot 3 \cdot 5)^{30}(5 \cdot 9)^5 14^{18}}$$

**Resolución**

$$B = \frac{35^{19}(8 \cdot 5)^{16} 27^{13}}{(2 \cdot 3 \cdot 5)^{30}(5 \cdot 9)^5 14^{18}}$$ Expresión dada

$$= \frac{(5 \cdot 7)^{19}(2^3 \cdot 5)^{16}(3^3)^{13}}{(2 \cdot 3 \cdot 5)^{30}(5 \cdot 3^2)^5(2 \cdot 7)^{18}}$$ Descomponiendo en factores primos

$$= \frac{5^{19}7^{19}(2^3)^{16}5^{16}(3^3)^{13}}{2^{30}3^{30}5^{30}5^5(3^2)^5 2^{18}7^{18}}$$ Potencia de un producto

$$= \frac{5^{19}7^{19}2^{48}5^{16}3^{39}}{2^{30}3^{30}5^{30}5^5 3^{10}2^{18}7^{18}}$$ Potencia de una potencia

$$= \frac{2^{48}3^{39}(5^{19}5^{16})7^{19}}{(2^{30}2^{18})(3^{30}3^{10})(5^{30}5^5)7^{18}}$$ Asociando

$$= \frac{2^{48}3^{39}5^{19+16}7^{19}}{2^{30+18}3^{30+10}5^{30+5}7^{18}}$$ Producto de potencias con igual base

$$= \frac{2^{48}3^{39}5^{35}7^{19}}{2^{48}3^{40}5^{35}7^{18}}$$ Operación en exponentes

$$= 2^{48}2^{-48}3^{39}3^{-40}5^{35}5^{-35}7^{19}7^{-18}$$ Definición de inverso multiplicativo

$$= 2^{48-48}3^{39-40}5^{35-35}7^{19-18}$$ Producto de potencias con igual base

$$= 2^0 3^{-1} 5^0 7^1$$ $a^0 = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$

$$= 3^{-1}7^1 = \frac{7}{3}$$ Definición de inverso multiplicativo

**Respuesta**

La simplificación de la expresión dada es $\frac{7}{3}$.

**14.** Marcelo simplifica la siguiente expresión:

$$H=\left(\frac{7^{-1}}{2^{-1}+3^{-1}+6^{-1}}\right)^{-2}$$

Se pide determinar $H$.

**Resolución**

En principio usando la propiedad $\left(\frac{b}{a}\right)^{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n}, a,b\in\mathbb{Z}, a\neq 0, n\in\mathbb{N}.$

$$H=\left(\frac{2^{-1}+3^{-1}+6^{-1}}{7^{-1}}\right)^{2}$$ propiedad $a^{-1}=\frac{1}{a},\quad a\in\mathbb{Z},\quad a\neq 0$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{7}}\right)^{2}$$ $mcm(2,3,6)=6$ en numerador y operando

$$=\left(\frac{\frac{6}{6}}{\frac{1}{7}}\right)^{2}$$ $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{a}{b}}=\frac{m*b}{n*a}$

$$=\left(\frac{6\cdot 7}{6\cdot 1}\right)^{2}$$ $\frac{a}{a}=1\ \forall\ a\in\mathbb{Z}, a\neq 0$

$$=(7)^2;$$ cuadrado perfecto

$$=49\quad\Longrightarrow H=49$$

**Respuesta**
Por consiguiente, el valor de $H$ es 49.

**15.** Maritza se prepara para una prueba de olimpiadas, para ello resuelve la siguiente expresión aritmética:

$$R=\left(\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}}{5^2}\right)^{-1}\sqrt{\frac{5^{-1}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}}}$$

**Resolución**

$$R=\left(\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}}{5^2}\right)^{-1}\sqrt{\frac{5^{-1}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}}}$$ expresión dada

$$=\left(\frac{5^{1/2}5^{1/3}}{5^2}\right)^{-1}\sqrt{\frac{5^{-1}5^{1/2}}{5^{1/4}}}$$ $\sqrt{a}=a^{1/2},\ \sqrt[n]{a}=a^{1/n},\ a\in\mathbb{Z}^+, n\in\mathbb{N}$

$$=\left(5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2}\right)^{-1}\sqrt{5^{-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}$$ $a^n a^m=a^{n+m};\ a\in\mathbb{Z}^+,\quad m,n\in\mathbb{N}$

$$=\left(5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2}\right)^{-1}\sqrt{5^{-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}$$ $mcm(2,3)=6$ y $mcm(2,4)=4$

$$=\left(5^{\frac{3+2-12}{6}}\right)^{-1}\sqrt{5^{\frac{-4+2-1}{4}}}$$ operaciones

$$= \left(5^{\frac{-7}{6}}\right)^{-1} \sqrt{5^{\frac{-3}{4}}} \qquad (a^{-1})^{-1} = a$$

$$= 5^{\frac{7}{6}} \cdot 5^{\frac{-3}{8}} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}, \quad a \in \mathbb{Z}^{+}, n \in \mathbb{N}$$

$$= 5^{\frac{7}{6}-\frac{3}{8}}$$ producto de potencias con igual base

$$= 5^{\frac{28-9}{24}} \qquad mcm(6,8) = 24$$ en exponente

$$= 5^{\frac{19}{24}}$$

**Respuesta**

La expresión resultante es $5^{\frac{19}{24}}$.

## Números decimales y notación científica

**16.** Dina fue a un supermercado y compró 3,5 kilogramos de yuca, 4 kilogramos de papa, 1,5 kilogramos de arroz, 0,5 kilogramos de maíz y 2,5 kilogramos de azúcar. ¿Cuál es el peso total de lo que compró Dina?

**Datos**

$M_1$ = 3,5 kg (yuca)
$M_2$ = 4 kg (papa)
$M_3$ = 1,5 kg (arroz)
$M_4$ = 0,5 kg (maíz)
$M_5$ = 2,5 kg (azúcar)
$M_T$ = ? kg (peso total)

**Resolución**

Se suman la cantidad de productos que compró Dina, en forma vertical, por datos se tiene:

$$\begin{array}{r} 3{,}5 \\ 4{,}0 \\ +\ 1{,}5 \\ 0{,}50 \\ 2{,}5 \\ \hline 12{,}0 \end{array} \Rightarrow M_T = 12 \text{ kg}$$

**Respuesta**

Dina compró 12 kilogramos de productos en total.

**17.** Carlos tiene una práctica de matemática por resolver. Realiza la siguiente operación de multiplicación 12 572 × 0,0025.

**Resolución**

Carlos realiza la operación de números decimales, acomoda los factores en forma vertical y multiplica como números enteros, es decir:

$$\begin{array}{r} 12\,572 \\ \times \quad 25 \\ \hline 62\,860 \\ + \; 25\,144\phantom{0} \\ \hline 314\,300 \end{array} \longrightarrow 31{,}4300$$

Se agrega la coma decimal

**Respuesta**

El resultado final es 31,4300.

**18.** Un grupo de estudiantes en un salón de clases, convierten los números grandes y pequeños en notación científica de las siguientes cantidades:

| | |
|---|---|
| a). 350 000 000 | d). 0,0889 |
| b). 18 600 000 | e). 0,000000386 |
| c). -34 840 | f). 0,0000000000781 |

### Resolución

Se plantean de la siguiente manera:

**a)** 350 000 000. Se coloca el 3 como cifra entera, 50000000 cómo parte decimal. Como el punto decimal recorre ocho posiciones a la izquierda, se tiene:

$$350\,000\,000 = 3{,}5 \times 10^{8}.$$

**b)** 18 600 000. Se coloca 1 como cifra entera y el resto como parte decimal, como el punto decimal recorre siete posiciones a la izquierda, se tiene:

$$18\,600\,000 = 1{,}86 \times 10^{7}.$$

**c)** -34 840. Se coloca 3 como cifra entera y el resto como parte decimal y como el punto decimal recorre cuatro posiciones a la izquierda, se tiene:

$$-34\,840 = -3{,}484 \times 10^{4}.$$

**d)** 0,0889. Se coloca 8 como cifra entera y el resto como parte decimal, como el punto decimal recorre 2 posiciones hacia la derecha, se tiene:

$$0{,}0889 = 8{,}89 \times 10^{-2}.$$

**Saber más...**

**Notación científica**

Si la potencia de $10^{+}$ es positiva, la coma decimal debe recorrer a la derecha tantos lugares como indique la potencia.
Si la potencia de $10^{-}$ es negativa, la coma decimal debe recorrer a la izquierda tantos lugares como indique la potencia.

**e)** 0,000000386. Se coloca 3 como cifra entera y el resto como parte decimal, como el punto decimal recorre 7 posiciones hacia la derecha.

$$0{,}000000386 = 3{,}86 \times 10^{-7}.$$

**f)** 0,0000000000781. Se coloca 7 como cifra entera y el resto como parte decimal ya que el punto decimal recorre 11 posiciones hacia la derecha, se tiene:

$$0{,}0000000000781 = 7{,}81 \times 10^{-11}.$$

**Respuesta**

Los resultados son:

a) $3{,}5\times10^{8}$; b) $1{,}86\times10^{7}$; c) $-34840 = -3{,}484\times10^{4}$; d) $8{,}89\times10^{-2}$; e) $3{,}86\times10^{-7}$; f) $7{,}81\times10^{-11}$.

**19.** Javier es un estudiante de primero de secundaria, su maestra le pide que escriba los siguientes números, que están en notación científica, en su forma desarrollada.

a). $4{,}2\times10^{2}$

b). $1{,}05\times10^{7}$

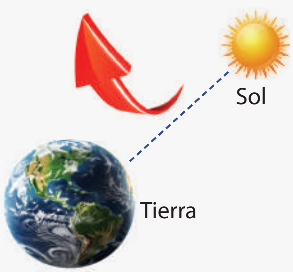
c). $-3{,}264\times10^{2}$

d). $3{,}002\times10^{-7}$

**Saber más...**

La distancia entre la Tierra y el Sol.

$d = 1{,}5 \times 10^{8}$ km.




*Fuente: Propia*

**Resolución**

Javier se plantea de la siguiente manera:

**a)** $4{,}2\times10^{2}$. El exponente 2 indica que el punto decimal debe recorrer 2 lugares hacia la derecha.

$$4{,}2 \times 10^{2} = 420$$

**b)** $1{,}05\times10^{7}$. El exponente 7 indica que el punto decimal debe recorrer 7 lugares hacia la derecha.

$$1{,}05 \times 10^{7} = 10\ 500\ 000$$

**c)** $-3{,}264\times10^{2}$. El exponente 2 indica que el punto decimal debe recorrer 2 lugares hacia la derecha.

$$-3{,}264 \times 10^{2} = -326{,}4$$

**d)** $3{,}002\times10^{-7}$. El exponente -7 indica que el punto decimal se deberá recorrer 7 lugares hacia la izquierda.

$$3{,}002\times10^{\ 7}=0{,}0000003002$$

**Respuesta**
Los resultados son:

a) 420;
b) 10500000;
c) -34840;
d) 0,0000003002.

## Números irracionales y reales

**20.** Miguel efectúa las siguientes expresiones:

a) $(2+\sqrt{2})^2$  b) $(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})$

¿El resultado será una cantidad irracional o entero?

a) $(2+\sqrt{2})^2=2^2+2\cdot2\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$ desarrollo del binomio cuadrado

$=4+4\sqrt{2}+2$  $(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}, a\in\mathbb{Z}^+$

$=6+4\sqrt{2}$

Es un número irracional.

b) $(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=3^2-(\sqrt{3})^2$ diferencia de cuadrados

$=9-3$  $(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}, a\in\mathbb{Z}^+$

$=6$

Es un número entero.

**Respuesta**
Los resultados son: a) $6+4\sqrt{2}$ es un número irracional;
b) 6 es un número entero.

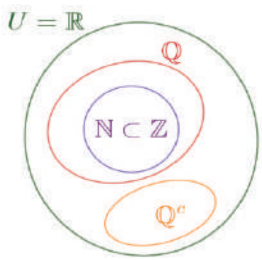
**21.** Marcos y María tienen tarea de matemática. Consiste en considerar el siguiente conjunto universo

$$U=\left\{-7;\ -5\frac{3}{4};-\sqrt{4};-\frac{3}{2};0;\frac{4}{5};1{,}1\frac{2}{3};\sqrt{8};3{,}01;e;\pi\right\}$$

**Encontrar**

**a)** Conjunto de números enteros.
**b)** Conjunto de números racionales.
**c)** Conjunto de números irracionales.
**d)** Conjunto de los números reales.

**Clasificación de números**




**Resolución**

Ambos responden la tarea de la siguiente manera:

**a)** El conjunto de los números enteros es:

$$\mathbb{Z}=\{-7;-\sqrt{4};0{,}1\}$$

**b)** El conjunto de números racionales es:

$$\mathbb{Q}=\left\{-7;-5\frac{3}{4};-\sqrt{4};-\frac{3}{2};0;\frac{4}{5};1{,}1\frac{2}{3};3{,}01\right\}$$

**c)** El conjunto de números irracionales es:

$$\mathbb{Q}^c=\{\sqrt{8};e;\pi;e;\pi\}$$

**d)** El conjunto de los números reales es:

$$U=\mathbb{R}$$

**Respuesta**

Los resultados son: **a)** $\mathbb{Z}=\{-7;-\sqrt{4};0{,}1\}$ **b)** $\mathbb{Q}^c=\{\sqrt{8};e;\pi;e;\pi\}$

**c)** $\mathbb{Q}=\left\{-7;-5\frac{3}{4};-\sqrt{4};-\frac{3}{2};0;\frac{4}{5};1{,}1\frac{2}{3};3{,}01\right\}$ **d)** $U=\mathbb{R}$

**22.** Ángel desarrolla la expresión $E=\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{1250}$ y quiere saber si el resultado es una cantidad irracional.

**Resolución**

Desarrollar aplicando las propiedades de potencia y radicación.

$$E=\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{1250}=\sqrt{3^2\cdot 2}+\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{5^4\cdot 2}$$

$$=\sqrt{3^2}\sqrt{2}+\sqrt{2^2}\sqrt{2}+\sqrt{(5^2)^2}\sqrt{2} \qquad \sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b},\qquad a,b\in\mathbb{Z}^+$$

$$=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+25\sqrt{2}=30\sqrt{2} \qquad \sqrt[n]{a^n}=a,\qquad n\in\mathbb{N}$$

**Respuesta**

Concluye que $E=30\sqrt{2}$ es un número irracional.

**23.** Hernán desarrolla la siguiente expresión.

$$E = \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{4\sqrt[6]{18^{-1}}}}}{\sqrt[6]{24}}$$

¿El desarrollo de E, será un número irracional o un número entero?

**Resolución**

$$E = \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{4\sqrt[6]{18^{-1}}}}}{\sqrt[6]{24}} \qquad \text{expresión dada}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{3^3\sqrt[6]{4^2\sqrt[6]{18^{-1}}}}}{\sqrt[6]{2^3 3}} \qquad \sqrt{a\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a^n\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a^n b}, \quad a,b \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{N}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{3^3 4^2 18^{-1}}{2^3 3}} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad a,b \in \mathbb{Z}^+, \quad b \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{3^3 3^{-1} 2^4 2^{-3}}{18}} \qquad \text{producto de potencias con igual base}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{3^{3-1} 2^{4-3}}{18}} \qquad \text{operación en exponentes}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{3^2 2^1}{18}} \qquad \text{operación y simplificación en subradical}$$

$$= \sqrt[6]{1} = 1 \qquad \sqrt[n]{1} = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

**Respuesta:**

Por tanto, E=1 es un número entero.

## Razones y Proporciones

**24.** Si un automóvil tardó 9 horas al recorrer 750 kilómetros, ¿Qué tiempo empleará en recorrer 2250 kilómetros, si su velocidad es constante?

**Datos**

***Supuesto:***
En 9 h recorre 750 km.
***Pregunta:*** $t$=?
En $t$ h recorre 2250 km.

**Resolución**
Las cantidades son directamente proporcionales, se forma una proporción de razones, es decir:

$$\frac{9}{t} = \frac{750}{2250} \Rightarrow t = \frac{9 \cdot 2250}{750} = \frac{20250}{750} = 27$$

Respuesta:

El automóvil recorre 2250 kilómetros en 27 horas.

**25.** Un obrero gana 120 Bs por día de trabajo en la construcción. ¿Cuánto gana en un mes de 30 días?

### Resolución

Supuesto:
En 1 día gana 120 Bs.
Pregunta: $x = ?$
En 30 días gana $x$ bolivianos.

Por la regla de tres simple:

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 120 \\ 30 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{30} = \frac{120}{x} \Leftrightarrow x = \frac{30 \cdot 120}{1}$$

$$\Rightarrow x = 3600$$

**Respuesta**

El obrero gana 3600 bolivianos al mes.

**26.** La razón de edad entre Andrés y Betty es de 5 a 9, mientras que la suma de sus edades es 42. Hallar las edades respectivas.

### Resolución

*Fuente: Agencia boliviana de información*

**Datos**

***Razón:***

$$\frac{A}{B} = \frac{5}{9}$$

**Donde:**

$A =$ Andrés

$B =$ Betty

En principio la suma de edades es:

$$A + B = 42 \qquad \ldots(1)$$

Las razones de edades son directamente proporcionales, es decir:

$$\frac{A}{B} = \frac{5}{9} \Longrightarrow A = \frac{5}{9}B \qquad \ldots(2)$$

Luego reemplazando (2) en (1), se tiene:

$$\frac{5}{9}B + B = 42 \Longrightarrow \frac{5B + 9B}{9} = 42$$

$$\Longrightarrow B = \frac{9 \cdot 42}{14} = 27 \Longrightarrow B = 27$$

Como $B = 27$, entonces en (2) tenemos:

$$A = \frac{5}{9} \cdot 27 = 5 \cdot 3 = 15 \Longrightarrow A = 15$$

**Respuesta**

Las edades son 15 y 27 años.

## Ecuaciones

**27.** La maestra de matemática pide a sus estudiantes que resuelvan la ecuación:

$$3x + 7 = 7x + 3$$

### Resolución

La maestra indica que deben agrupar términos semejantes en cada miembro de la ecuación.

$3x + 7 = 7x + 3 \implies 7 - 3 = 7x - 3x$

$\implies 4 = 4x$

$\implies \frac{4}{4} = x$ propiedad $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, \boxed{a \cdot b = c \implies b = \frac{c}{a}}$

$\implies 1 = x$ propiedad $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \boxed{\frac{a}{a} = 1}$

**Respuesta**

Todos los estudiantes dijeron que el valor de $x$ es igual a 1.

**28.** Un grupo de estudiantes se plantea resolver la ecuación lineal:

$$3x - \frac{1}{2} = 2(x - 2)$$

### Resolución

Todos están de acuerdo en usar la propiedad distributiva, para así ordenar variables dependientes en un lado y variables independientes en el otro lado:

$$3x - \frac{1}{2} = 2(x - 2) \implies 3x - \frac{1}{2} = 2x - 4$$

propiedad distributiva $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \boxed{a(b - c) = ab - ac}$

$\implies 3x - 2x = \frac{1}{2} - 4$

$\implies 3x - 2x = \frac{1-8}{2}$ sacando el m.c.d.

$\implies x = -\frac{7}{2}$

**Respuesta**

El grupo de estudiantes dijo que el valor de $x$ es $-\frac{7}{2}$.

**29.** Javier y Paola compiten por determinar el valor de $x$, en la ecuación:

$$\frac{3x+1}{6x-2}=\frac{2x+5}{4x-13}$$

**Resolución**

Paola, primero, despeja los elementos en el divisor de cada miembro de la ecuación.

$$\frac{3x+1}{6x-2}=\frac{2x+5}{4x-13}\implies (3x+1)(4x-13)=(2x+5)(6x-2)$$

propiedad $\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}$ con $b,d\neq 0$ , $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\longrightarrow ad=bc}$

$$\implies 12x^2-39x+4x-13=12x^2-4x+30x-10$$

$$\implies 12x^2-35x-13=12x^2+26x-10$$

$$\implies -13+10=12x^2-12x^2+35x+26x$$

ordenando en términos semejantes

$$\implies -3=61x$$

$$\implies x=-\frac{3}{61}$$

propiedad $\forall a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$, $\boxed{a\cdot b=c\implies b=\frac{c}{a}}$

**Respuesta**

Paola ganó la competencia determinando el valor de $x$ que es $-\frac{3}{61}$.

**30.** Marco, antes de salir al recreo, quiere resolver la ecuación lineal

$$\frac{x+m}{n}-\frac{x-n}{m}=2 \text{ para } n,m\in\mathbb{R}, \text{ con } n,m\neq 0.$$

**Resolución**

Marco agrupa términos semejantes en cada miembro de la ecuación.

$$\frac{x+m}{n}-\frac{x-n}{m}=2\implies \frac{m(x+m)-n(x-n)}{nm}=2$$

sacando el m.c.d.

$$\implies \frac{mx+m^2-nx+n^2}{nm}=2$$

$$\implies \frac{x(m-n)+(m^2+n^2)}{nm}=2$$

factorizando y agrupando términos semejantes

$$\implies x(m-n)+(m^2+n^2)=2nm\,;$$

por propiedad $\forall a\in\mathbb{R}, a\neq 0$, $\boxed{u=\frac{b}{a}\rightarrow au=b}$

$$\implies n^2-2mn+m^2=x(n-m)$$

ordenando la ecuación

$$\Longrightarrow (n-m)(n-m) = x(n-m)$$ factorizando

$$\Longrightarrow \frac{(n-m)(n-m)}{(n-m)} = x$$ simplificando términos semejantes

$$\Longrightarrow n-m = x$$

**Respuesta**

Marco se fue tranquilo al recreo hallando el valor de $x$ igual a $n$-$m$.

**31.** Mariela le pregunta al maestro de matemática: ¿Cuánto es el resultado de la ecuación: $|3x+8| = 1$?

**Resolución**

El maestro le dice que cuando se trata de un valor absoluto se deber hacer un análisis en sus dos posibles casos, es decir:

$$|a| = \begin{cases} a\,;\ a > 0, & a \text{ es } \textbf{positivo} \\ -a;\ a \leq 0, & a \text{ es } \textbf{negativo} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow |3x+8| = \begin{cases} 3x+8 & 3x+8 \textit{ es positivo} \\ -(3x+8) & 3x+8 \textit{ es negativo} \end{cases}$$

Analicemos el caso cuando $3x+8$ es **positivo.**

$$3x+8 = 1 \Longrightarrow 3x = 1-8$$

$$\Longrightarrow 3x = -7$$

$$\Longrightarrow x = -\frac{7}{3}$$

Analicemos el caso cuando $3x+8$ es **negativo.**

$$-(3x+8) = 1 \Longrightarrow -3x-8 = 1$$

$$\Longrightarrow -8-1 = 3x$$

$$\Longrightarrow -9 = 3x$$

$$\Longrightarrow -\frac{9}{3} = x$$

$$\Longrightarrow -3 = x$$

**Respuesta**

Mariela encuentra las respuestas que son: $x = \left\{-3, -\frac{7}{3}\right\}$

## Factorización

**32.** Martin quiere factorizar la expresión algebraica $16x - 4x^3$ antes de ir a dormir.

### Resolución

Agrupa términos semejantes para ver si se pueden efectuar más operaciones.

$$
\begin{aligned}
16x - 4x^3 &= 4^2x - 4x^3 && \text{en notación exponencial}\\
&= 4x(4 - x^2) && \text{factorizando términos semejantes}\\
&= 4x(2^2 - x^2) && \text{en notación exponencial}\\
&= 4x(2 - x)(2 + x)
\end{aligned}
$$

diferencia de cuadrados $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\boxed{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$

**Respuesta**

Martin encuentra la expresión factorizada como: $4x(2 - x)(2 + x)$

**33.** Andrés le pide ayuda a Julio para factorizar la expresión algebraica:

$$m^2 - 11m + 30$$

### Resolución

Recordando un poco, cuando se tiene la expresión.

$x^2 + bx + c = 0$, si $\exists\, m, n \in \mathbb{R}, c = mn$ y $b = m + n$

$$\Rightarrow (x + n)(x + m) = 0$$

$m^2 - 11m + 30$, si $30 = (-6) \cdot (-5)$ y $11 = (-6) + (-5)$ $\quad \exists\, m, n \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \big(x + (-6)\big) \cdot \big(x + (-5)\big) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 6) \cdot (x - 5) = 0$$

**Respuesta**

La factorización es: $(x - 6)(x - 5)$

**34.** Rocío está haciendo la tarea de matemática y le piden factorizar la expresión algebraica:

$$3xa + 2y + 2a + 3xy$$

### Resolución

Rocío ordena los términos adecuadamente, para así poder factorizar términos semejantes.

$3xa + 2y + 2a + 3xy \Rightarrow 3xa + 3xy + 2a + 2y$ $\qquad$ agrupando términos

$\Longrightarrow 3x(a+y)+2(a+y)$ factorizar términos semejantes en $a$ y $b$

$\Longrightarrow (3x+2)(a+y)$ factorizar términos semejantes en $(a+y)$

**Respuesta**

Rocio concluye que la factorización que es: $(3x+2)(a+y)$

**35.** Francisco le pide ayuda a su mamá, quien es maestra de matemática, para factorizar la expresión:

$$\frac{1}{36}-\frac{x^6}{25}$$

## Resolución

Primero llevemos cada elemento a sus cocientes de cuadrados para factorizar.

$$\frac{1}{36}-\frac{x^6}{25} \Rightarrow \frac{1}{6^2}-\frac{(x^3)^2}{5^2}$$

expresar los términos en su forma cuadrática:

$$\Rightarrow \frac{1^2}{6^2}-\frac{(x^3)^2}{5^2}$$

por propiedad $\forall n \in \mathbb{R}, \boxed{1^n=1}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{x^3}{5}\right)^2$$

propiedad del cociente de cuadrados $\forall a,b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{6}-\frac{x^3}{5}\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{x^3}{5}\right)$$

por diferencia de cuadrados $\forall a,b \in \mathbb{R}, \boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$

**Respuesta**

Francisco factoriza el problema: $\left(\frac{1}{6}-\frac{x^3}{5}\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{x^3}{5}\right)$

**36.** En un examen de matemática les piden factorizar la expresión:

$$x^8-y^8$$

**Básico 01**

## Resolución

Primero llevar la expresión a su forma cuadrática y ver qué operaciones más se pueden realizar.

$x^8 - y^8 \implies (x^4)^2 - (y^4)^2$

expresando los términos en su forma cuadrática: $a^2$

$\implies (x^4 - y^4)(x^4 + y^4)$

por diferencia de cuadrados $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$

$\implies \left((x^2)^2 - (y^2)^2\right)(x^4 + y^4)$

expresando los términos $x^4, y^4$ en su forma cuadrática: $a^2$

$\implies (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$

por diferencia de cuadrados $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$

**Respuesta**

Así la factorización es: $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$

# Inecuaciones

**37.** Alison quiere hallar el conjunto solución de la inecuación:

$$11x - 25 < 6x - 5$$

## Resolución

La idea es que se tengan los términos semejantes a $x$ en un lado de la inecuación y solo coeficientes en el otro lado.

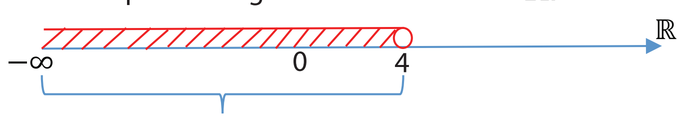
$11x - 25 < 6x - 5 \implies 11x - 6x < 25 - 5$ despejando

$\implies 5x < 20$

$\implies x < \frac{20}{5}$ propiedad: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ $si$ $a > 0$, $\boxed{ab < c \longrightarrow b < \frac{c}{a}}$

$\implies x < 4$

Haciendo una interpretación grafica en la recta real $\mathbb{R}$:




Conjunto solución: $(-\infty, 4)$

**Respuesta**

Alison encuentra el conjunto solución que es:

$$C_x = \{x \in \mathbb{R}; x < 4\}$$

**38.** Darsy se prepara para el examen de matemática, desarrollando el conjunto solución de la inecuación: $\frac{2x+1}{5} - \frac{2-x}{3} > 1$

### Resolución

Darsy piensa en sacar el m.c.d. para así poder efectuar las operaciones que nos quedan.

$\frac{2x+1}{5} - \frac{2-x}{3} > 1 \Longrightarrow \frac{3(2x+1)-5(2-x)}{15} > 1$ sacando el m.c.d.

$\Longrightarrow \frac{6x+3-10+5x}{15} > 1$

propiedad distributiva $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \boxed{a(b+c) = ac + ac}$

$\Longrightarrow 6x + 3 - 10 + 5x > 15 \cdot 1$

propiedad $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ si\ a > 0, \boxed{ab < c \longrightarrow b < \frac{c}{a}}$

$\Longrightarrow 11x - 7 > 15$

$\Longrightarrow 11x > 15 + 7$

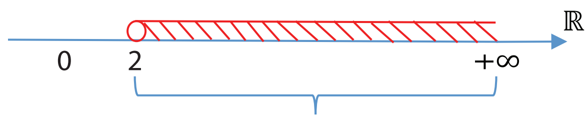
$\Longrightarrow 11x > 22$

$\Longrightarrow x > \frac{22}{11}$ propiedad $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ si\ a > 0, \boxed{ab < c \longrightarrow b < \frac{c}{a}}$

$\Longrightarrow x > \frac{2 \cdot 11}{11}$ ley de simplificación $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \boxed{\frac{ab}{b} = a}$

$\Longrightarrow x > 2$

Haciendo una interpretación grafica en la recta real




Conjunto solución: $(2, +\infty)$

**Respuesta**

Darsy encuentra el conjunto solución: $C_s = \{x \in \mathbb{R};\ x > 2\}$

**39.** Daniel está en una prueba en línea, le piden hallar el conjunto solución de la inecuación $\frac{ax+b}{c} \leq b$ donde $a, b, c$ son constantes negativas.

## Resolución

Daniel aplica las propiedades de inecuaciones.

$$\frac{ax+b}{c} \leq b \implies ax + b \geq bc$$

por la propiedad $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ si\ a < 0, \boxed{ab \leq c \longrightarrow b \geq \frac{c}{a}}$

$\implies ax + b - b \geq bc - b$ sumando a ambos lados $(-b)$

$\implies ax \geq bc - b$ cancelando términos semejantes

$\implies x \leq \dfrac{bc - b}{a}$ por la propiedad $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ si $a < 0, \boxed{ab \geq c \longrightarrow b \leq \frac{c}{a}}$

$\implies x \leq \dfrac{b(c-1)}{a}$ factorizando términos semejantes

**Respuesta**

Daniel resuelve el problema en tiempo récord, hallando el conjunto solución: $C_s = \left\{x \in \mathbb{R};\ x \leq \dfrac{b(c-1)}{a}\right\}$

**40.** Miguel se prepara para las olimpiadas de matemática y quiere determinar el conjunto solución de la inecuación $\frac{3}{x-1} > 1$.

## Resolución

Antes de resolver el ejercicio, notemos que no podemos mandar a multiplicar la parte del divisor $x - 1$ al otro lado pues depende de una variable involucrada en su conjunto solución, así que no sabemos si es positivo o negativo. Dicho esto, procedamos a resolver el problema.

$\dfrac{3}{1-x} > 1 \implies \dfrac{3}{1-x} - 1 > 1 - 1$ sumando a ambos miembros (-1)

$\implies \dfrac{3}{1-x} - 1 > 0$

$\implies \dfrac{3-(1-x)}{1-x} > 0$ sacando el m.c.d.

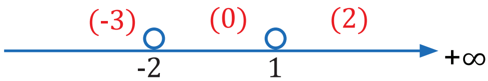
$\implies \dfrac{2+x}{1-x} > 0$

Ahora evaluemos los puntos críticos: $(2 + x)$ y $(1 - x)$

$$2 + x = 0 \implies x = -2$$
$$1 - x = 0 \implies x = 1$$

Una vez encontrados los puntos críticos, los situamos en la recta real R, para su análisis respectivo y encontrar el conjunto solución.


Notemos que tenemos 3 intervalos que serían: (-∞,-2),(-2,1) y (1,∞). Ahora evaluar para un punto cualquiera la veracidad en cualquier íntervalo obtenido, luego aquellos intervalos que cumplan la desigualdad forman parte del conjunto solución. (se recomienda tomar el menor valor dentro del intervalo)




Para $x = -3$, reemplazamos en la inecuación $\dfrac{2+x}{1-x} > 0$

$$\frac{2+x}{1-x} > 0 \Rightarrow \frac{2-3}{1-(-3)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2-3}{1+3} > 0 \qquad \text{ley de signos}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} > 0 \qquad \text{proposición es falsa (F)}$$

Para $x = 0$, reemplazamos en la inecuación $\dfrac{2+x}{1-x} > 0$

$$\frac{2+x}{1-x} > 0 \Rightarrow \frac{2+0}{1-0} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1} > 0 \qquad \text{ley de signos}$$

$$\Rightarrow 2 > 0 \qquad \text{proposición es verdadera (V)}$$

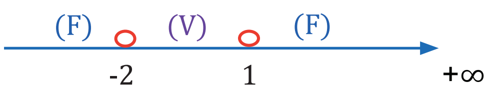
Para $x = 2$, reemplazamos en la inecuación $\dfrac{2+x}{1-x} > 0$

$$\frac{2+x}{1-x} > 0 \Rightarrow \frac{2+2}{1-2} > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{1} > 0 \qquad \text{ley de signos}$$

$$\Rightarrow -4 > 0 \qquad \text{proposición es falsa (F)}$$

Así tendremos




Solo nos interesa el intervalo donde sean verdaderas las afirmaciones, por tanto el conjunto solución será: (-2,1)

**Respuesta**

Miguel encuentra el conjunto solución:

$$C_s = \{x \in \mathbb{R}; -2 < x < 1\}$$

## Función exponencial y logaritmo

**41.** Vanesa quiere agilizar su mente y se propone hallar el valor de $x$, en la ecuación logarítmica $\log_4 x^3 = \frac{3}{2}$.

**Básico** **01**

## Resolución

Vanesa, despejemos la variable $x$, aplicando la definición de logaritmo.

$$\log_4 x^3 = \frac{3}{2} \Longrightarrow x^3 = 4^{\frac{3}{2}}$$

definición $\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0, b > 0, b \neq 0$ $\boxed{\log_b x = y \Leftrightarrow x = b^y}$

$$\Longrightarrow x^3 = (2^2)^{\frac{3}{2}}$$ expresamos 4 en su forma exponencial

$$\Longrightarrow x^3 = 2^{2\cdot\frac{3}{2}}$$

propiedad de multiplicación de exponentes $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{\left(a^b\right)^c = a^{bc}}$

$$\Longrightarrow x^3 = 2^3$$

$$\Longrightarrow x = \sqrt[3]{2^3}$$ teorema $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0$, $\boxed{a^3 = b \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{b}}$

$$\Longrightarrow x = (2^3)^{\frac{1}{3}}$$

propiedades potencia de exponente fraccionario $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$, $\boxed{a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}}$

$$\Longrightarrow x = 2^{3\cdot\frac{1}{3}}$$

propiedad de multiplicación de exponentes $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{\left(a^b\right)^c = a^{bc}}$

$$\Longrightarrow x = 2$$

**Respuesta**

Vanesa, sin ninguna dificultad, encuentra el valor de $x$ que es 2.

**42.** Alan está en su examen de matemática y le piden efectuar las propiedades de logaritmos para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\log(x+2) - \log x = \log 12$$

## Resolución

Alan piensa que se debe llevar todo a un solo lado de la ecuación para poder aplicar las propiedades de logaritmos.

$$\log(x+2)-\log x=\log 12 \Longrightarrow \log(x+2)-\log x-\log 12=0$$

$$\Longrightarrow \log(x+2)-(\log x+\log 12)=0$$

factorizar el signo $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\ \boxed{(a-b)=-(b-a)}$

$$\Longrightarrow \log(x+2)-(\log 12x)=0$$

teorema $\forall a\in\mathbb{R}, a>1$, y $M,N>0,\ \boxed{\log_a M+\log_a N=\log_a(MN)}$

$$\Longrightarrow \log\frac{x+2}{12x}=0$$

teorema $\forall a\in\mathbb{R}, a>1$, y $M,N>0,\ \boxed{\log_a M-\log_a N=\log_a\left(\frac{M}{N}\right)}$

$$\Longrightarrow \frac{x+2}{12x}=10^0$$

definición $\forall x,y\in\mathbb{R}, x>0, b>0, b\neq 0\ \boxed{\log_b x=y\Leftrightarrow x=b^y}$

$$\Longrightarrow \frac{x+2}{12x}=1$$

$$\Longrightarrow x+2=12x$$

$$\Longrightarrow 2=12x-x$$

$$\Longrightarrow 2=11x$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{11}=x$$

**Respuesta**

Con las propiedades logarítmicas, Alan encuentra el valor de $x$ que es $\frac{2}{11}$.

## Exponentes y radicales

**43.** En el recreo Laura y Raúl quieren expresar el número $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2^{-1}$ en la forma $\frac{a}{b}$, donde $a, b$ son números enteros.

**Resolución**

Laura le dice a Raúl que primero deben aplicar las propiedades de exponentes.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2^{-1} = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

propiedad del inverso multiplicativo, $\forall a \in \mathbb{R}, \exists a^{-1}, \boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$

$$= (-1)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

propiedad de exponente, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c}$

$$= \frac{2^2}{3^2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2^3 - 3^2}{3^2 \cdot 2}$$ sacando el m.c.d.

$$= -\frac{1}{18}$$

**Nota:** Todo número negativo elevado al cuadrado se vuelve positivo, es decir:

$\forall a \in \mathbb{R}, a < 0, \boxed{a^2 > 0}$

**Respuesta**

Así Laura y Raúl expresan el problema en la forma $-\frac{5}{18}$

**44.** Antes de ir a la cancha, José le pide ayuda a su hermano para simplificar la expresión :

$$\sqrt{9x^{-4}y^6}$$

**Resolución**

El hermano de José le dice que si se tiene algo en común respecto a los exponentes.

$$\sqrt{9x^{-4}y^6} = \sqrt{3^2(x^{-2})^2(y^3)^2}$$

propiedad de exponente, $\forall a, b, \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{N}, \boxed{(ab)^c = a^c b^c}$

Notemos que todos los elementos están elevados al cuadrado, entonces:

$$= \sqrt{(3x^{-2}y^3)^2}$$

propiedad de exponente, $\forall a, b, \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{N}, \boxed{a^c b^c = (ab)^c}$

$= 3x^{-2}y^{3}$ propiedad de exponente $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = a$

$= \dfrac{3y^3}{x^2}$ propiedad del inverso multiplicativo, $\forall a \in \mathbb{R}, \exists a^{-1}, a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

**Respuesta**
Así José simplifica el problema y le sale que es $\dfrac{3y^2}{x^2}$, así se va a la cancha sin ninguna preocupación.

**45.** Boris compite con Mireya en multiplicar las expresiones dadas por

$$(x^{-4} + 2 + 3x^{-2})(x^{-4} - x^{-2} + 1)$$

**Resolución**

Multipliquemos miembro a miembro.

$$(x^{-4} + 2 + 3x^{-2})(x^{-4} - x^{-2} + 1)$$

$$= (x^{-4})(x^{-4}) - (x^{-4})(x^{-2}) + x^{-4} + 2x^{-4} - 2x^{-2} + 2 + 3(x^{-2})(x^{-4}) - 3(x^{-2})(x^{-2}) + 3x^{-2}$$

$$= x^{-8} - x^{-6} + x^{-4} + 2x^{-4} - 2x^{-2} + 2 + 3x^{-6} - 3x^{-4} + 3x^{-2}$$

propiedad de suma de exponentes en la multiplicación $\forall a, b \in \mathbb{R},$ $\forall c \in \mathbb{N}, \boxed{(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c}$

$$= x^{-8} + 2x^{-6} + x^{-2} + 2$$

**Respuesta**
Mireya gana la competencia indicando a Boris que el resultado es: $x^{-8} + 2x^{-6} + x^{-2} + 2$.

**46.** Andrea sale al pizarrón a calcular la expresión dada por: $(-8)^{\frac{2}{3}}$

**Resolución**

Andrea solo aplica las propiedades de los exponentes:

$$(-8)^{\frac{2}{3}} = ((-8)^2)^{\frac{1}{3}}$$

propiedad de multiplicación de exponentes $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \boxed{\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}}$

$$= \sqrt[3]{8^2}$$

propiedades potencia de exponente fraccionario $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \boxed{a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}}$

$$= \sqrt[3]{64}$$

$= \sqrt[3]{4^3}$ expresar en su forma cubica, $a^3$

$= 4$

**Respuesta**

Así Andrea encuentra el resultado 4.

**47.** La maestra de matemática deja la tarea de simplificar la expresión dada por: $\sqrt[3]{648}$

**Resolución**

Descomponer 648 llevándolo al producto de potencias

Sacar divisores comunes de 648

| | | |
|---|---|---|
| 648 | 2 | $2^3$ |
| 324 | 2 | |
| 162 | 2 | |
| 81 | 3 | $3^4$ |
| 27 | 3 | |
| 9 | 3 | |
| 3 | 3 | |
| 1 | | |

$\sqrt[3]{648} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^4}$

$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3}$

reescribiendo, $a^3 = a \cdot a \cdot a = a^2 \cdot a$

$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} \cdot \sqrt[3]{3}$

propiedades de radicales

$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \boxed{\sqrt[c]{a \cdot b} = \sqrt[c]{a} \cdot \sqrt[c]{b}}$

$= \sqrt[3]{(2 \cdot 3)^3} \cdot \sqrt[3]{3}$

propiedad de exponente,

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \boxed{(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c}$

$= (2 \cdot 3) \cdot \sqrt[3]{3}$

$= 6 \cdot \sqrt[3]{3}$

**Respuesta**

Así la descomposición es $6\sqrt[3]{3}$.

## Progresión aritmética y geométrica

**48.** Néstor quiere hallar la razón de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de los $n-$ primeros términos es $n(5n-3)$.

**Resolución**

Néstor dice que la suma de los $n-$ primeros términos es $n(5n-3)$, entonces asignemos valores consecutivos a n para poder formar un sistema de ecuaciones y poder hallar la razón.

Sea $n = 1$, reemplacemos en la fórmula de la suma de los $n-$ primeros términos:

$$S_n = n(5n-3) \Rightarrow S_1 = 1(5 \cdot 1 - 3) = 2 \Rightarrow S_1 = 2$$

Notemos que es la sumatoria del primer término entonces:

$$S_1 = a_1$$

Sea $n$=2, reemplacemos en la fórmula de la suma de los n-primeros términos:

$$S_n = n(5n-3) \Longrightarrow S_2 = 2(5\cdot 2-3) = 2(7) = 14 \Longrightarrow S_2 = 14$$

Como $\quad S_2 = a_1 + a_2 \Longrightarrow S_2 - a_1 = a_2$

$$\Longrightarrow 14 - 2 = a_2$$

$$\Longrightarrow 12 = a_2$$

Se sabe que la razón de una progresión aritmética es de la forma:

$$r = a_2 - a_1$$

Como ya tenemos $S_1$ y $S_2$ podemos hallar la razón.

$$r = a_2 - a_1 \Longrightarrow r = 12 - 2 \Longrightarrow r = 10$$

**Respuesta**

Néstor encuentra la razón de la progresión aritmética que es $r = 10$.

**49.** Aidé le dice a Fabio que le dará un chocolate si encuentra el décimo sexto término en la progresión geométrica: $\frac{1}{2^8}, \frac{1}{2^7}, \frac{1}{2^6}, \dots\dots.$

**Resolución**

Fabio se pone a pensar: tiene los 3 primeros términos de la progresión geométrica entonces puede calcular la razón:

$$a_1 = \frac{1}{2^8}; \quad a_2 = \frac{1}{2^7}; \quad a_3 = \frac{1}{2^6}$$

Usando la fórmula de la razón $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ tendremos:

$$r = \frac{a_2}{a_1} \Longrightarrow r = \frac{1/2^7}{1/2^8}$$

$$\Longrightarrow r = \frac{2^8}{2^7}$$

propiedad de extremos y medios, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}$, con $b, d \neq 0$, $\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}}$

$$\Longrightarrow r = 2 \quad \text{simplificando términos}$$

Como ya se tiene la razón y el primer término entonces puede hallar el término $n$ – ésimo en la fórmula: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$a_{16} = \frac{1}{2^8}\cdot 2^{16-1} \Longrightarrow a_{16} = \frac{1}{2^8}\cdot 2^{15}$$

$$\Longrightarrow a_{16} = \frac{2^{15}}{2^8}$$

$$\Longrightarrow a_{16} = 2^7; \quad \text{simplificando términos semejantes}$$
$$\Longrightarrow a_{16} = 128$$

**Respuesta**
Fabio le dice a Aidé que el décimo sexto término de la progresión geométrica es 128.

**50.** El maestro de matemática dice a sus estudiantes:" se sabe que el sexto término de una progresión aritmética es 10 y que la diferencia es 3". Hallar el término general de la progresión aritmética.

## Resolución

Hagamos un análisis y recopilemos datos.

**Datos**

$a_6 = 20$
$d = 3$
$a_n = ?$

Notemos que se necesita el primer término y la diferencia. Como se tiene la diferencia, entonces hallemos el primer término, mediante el sexto término, es decir:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Longrightarrow a_6 = a_1 + (6-1)3$$

Como $a_6 = 20$ hipótesis

$$\Longrightarrow a_1 + (6-1)3 = 20$$
$$\Longrightarrow a_1 + 15 = 20$$
$$\Longrightarrow a_1 = 20 - 15$$
$$\Longrightarrow a_1 = 5$$

Así se tiene el primer término y la diferencia, entonces tenemos todos los datos necesarios para hallar el término general.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Longrightarrow a_n = 5 + (n-1)3$$

**Respuesta**
Todos los estudiantes concluyes que el término general es:

$$a_n = 5 + (n-1)3$$

## Números enteros, racionales y fracciones

**51.** Un maestro da tarea a sus estudiantes y pregunta: ¿ cuántas personas se encuentran en una habitación, si en ella también hay: 1 gato, 1 conejo y 1 perro, además al contar el número de orejas de personas y animales hay 26 orejas?

### Datos

A=2 (orejas de gato)
B=2 (orejas de conejo)
C=2 (orejas de perro)
D=? (orejas de personas)
N=26 (número de orejas entre personas y animales)

### Resolución

Identifican primero el número de orejas tanto de personas y animales, luego plantean la siguiente ecuación:

$$A+B+C+D=N$$

*Fuente: El comercio*

Reemplazando datos:

$$2+2+2+D=26$$
$$\Rightarrow\ 6+D=26$$
$$\Rightarrow\ D=26-6$$
$$\Rightarrow\ D=20$$

*Fuente: INE censo Bolivia*

De donde, se obtiene el número de orejas de personas, en total es 20, entonces en una habitación hay 10 personas, es decir:

$$P=\frac{D}{2}=\frac{20}{2}=10$$
$$\Longrightarrow P=10$$

**Respuesta**

Hay 10 personas que están en una habitación.

**52.** Si $a=6, b=4, c=2$. Simplificar la siguiente expresión:

$$E=[(2a-3b)\div 2c]+\{[8(a-b)\div c]-bc\}.$$

### Datos

$a=6,$
$b=4,$
$c=2.$

### Resolución

Reemplazando datos en la expresión:

$$E=[(2a-3b)\div 2c]+\{[8(a-b)\div c]-bc\}$$
$$=[(2\cdot 6-3\cdot 4)\div(2\cdot 2)]+\{[8(6-4)\div 2]-(4\cdot 2)\}$$

$= [(12 - 12) \div 4] + \{[8(2) \div 2] - 8\}$ operaciones en $\mathbb{Z}$

$= [0 \div 4] + \{[16 \div 2] - 8\}$ operaciones en $0 \div a = 0, \quad a \in \mathbb{Z}$

$= 0 + \{8 - 8\}$ propiedad $a - a = 0, \quad a \in \mathbb{Z}$

$= 0 + 0$

$\Longrightarrow \ E = 0.$

**Respuesta**

La expresión simplificada es 0.

**53.** Alicia sabe que, si $x = 6, y = z = 4, w = 1$ entonces quiere determinar la siguiente expresión:

$$E = \frac{\left\{xyz - \left[\frac{2x + y(z + y)}{w}\right]\right\}}{2w}$$

**Datos**

$x = 6,$
$y = z = 4,$
$w = 1.$

En el problema dado aparece una expresión algebraica, y al evaluarlo con valor numérico se convierte en una expresión aritmética.

**Resolución**

$$E = \frac{\left\{xyz - \left[\frac{2x + y(z + y)}{w}\right]\right\}}{2w}$$

Reemplazando datos

$$= \frac{\left\{6 \cdot 4 \cdot 4 - \left[\frac{2 \cdot 6 + 4(4 + 4)}{1}\right]\right\}}{2 \cdot 1}$$

Operaciones

$$= \frac{\left\{96 - \left[\frac{12 + 4(8)}{1}\right]\right\}}{2}$$

$$= \frac{96 - 44}{2}$$

$$= \frac{52}{2}$$

$$= 26 \quad \Longrightarrow \quad E = 26$$

**Respuesta**

El resultado de la expresión es 26.

**54.** Alex se prepara para un examen de matemática y se pone a resolver la siguiente fracción compuesta:

$$G = -4 + \cfrac{-3}{\cfrac{2}{3}\cfrac{2}{-1 + \cfrac{2}{3 \div \cfrac{-5}{2}}}}$$

## Resolución

Utiliza las propiedades para simplificar dicha fracción.

$$G = -4 + \cfrac{-3}{\cfrac{2}{3}\cdot\cfrac{2}{-1 + \cfrac{2}{3 \div \cfrac{-5}{2}}}}$$

$$= -4 + \cfrac{-3}{\cfrac{2}{3}\cdot\cfrac{2}{-1 + \cfrac{2}{\cfrac{6}{-5}}}}$$

$$= -4 + \cfrac{-3}{\cfrac{2}{3}\cdot\cfrac{2}{-1 + \cfrac{-10}{6}}}$$

$$= -4 + \cfrac{-3}{\cfrac{2}{3}\cdot\cfrac{2}{\cfrac{-6-10}{6}}}$$

$$= -4 + \cfrac{-3}{\cfrac{2}{3}\cdot\cfrac{2}{\cfrac{-16}{6}}}$$

$$= -4 + \cfrac{-3}{\cfrac{2}{3}\cdot\cfrac{12}{-16}}$$

$$= -4 + \cfrac{-3}{\cfrac{1}{-2}}$$

$$= -4 + 6$$

$$= 2$$

**Fracción compuesta:**
Es aquella que contiene una o más fracciones tanto en el numerador o en denominador.

Producto de extremos

$$\cfrac{\cfrac{3}{1}}{\cfrac{-5}{2}} =$$

Producto de medios

$$= \frac{3\cdot 2}{1\cdot(-5)} = \frac{6}{-5}$$

O bien

$$\frac{3}{1} \div \frac{-5}{2} = \frac{3\cdot 2}{1\cdot(-5)} = -\frac{6}{5}$$

**Respuesta**
Por tanto, la operación efectuada de la fracción da 2.

## Divisibilidad y números primos

**55.** Pedro le pregunta a Juana: ¿Sera que el número 8100 es un cuadrado perfecto?

**Propiedad de cuadrado perfecto:**

$$N = \left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}\right)^2$$

***Donde:***

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{Z}^+$, $p, p_2, \cdots, p_k$ son primos.

En particular, el número $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$ es un cuadrado perfecto.

### Resolución

Pedro descompone 8100 en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 8100 & 2 \\ 4050 & 2 \\ 2050 & 3 \\ 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

De donde, obtiene la descomposición factorial o canónica que es:

$$8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$$

Y observa que todos los exponentes son pares en la descomposición canónica, entonces por la propiedad de cuadrado perfecto, concluye

$$8100 = (2 \cdot 3^2 \cdot 5)^2 = 90^2$$

**Respuesta**
El número 8100 es un cuadrado perfecto.

**56.** Miguel quiere verificar si el número 4050 es un cuadrado perfecto.

## Resolución

En principio descompone dicho número en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 4050 & 2 \\ 2050 & 3 \\ 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Un número N no es un cuadrado perfecto si en su descomposición canónica aparece algún primo elevado al exponente impar.

**Por ejemplo:**

$75=3\cdot5^2$

De donde, la descomposición canónica de 4050 es: $4050 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$
Como el exponente del primo 2 es 1 (impar), entonces 4050 no es un cuadrado perfecto.

**Respuesta**

Así, Miguel verifica que el número 4050 no es un cuadrado perfecto.

**57.** Determinar cuántos divisores tiene el número 840.

## Resolución

La forma de descomponer el número 840 en sus factores primos es la siguiente; donde los sucesivos divisores se colocan a la derecha de la línea y debajo los cocientes, es decir:

$$\begin{aligned} 840 \div 2 &= 420 \\ 420 \div 2 &= 210 \\ 210 \div 2 &= 105 \\ 105 \div 3 &= 35 \\ 35 \div 5 &= 7 \\ 7 \div 7 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{array}{r|l} 840 & 2 \\ 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Descomposición canónica (DC) es la descomposición en factores primos de un número.

**Por ejemplo:**

$54=2\cdot3^3$

La cantidad de divisores.

**Por ejemplo:**

$$\begin{aligned} CD(54) &= (1+1)\,(3+1) \\ &= 2\cdot4 \\ &\Rightarrow CD(12)=6. \end{aligned}$$

De donde, la descomposición canónica del número 840 es:

$$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Por la propiedad de cantidad de divisores, se tiene:

$$\begin{aligned} CD(840) &= (3+1)(1+1)(1+1)(1+1) \\ &= 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \\ &\Rightarrow CD(840) = 32 \end{aligned}$$

Se verifica, que los 32 divisores son:

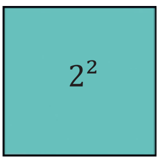
1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14,15,20,21,24,28,30,35,40,42,56,60,70,84,105,120,140, 168,210,280,420,840.

**Respuesta**

La cantidad de divisores de 840 es 32.

**58.** La maestra de matemática les pide, a Sandra y Paulo, verificar si los números 1728 y 1620 son cubos perfecto.

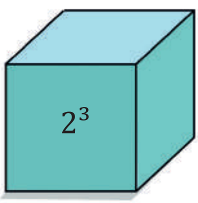
Cuadrado perfecto:
Cuadrado de lado 2




Área del cuadrado:

$A = 2 \cdot 2 = 2^2\ [u^2]$

Cubo perfecto:
Cubo de lado 2




Volumen del cubo:

$V = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3\ [u^3]$

**Resolución**

Sandra descompone el número 1728 en factores primos, mientras que Paulo en el otro lado también descompone el número 1620 en factores primos:

| | |
|---|---|
| 1728 | 2 |
| 864 | 2 |
| 432 | 2 |
| 216 | 2 |
| 108 | 2 |
| 54 | 2 |
| 27 | 3 |
| 9 | 3 |
| 3 | 3 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 1620 | 2 |
| 810 | 2 |
| 405 | 3 |
| 135 | 3 |
| 45 | 3 |
| 15 | 3 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

De donde, las descomposiciones canónicas de los números dados son

$1728 = 2^6 \cdot 3^3 = (2^2 \cdot 3)^3 = 12^3$

$\Rightarrow\ 1728 = 12^3$

Lo cual es un cubo perfecto.

$1620 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$, entonces 1620 no es un cubo perfecto.

**Respuesta**

Así, 1728 es un cubo perfecto y 1620 no es un cubo perfecto.

**Observación:** De manera similar, se determina para cubos perfectos.

$$N = \left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}\right)^3$$

Donde: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{Z}^+$, $p, p_2, \cdots, p_k$ son primos

Por ejemplo, el número, $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ es un cubo perfecto.

**59.** Juan tiene el número 227, quiere saber si 227 es primo o compuesto.

## Resolución

Por el método para determinar si un número es primo o compuesto, se tiene:

**Paso 1.**

$$\sqrt{227} \Rightarrow 225 = 15^2 < 227 < 16^2 = 256$$

$$\sqrt{227} \approx 15$$

**Paso 2.** $\{2,3,5,7,11,13\} \leq \{15\}$ o bien

$$2,3,5,7,11,13 \leq 15$$

**Paso 3.** $$227 = \begin{cases} 227 = 2 \cdot 113 + 1 \\ 227 = 3 \cdot 75 + 2 \\ 227 = 5 \cdot 45 + 2 \\ 227 = 7 \cdot 32 + 3 \\ 227 = 11 \cdot 20 + 7 \\ 227 = 13 \cdot 17 + 6 \end{cases}$$

**Paso 4.** De donde, 227 no es divisible por ningún número primo en el Paso 2, entonces 227 es un número primo.

**Método para determinar si un número es primo o compuesto:**

Sea: $N \in \mathbb{Z}^+$, $a, b \in \mathbb{Z}$

Paso 1. Se calcula raíz cuadrada aproximada por defecto de *N*:

$$\sqrt{N} \approx a^2 < N < b^2$$

Paso 2.

{números primos}≤{a}

Paso 3. Se determina si *N* es o no divisible por cada uno de los números primos en Paso 2.

Paso 4. Conclusión:

Si *N* no es divisible por ningún número primo en Paso 2, entonces *N* es primo.

Si *N* es divisible por algún número primo en Paso 2, entonces *N* es compuesto.

**Respuesta**

Por tanto, 227 es un número primo.

Intermedio 02

## Potenciación y radicación

**60.** Efectuar las operaciones en la siguiente expresión:

$$E=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}\cdot\frac{3}{2}-\frac{2}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{4}{3}+\frac{3}{4}$$

### Resolución

Para realizar las operaciones se utilizan las propiedades

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad y\quad \sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{a}{b},\qquad a,b\in\mathbb{Z},a\neq 0\; b\neq 0,n\in\mathbb{N}$$

$$E=\sqrt{\frac{1^2}{3^2}-\frac{1^2}{5^2}}\cdot\frac{3}{2}-\frac{2}{5}-\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{4}{3}+\frac{3}{4}$$

$$=\sqrt{\frac{5^2-3^2}{(3\cdot 5)^2}}\cdot\frac{3}{2}-\frac{2}{5}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$$

$$=\sqrt{\frac{25-9}{15^2}}\cdot\frac{3}{2}-\frac{2}{5}-0$$

$$=\sqrt{\frac{4^2}{15^2}}\cdot\frac{3}{2}-\frac{2}{5}$$

$$=\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{2}-\frac{2}{5}$$

$$=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}$$

$$=0$$

$$\Rightarrow\quad E=0$$

**Respuesta**

Por consiguiente, el resultado es 0.

**61.** Racionalizar el denominador, de la siguiente expresión: $R = \dfrac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

## Resolución

Se multiplica por el conjugado del denominador, lo cual es

$$(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}$$

y se efectúa la simplificación, es decir:

$$R = \frac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$

Se efectúa la propiedad $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$= \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{1+2\sqrt{2}+2-3}$$

$$= \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

**Respuesta**

Por consiguiente, el resultado es: $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

**62.** Daniel quiere simplificar la siguiente expresión: $A = \sqrt[5]{7^4\sqrt[3]{7^2\sqrt[4]{7^4}} \cdot 7^{-1}}$

$$A = \sqrt[5]{7^4\sqrt[3]{7^2\sqrt[4]{7^4}} \cdot 7^{-1}} \qquad \text{expresión dada}$$

$$= \sqrt[5]{7^4\sqrt[3]{7^2 \cdot 7} \cdot 7^{-1}} \qquad \sqrt[n]{a^n}=a, \quad a\in\mathbb{Z}^+, n\in\mathbb{N}$$

$$= \sqrt[5]{7^4\sqrt[3]{7^{2+1}} \cdot 7^{-1}} \qquad \text{producto de potencias con igual base}$$

$$= \sqrt[5]{7^4\sqrt[3]{7^3} \cdot 7^{-1}} \qquad \text{operación en exponente}$$

$$= \sqrt[5]{7^4 \cdot 7 \cdot 7^{-1}} \qquad \sqrt[n]{a^n}=a, \quad a\in\mathbb{Z}^+, n\in\mathbb{N}$$

$= \sqrt[5]{7^{4+1}} \cdot 7^{-1}$ producto de potencias con igual base

$= \sqrt[5]{7^{5}} \cdot 7^{-1}$ operación en exponente

$= 7 \cdot 7^{-1}$ $\sqrt[n]{a^n} = a, \quad a \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{N}$

$= 7^{1-1}$ producto de potencias con igual base

$= 7^0 = 1$ $a^0 = 1, a \in \mathbb{Z}^+, a \neq 0$

**Respuesta**

El resultado de la simplificación es 1.

**63.** La maestra de matemática pide simplificar la siguiente expresión:

$$B = \left(3\sqrt{42} + 5\sqrt{18}\right) \cdot \frac{1}{3\sqrt{14}}$$

**Resolución**

$$\begin{aligned}
B &= \left(3\sqrt{42} + 5\sqrt{18}\right) \cdot \frac{1}{3\sqrt{14}} \\
&= \left(3\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7} + 5\sqrt{3^2 \cdot 2}\right) \cdot \frac{1}{3\sqrt{2 \cdot 7}} \\
&= \left(3\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{7} + 5\sqrt{3^2}\sqrt{2}\right) \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt{7}} \\
&= \left(3\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{7} + 5 \cdot 3\sqrt{2}\right) \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt{7}} \\
&= \sqrt{2}\left(3\sqrt{3}\sqrt{7} + 15\right) \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt{7}} \\
&= \left(3\sqrt{3}\sqrt{7} + 15\right) \cdot \frac{1}{3\sqrt{7}} \\
&= \left(3\sqrt{3}\sqrt{7} + 3 \cdot 5\right) \cdot \frac{1}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

racionalizando denominador en el cual se multiplica por $\sqrt{7}/\sqrt{7}$

$$= \frac{3\left(\sqrt{3}\sqrt{7}\sqrt{7} + 5\sqrt{7}\right)}{3 \cdot 7}$$ $\sqrt{7}\sqrt{7} = 7$

$$= \frac{\left(7\sqrt{3} + 5\sqrt{7}\right)}{7}$$

**Respuesta**

Por consiguiente, el resultado es: $\dfrac{\left(7\sqrt{3} + 5\sqrt{7}\right)}{7}$.

## Números decimales y notación científica

**64.** Sumar los números decimales siguientes: 98,765; 146,38; 2,675; 36,4186; 2,3; 158,16.

### Resolución

Para sumar los números decimales, una forma efectiva es colocarlos en columna, es decir

$$\begin{array}{r@{,}l} 98 & 765 \\ 146 & 38 \\ 2 & 675 \\ +\quad 36 & 4186 \\ 2 & 3 \\ 158 & 16 \\ \hline 444 & 6986 \end{array}$$

Para sumar y restar números decimales, se van colocando los sumandos en forma vertical, de manera que las comas queden en la misma columna y a continuación se suman como números enteros, de modo que, en el resultado obtenido la coma aparezca en la misma columna.

**Respuesta**

Por consiguiente, el resultado es de la suma es 444,6986.

**65.** Antes de ir al recreo, Ana quiere determinar la expresión:

$$A = \frac{3{,}5 \times 10^7 + 2{,}3 \times 10^7}{5{,}9 \times 10^5 - 30 \times 10^4}$$

### Resolución

Se realiza la suma, en el numerador y denominador llevándolos a una sola potencia, es decir:

$$A = \frac{3{,}5 \times 10^7 + 2{,}3 \times 10^7}{5{,}9 \times 10^5 - 30 \times 10^4}$$

$$= \frac{(3{,}5 + 2{,}3) \times 10^7}{5{,}9 \times 10^5 - 3 \times 10^5}$$

Note que; $30 \times 10^4 = 3 \times 10^5$

**Suma y resta:**

$$a \times 10^n + b \times 10^n$$

$$=$$

$$(a + b) \times 10^n$$

**Multiplicación y división:**

$$a(b \times 10^n) = (a \cdot b) \times 10^n$$

$$\frac{b \times 10^n}{a} = (b \div a) \times 10^n$$

Donde $a \neq 0$

$$= \frac{5{,}8 \times 10^7}{(5{,}9 - 3) \times 10^5}$$

$$= \frac{5{,}8 \times 10^7}{2{,}9 \times 10^5}$$

$$= (5{,}8 \div 2{,}9) \times 10^{7-5}$$

$$= 2 \times 10^2$$

$$\Rightarrow A = 2 \times 10^2$$

**Respuesta**

El resultado final es $2{\times}10^2$.

**66.** Un ciclista debe recorrer en tres etapas la carretera La Paz - Oruro. En la primera etapa se cubre una distancia de 78,5 kilómetros y la segunda 86,75 kilómetros, si la distancia total que se debe cubrir es de 226 kilómetros. ¿Cuál es la distancia de la última etapa?

*Fuente: Yandex*

**Resolución**

Sean $E_1$, $E_2$ y $E_3$ distancias recorridas por etapa, de modo que

$$E_1 = 78{,}50\ km$$
$$E_2 = 86{,}75\ km$$
$$E_3 = ?\ \ km$$

Se suman las distancias de las primeras dos etapas, es decir:

$$\begin{array}{r} 78{,}50 \\ +\ 86{,}75 \\ \hline 165{,}25 \end{array}$$

Ahora a este resultado se resta a los 226 $km$, es decir:

$$\begin{array}{r} 226{,}00 \\ -\ 165{,}25 \\ \hline 60{,}75 \end{array}$$

De donde la distancia de la tercera etapa es 60,75 $km$.

**Respuesta**

Por tanto, la distancia de la última etapa es 60,75 $km$.

**67.** Determinar el valor de: $R=\sqrt[5]{\dfrac{4.1\times10^{7}+1.9\times10^{7}}{3.5\times10^{-9}-1.625\times10^{-9}}}$

## Resolución

$$R=\sqrt[5]{\frac{41\times10^{6}+19\times10^{6}}{3.5\times10^{-9}-1.625\times10^{-9}}}\qquad \text{transformando exponentes}$$

$$=\sqrt[5]{\frac{(41+19)\times10^{6}}{(3.5-1.625)\times10^{-9}}}\qquad \text{factorización de potencia}$$

$$=\sqrt[5]{\frac{60\times10^{6}}{1.875\times10^{-9}}}\qquad \text{operaciones}$$

$$=\sqrt[5]{\left(\frac{60}{1{,}875}\right)\times10^{6+9}}\qquad \text{definición de la inversa}$$

$$=\sqrt[5]{32\times10^{15}}\qquad \text{operación en exponente}$$

$$=\sqrt[5]{2^{5}}\times10^{\frac{15}{5}}\qquad \text{notación científica}$$

$$=2\times10^{3}\qquad \sqrt[n]{a^{n}}=a,\quad a\in\mathbb{Z}^{+},n\in\mathbb{N}$$

**Respuesta**

Por tanto, el resultado es $2\times10^{3}$.

**68.** Carla quiere determinar el valor de: $B=\sqrt[3]{\dfrac{9{,}91\times10^{3}-3{,}66\times10^{3}}{3{,}25\times10^{10}+1{,}75\times10^{10}}}$

## Resolución

Se efectúan las operaciones dentro del radical y en el numerador se lleva a la misma potencia, es decir:

$$B=\sqrt[3]{\frac{9{,}91\times10^{3}-3{,}66\times10^{3}}{3{,}25\times10^{10}+1{,}75\times10^{10}}}\qquad \text{expresión dada}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{991\times10-366\times10}{325\times10^{8}+175\times10^{8}}}\qquad \text{notación científica}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{(991-366)\times10}{(325+175)\times10^{8}}}\qquad \text{factorización de potencias}$$

$$=\sqrt[3]{\left(\frac{625}{500}\right)\times10^{1-8}}\qquad \text{operación y definición de inversa}$$

$$=\sqrt[3]{1{,}25\times10^{1-8}}\qquad \text{operación}$$

$$=\sqrt[3]{1{,}25\times10^{-7}}\qquad \text{operación en exponente}$$

$$= \sqrt[3]{125 \times 10^{-9}}$$

$$= \sqrt[3]{125} \times 10^{-\frac{9}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{5^3} \times 10^{-\frac{9}{3}}$$

$$= 5 \times 10^{-3}$$

notación científica

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}^+$

$\sqrt[n]{a^n} = a, \quad a \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{N}$

**Respuesta**

Por tanto, el resultado es $5 \times 10^{-3}$.

## Números irracionales y reales

**69.** Realizar la operación con números irracionales $10\sqrt{2};\ 2\sqrt{2};\ -5\sqrt{2}$.

Los números irracionales cumplen la propiedad de clausura solo en la suma.

Por ejemplo

$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} \in I$

$\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \notin I$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \notin I$

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{2}} = \sqrt{1} = 1 \notin I$

### Resolución

Sumando los números irracionales:

$$S = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$

$$= 12\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$

$$= 7\sqrt{2}$$

**Respuesta**

Por consiguiente, la suma de irracionales es un irracional $7\sqrt{2}$.

**70.** Determinar la siguiente operación y ver si el resultado es un número irracional. $R = 3\sqrt{75} - 2\sqrt{48} + 4\sqrt{27} - 18\sqrt{3}$

### Resolución

Descomponiendo en factores primos las cantidades subradicales:

Sumar y restar irracionales algebraicas se simplifica al máximo. El resultado podría ser un número irracional o un número real.

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

De donde, las descomposiciones canónicas son:

$$75 = 5^2 \cdot 3; \quad 48 = 2^4 \cdot 3; \quad 27 = 3^3$$

**Entonces**

$$R = 3\sqrt{75} - 2\sqrt{48} + 4\sqrt{27} - 18\sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{5^2 \cdot 3} - 2\sqrt{2^4 \cdot 3} + 4\sqrt{3^3} - 18\sqrt{3} \qquad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b},\ a, b \in \mathbb{Z}^+$$

$$= 3\sqrt{5^2}\sqrt{3} - 2\sqrt{2^4}\sqrt{3} + 4 \cdot 3\sqrt{3} - 18\sqrt{3} \qquad \sqrt{a^{nm}} = \sqrt{a^n}\sqrt{a^m},\ n, m \in \mathbb{Z}^+$$

$$= 3 \cdot 5\sqrt{3} - 2 \cdot 2^2\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 18\sqrt{3} \qquad \sqrt{a^n} = a^{n/2},\ \sqrt[n]{a^n} = a, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$$= 15\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 18\sqrt{3} \qquad \text{operaciones}$$

$$= 27\sqrt{3} - 26\sqrt{3} \qquad \text{suma de términos semejantes}$$

$$= \sqrt{3}$$

**Respuesta**
La operación simplificada da $\sqrt{3}$, por tanto, $R$ es un numero irracional.

**71.** Racionalizar la siguiente expresión y determinar qué tipo de número es: $\dfrac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

**Resolución**

Se multiplica por el conjugado del denominador, lo cual es $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ y se efectúa la simplificación, es decir:

$$\frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

Diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$= \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2}$$

$$= \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{1} = 3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

**Definición.**
Racionalizar el denominador de un binomio.

$$\frac{c}{a \pm b} = \frac{c}{a \pm b} \cdot \frac{a \mp b}{a \mp b}$$

$$= \frac{c(a \mp b)}{a - b}$$

En donde se multiplica por el conjugado del binomio: $a \pm b$.

**Respuesta**
El resultado es $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$, por tanto, es un número irracional.

**72.** Javier quiere determinar el valor de:

$$R = 3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{375} + 3\sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{2}$$

## Resolución

Descomponiendo en factores primos las cantidades subradicales:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 2 \\ 9 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

De donde, las descomposiciones canónicas son:

$$16 = 2^4 = 2^3 \cdot 2; \quad 54 = 2^3 \cdot 3; \quad 375 = 5^3 \cdot 3$$

Entonces

$$\begin{aligned} R &= 3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{375} + \sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{2} \\ &= 3\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} - 2\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{5^3 \cdot 3} + 3\sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{2} && \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b},\ a,b \in \mathbb{Z}^+ \\ &= 3\sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{3} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{5^3}\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{2} && \sqrt[n]{a^n} = a \\ &= 3 \cdot 2\sqrt[3]{2} - 2 \cdot 2\sqrt[3]{3} + \frac{1}{5} \cdot 5\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{2} && \text{operaciones} \\ &= 6\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{2} && \text{asociando términos semejantes} \\ &= \left(6\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2}\right) + \left(-4\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Respuesta**
El valor de $R$ es $0$.

## Razones, proporciones y porcentajes

**73.** En un instituto de investigación matemática, se resuelven problemas de modo que la cantidad de problemas resueltos por Andrés excede en 12 a los problemas resueltos por Bertha y la cantidad de problemas resueltos por Celia es excedida en 5 por los problemas resueltos por Bertha. En ese orden, determinar el valor de la razón aritmética entre la cantidad de problemas resueltos por Andrés y Celia.

## Resolución

Sean

*A:* la cantidad de problemas resueltos por Andrés.
*B:* la cantidad de problemas resueltos por Bertha.
*C:* la cantidad de problemas resueltos por Celia.
Del problema, se tiene:

Si $\boldsymbol{A}$ excede a $\boldsymbol{B}$ en 12 $\Longrightarrow A - B = 12.$

Si $\boldsymbol{B}$ excede a $\boldsymbol{C}$ en 5 $\Longrightarrow B - C = 5.$

Al sumar, se obtiene

$$+\begin{array}{l} A - B = 12 \\ \underline{B - C = 5} \\ A - C = 17 \end{array}$$

La cantidad de problemas resueltos por Andrés excede en 17 a los problemas resueltos por Celia.

La razón aritmética: es la comparación entre dos cantidades mediante la sustracción.

$$a - b = r$$

**Donde:**
*a:* antecente
*b:* consecuente
*r:* razón aritmética

**Interpretación:**
Si $a$ excede a $b$ en 12

$$\Updownarrow$$

$$a - b = r$$

**Respuesta**
La razón aritmética entre la cantidad de problemas resueltos por Andrés y Celia es 17.

*Fuente: UMSA - Instituto de investigación matemática*

**74.** En una unidad educativa hay 650 estudiantes, el 28% de ellos van en minibús y el resto en bus escolar. ¿Cuántos estudiantes van a la unidad educativa en bus escolar?

## Resolución

### Datos:

$T = 650$ (estudiantes)
$M = 28\%$ (van en minibús)
$B = ?$ (van en bus escolar)

*Fuente: Tierra plus Bolivia*

En principio se calcula el número de estudiantes que van en minibús $(N_M)$, es decir:

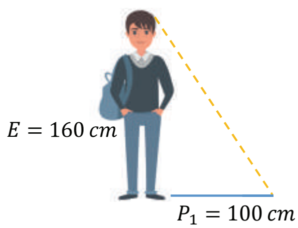
$$28\% \text{ de } 650 \Rightarrow N_M = 28\% \cdot 650$$
$$= \frac{28}{100} \cdot 650$$
$$= 182 \Rightarrow N_M = 182$$

Ahora calculamos el número de estudiantes que van en bus escolar, para ello, usamos la operación de resta. Como hay 650 estudiantes en total, solo hay que restar el número de estudiantes que van en minibús, es decir:

$$B = 650 - 182 = 468 \implies B = 468$$

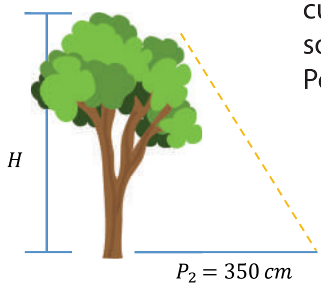
**Respuesta**
A la unidad educativa van 468 estudiantes en bus escolar.

**75.** Si Carlos tiene una estatura de 160 $cm$ que proyecta una sombra de 100 $cm$, ¿qué altura tendrá un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 350 cm?




**Resolución**
**Datos:**

$E$ = 160 $cm$ (estatura de Carlos)
$P_1$ = 100 $cm$ (altura que proyecta Carlos)
$P_2$ = 350 $cm$ (la sombra que proyecta el árbol)
$H$ = ? altura del árbol




En el problema se identifican dos magnitudes, los cuales son la longitud normal y la longitud de la sombra, estas son directamente proporcionales. Por datos, se tiene la proporción siguiente:

$$\frac{E}{P_1} = \frac{H}{P_2} \implies H = \frac{E \cdot P_2}{P_1}$$

Reemplazando datos

$$\implies H = \frac{160 \cdot 350}{100}$$

$$= 560$$

$$\implies H = 560\ cm.$$

**Respuesta**
La altura del árbol es de 560 $cm$, es decir, 5,6 metros.

## Ecuaciones

**76.** La maestra de matemática pide a sus estudiantes que resuelvan la ecuación lineal $(x+a)^2+b=(c-x)^2$, donde $a, b, c$ pertenecen a los números reales.

### Resolución

La maestra les da un consejo: "desarrollemos el cuadrado de un binomio primero y así poder despejar $x$, para así efectuar las operaciones correspondientes".

$$(x+a)^2+b=(c-x)^2 \Longrightarrow x^2+2\cdot x\cdot a+a^2+b=c^2-2\cdot c\cdot x+x^2$$

propiedad cuadrado de un binomio $\forall a,b\in\mathbb{R}, \boxed{(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2}$

$$\Longrightarrow x^2+2ax+a^2+b=c^2-2cx+x^2$$

$$\Longrightarrow 2ax+a^2+b=c^2-2cx$$ simplificando términos semejante

$$\Longrightarrow 2ax+2cx=c^2-a^2-b$$ agrupando términos semejantes

$$\Longrightarrow (2a+2c)x=c^2-a^2-b$$ factorizando términos semejantes

$$\Longrightarrow x=\frac{c^2-a^2-b}{(2a+2c)}$$ propiedad $\forall a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0, \boxed{ab=c\Longrightarrow b=\frac{c}{a}}$

$$\Longrightarrow x=\frac{c^2-a^2-b}{2(a+c)}$$ factorizando términos semejantes

$$\Longrightarrow x=\frac{-(a^2-c^2)-b}{2(a+c)}$$ factorizar el signo $\forall a,b,c\in\mathbb{R}, \boxed{(a-b)=-(b-a)}$

$$\Longrightarrow x=\frac{-(a^2-c^2)}{2(a+c)}-\frac{b}{2(a+c)}$$

descomposición $\forall a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0, \boxed{\frac{a\pm c}{b}=\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}}$

$$\Longrightarrow x=\frac{-(a-c)\cdot(a+c)}{2(a+c)}-\frac{b}{2(a+c)}$$

por diferencia de cuadrados $\forall a,b\in\mathbb{R}, \boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$

$$\Longrightarrow x=\frac{-(a-c)}{2}-\frac{b}{2(a+c)}$$

ley de simplificación $\forall a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0, \boxed{\frac{ab}{b}=a}$

$$\Longrightarrow x=\frac{c-a}{2}-\frac{b}{2(a+c)}$$

distribución del signo $\forall a,b,c\in\mathbb{R}, \boxed{-(b-a)=(a-b)}$

**Respuesta**
El grupo de estudiantes dijo que el valor de $x$ es $\dfrac{c-a}{2} - \dfrac{b}{2(a+c)}$ para $2(a+c) \neq 0$

**77.** Ana y María compiten por quién resuelve más rápido la ecuación lineal $\dfrac{5x}{x-3} + \dfrac{4}{x+3} = \dfrac{90}{x^2-9}$ para $x \neq \{3\}$.

## Resolución

$$\frac{5x}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{90}{x^2-9} \Longrightarrow \frac{5x(x+3)+4(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{90}{x^2-3^2}$$ sacando el m.c.d.

$$\Longrightarrow \frac{5\cdot x\cdot x+5\cdot x\cdot 3+4\cdot x-4\cdot 3}{(x-3)(x+3)} = \frac{90}{x^2-3^2}$$

propiedad distributiva $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \boxed{a(b+c) = ab+ac}$

$$\Longrightarrow \frac{5x^2+15x+4x-12}{(x-3)(x+3)} = \frac{90}{x^2-3^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{5x^2+15x+4x-12}{x^2-3^2} = \frac{90}{x^2-3^2}$$

por diferencia de cuadrados $\forall a, b \in \mathbb{R}, \boxed{a^2-b^2 = (a-b)(a+b)}$

$$\Longrightarrow 5x^2 + 15x + 4x - 12 = 90$$

ley de simplificación $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0, \boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \Longrightarrow \mathrm{a} = \mathrm{c}}$

$$\Longrightarrow 5x^2 + 19x - 12 - 90 = 0$$

$$\Longrightarrow 5x^2 + 19x - 102 = 0$$

Notemos que para una ecuación de segundo grado es conveniente usar la fórmula de la ecuación cuadrática dada por:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Donde: $a = 5$, $b = 19$ y $c = -102$
Reemplazando:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Longrightarrow x = \frac{-19\pm\sqrt{(-19)^2-4\cdot(5)\cdot(-102)}}{2\cdot 5}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-19\pm\sqrt{19^2+2040}}{10}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-19\pm\sqrt{361+2040}}{10}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-19\pm\sqrt{2401}}{10}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-19 \pm \sqrt{(49)^2}}{10}$$ expresando en su forma cuadrática

$$\Longrightarrow x = \frac{-19 \pm 49}{10}$$

*Fuente: Periódico Los tiempos*

Por lo tanto, las soluciones serán:

$$x = \begin{cases} \dfrac{-19+49}{10} = \dfrac{30}{10} = 3 \\ \dfrac{-19-49}{10} = -\dfrac{68}{10} = -\dfrac{34}{5} \end{cases}$$

**Respuesta**

Ana gana la competencia determinando que la única solución es: $x_1 = -\dfrac{34}{5}$

**78.** Julia quiere resolver la ecuación $4x^2 - 12x - 11 = 0$, usando el método: completando cuadrados.

## Resolución

Julia recuerda que la forma de completar cuadrados en una ecuación cuadrática se hace de la siguiente manera:

$$x^2 \pm bx + c = 0 \Longrightarrow x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$$

Despejamos la variable x, y resolvamos el problema con las especificaciones dadas:

$$4x^2 - 12x - 11 = 0 \Longrightarrow x^2 - \frac{12}{4}x - \frac{11}{4} = 0$$ despejamos la variable $x^2$

$$\Longrightarrow x^2 - 3x - \frac{11}{4} = 0$$

Donde: $b = -3$ y $c = -\dfrac{11}{4}$

$$x^2 - 3x - \frac{11}{4} = 0 \Longrightarrow x^2 - 3x + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{4}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4} - \frac{9}{4} = 0$$

**Nota:** Todo número negativo elevado al cuadrado se vuelve positivo, es decir:

$\forall a \in \mathbb{R}, a < 0, \boxed{a^2 > 0}$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{20}{4} = 0$$
$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{20}{4}$$
$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 5$$

teorema $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0, \boxed{a^2 = b \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{b}}$

$$\Rightarrow x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{5} + \frac{3}{2}$$

**Respuesta**

Así Julia encuentra los valores $x = +\sqrt{5} + \frac{3}{2}$ o $x = -\sqrt{5} + \frac{3}{2}$

**79.** El maestro de matemática dice a sus estudiantes que encuentren por cualquier método, solo el valor de $x$, en el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

## Resolución

Uno de sus estudiantes usa el método de sustitución y dice tomamos una ecuación, despejamos una variable y la remplazamos.

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \ldots\ldots (1) \\ x + y = 3 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Aprovechemos que la ecuación (1) ya está despejada, entonces reemplazamos en ecuación (2)

$$x + y = 3 \Rightarrow x + x^2 + 1 = 3$$
$$\Rightarrow x^2 + x + 1 - 3 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

Sea $a = 1$, $b = 1$ y $c = -2$ , reemplazando en la fórmula general:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se tendrá

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\Longrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{3^2}}{2}$$ expresando 9 en su forma exponencial $3^2$

$$\Longrightarrow x=\frac{-1\pm 3}{2}$$ definición $\forall a\in\mathbb{R},\ \boxed{\sqrt{a^2}=a}$

$$\Longrightarrow x=\frac{-1+3}{2}\ \text{o}\ x=\frac{-1-3}{2}$$

$$\Longrightarrow x=\frac{2}{2}\ \text{o}\ x=-\frac{2\cdot 2}{2}$$

$$\Longrightarrow x=1\ \text{o}\ x=-2$$ ley de simplificación $\forall a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0,\ \boxed{\frac{ab}{b}=a}$

**Respuesta**

Así los valores son: $x=1$ o $x=-2$

**80.** Jorge le dice a Joel: "sean $a$, $b$ reales cuales quiera y ambos distintos de cero, determina los valores de $x$, $y$ en el sistema de ecuaciones"

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=3\\[2mm] \dfrac{x}{2a}-\dfrac{3y}{b}=-2\end{cases}$$

## Resolución

Joel resuelve el sistema de ecuaciones usando el método de eliminación, así que veamos qué variable es conveniente cancelar.

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=3\\[2mm] \dfrac{x}{2a}-\dfrac{3y}{b}=-2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=3 \quad //(\cdot 3)\\[2mm] \dfrac{x}{2a}-\dfrac{3y}{b}=-2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x}{a}+\dfrac{3y}{b}=3\cdot 3 \ldots\ldots (1)\\[2mm] \dfrac{x}{2a}-\dfrac{3y}{b}=-2 \ldots\ldots (2)\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{3x}{a}+\frac{x}{2a}+\frac{3y}{b}-\frac{3y}{b}=9-2$$ sumando (1) y (2)

$$\Longrightarrow \frac{3x}{a}+\frac{x}{2a}=7$$

$$\Longrightarrow x\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{2a}\right)=7$$ factorizando la variable $x$

$$\Longrightarrow x\left(\frac{3\cdot 2+1}{2a}\right)=7$$ sacando el m.c.d.

$$\Longrightarrow x\cdot\frac{7}{2a}=7$$

$\Longrightarrow x = 7 \cdot \dfrac{2a}{7}$ propiedad $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0,$ $\boxed{au = b \rightarrow u = \frac{b}{a}}$

$\Longrightarrow x = 2a \ldots (3)$ simplificando términos semejantes

Reemplazando ecuación (3) en ecuación (1)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 3 \Longrightarrow \frac{2a}{a} + \frac{y}{b} = 3$$

$\Longrightarrow 2 + \dfrac{y}{b} = 3$ simplificando términos semejantes

$\Longrightarrow 2 + \dfrac{y}{b} - 2 = 3 - 2 = 1$ sumando a ambos miembros (-2)

$\Longrightarrow \dfrac{y}{b} = 1$

$\Longrightarrow y = 1 \cdot b$ propiedad $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0,$ $\boxed{au = b \rightarrow u = \frac{b}{a}}$

$\Longrightarrow y = b$

**Respuesta**
Así Joel le dice a Jorge que el valor de $x$ es $2a$, y el valor de $y$ es $b$.

## Factorización

**81.** Ana quiere factorizar la expresión: $(x - y)^3 - (x + y)^3$

### Resolución

Ana nota que ambos términos están elevados al cubo, por tanto, desarrolla diferencia de cubos.

$$(x - y)^3 - (x + y)^3$$

$$\Longrightarrow \big((x - y) - (x + y)\big) \cdot \big((x - y)^2 + (x - y) \cdot (x + y) + (x + y)^2\big)$$

diferencia de cubos $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a \cdot b + b^2)$

$$\Longrightarrow (x - y - x - y) \cdot (x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - y^2 + x^2 + 2xy + y^2)$$

aplicamos trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados

reduciendo términos semejantes

$$\Longrightarrow (-2y) \cdot (3x^2 + y^2)$$

**Respuesta**
Ana factoriza la expresión: $(-2y) \cdot (3x^2 + y^2)$

**82.** Factorizar la expresión:

$$\underbrace{(5x + 5x + \cdots + 5x)}_{m\text{-veces}} + \underbrace{(x + x + \cdots x)}_{m\text{-veces}} + \underbrace{(mx + mx + \cdots + mx)}_{m\text{-veces}}$$

## Resolución

Factoricemos términos semejantes.

$$\Longrightarrow (5x + 5x + \cdots + 5x) + (x + x + \cdots x) + (mx + mx + \cdots + mx)$$

$$\Longrightarrow 5(x + x + \cdots + x) + x(1 + 1 + \cdots + 1) + mx(1 + 1 + \cdots + 1)$$

factorizando términos semejantes

Como $(1{+}1{+}\cdots{+}1)$ es una suma de m veces entonces:

$$(1 + 1 + \cdots + 1) = m$$

$$\Longrightarrow 5xm + xm + mxm$$

$$\Longrightarrow xm(5 + 1 + m) \Longrightarrow xm(6 + m)$$

**Respuesta**

La factorización resulta: $xm(6 + m)$

**83.** Damián le pide ayuda a su hermano para factorizar la expresión:

$$\frac{x + 2 - \dfrac{3}{x + 4}}{\dfrac{x}{x + 4} + \dfrac{1}{x + 4}}$$

## Resolución

Su hermano le aconseja sacar el máximo como divisor y efectuar las operaciones que nos queden.

$$\frac{x + 2 - \dfrac{3}{x + 4}}{\dfrac{x}{x + 4} + \dfrac{1}{x + 4}} \Longrightarrow \frac{\dfrac{(x + 4)(x + 2) - 3}{x + 4}}{\dfrac{x + 1}{x + 4}}$$ sacando el m.c.d

$$\Longrightarrow \frac{\dfrac{x^2 + 2x + 4x + 8 - 3}{x + 4}}{\dfrac{x + 1}{x + 4}}$$ distribuyendo

$$\Longrightarrow \frac{\dfrac{x^2 + 6x + 5}{x + 4}}{\dfrac{x + 1}{x + 4}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\dfrac{(x + 5)(x + 1)}{x + 4}}{\dfrac{x + 1}{x + 4}}$$ factorizando

$$\Longrightarrow \frac{(x + 5)(x + 1)(x + 4)}{(x + 1)(x + 4)}$$ Simplificando

$$\Longrightarrow \quad x+5$$

**Respuesta**

Damián factoriza la expresión como: $x+5$

**84.** Juana descansa en el recreo, mientras quiere resolver el problema de matemática que dice: "sean $a, b \in \mathbb{R}$ y distintos de cero, factorizar la expresión dada por: $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$"

## Resolución

Primero tomemos las variables de inversos como fracciones.

$$(a^{-1}+b^{-1})^{-1} \Longrightarrow \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}$$

propiedad del inverso multiplicativo, $\forall a \in \mathbb{R}, \exists a^{-1}, \boxed{a^{-1}=\frac{1}{a}}$

$$\Longrightarrow \left(\frac{a+b}{ab}\right)^{-1}$$ sacando el m.c.d.

$$\Longrightarrow \frac{ab}{a+b}$$ propiedades de exponentes $\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0 \; \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}}$

**Respuesta**

La factorización es: $\dfrac{ab}{a+b}$

**85.** Factorizar la expresión dada por:

$$(x^2+1)^{\frac{3}{2}}(4)(x+5)^3+(x+5)^4\left(\frac{3}{2}\right)(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(2x)$$

## Resolución

Factorizar agrupando término por término.

$$(x^2+1)^{\frac{3}{2}}(4)(x+5)^3+(x+5)^4\left(\frac{3}{2}\right)(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(2x)$$

$$\Longrightarrow \left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)^3(4)(x+5)^3+(x+5)^4\left(\frac{3}{2}\right)(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(2x)$$

propiedad de multiplicación de exponentes $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \boxed{\left(a^b\right)^c=a^{bc}}$

$$\Longrightarrow \left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}(4)(x+5)^3 + (x+5)^3(x+5)(\tfrac{3}{2})(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(2x);$$

descomponiendo términos

$$\Longrightarrow (x+5)^3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(4)\left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + (x+5)^3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x+5)(\tfrac{3}{2})(2x);$$

$$\Longrightarrow \left[(x+5)^3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]\left[(4)\left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + (x+5)\left(\frac{3}{2}\right)(2x)\right] \quad \text{factorizando}$$

$$\Longrightarrow \left[(x+5)^3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]\left[(4)(x^2+1)^{\frac{2}{2}} + (x+5)\left(\frac{3\cdot 2}{2}\right)(x)\right]$$

$$\Longrightarrow \left[(x+5)^3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]\left[4(x^2+1) + (x+5)3x\right]$$

$$\Longrightarrow \left[(x+5)^3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]\left[4x^2+4+3x^2+15x\right]$$

$$\Longrightarrow \left[(x+5)^3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]\left[7x^2+15x+4\right]$$

**Respuesta**

La factorización es: $\left[(x+5)^3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[7x^2+15x+4\right]$

## Inecuaciones

**86.** Antes de salir al parque a jugar, Paola quiere hallar el conjunto solución de la inecuación: $x^2 \geq 5$

### Resolución

Resolverá el ejercicio de una manera ingeniosa.

$x^2 \geq 5 \Longrightarrow x^2 - 5 \geq 5 - 5$ — sumando a cada miembro $(-5)$

$\Longrightarrow x^2 - 5 \geq 0$ — cancelando términos semejantes

$\Longrightarrow x^2 - \sqrt{5^2} \geq 0$ — reinterpretación de un número $\forall a \in \mathbb{R}, \boxed{a = \sqrt{a^2}}$

$\Longrightarrow x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 \geq 0$

propiedad de multiplicación de exponentes $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \boxed{\left(a^b\right)^c = a^{b\cdot c}}$

$\Longrightarrow (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) \geq 0$

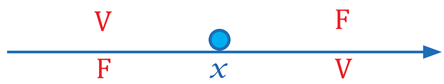
Ahora evaluamos los puntos críticos.

$$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) \geq 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} x-\sqrt{5}=0 \\ x+\sqrt{5}=0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \end{array}$$

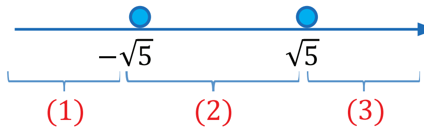
Es de multiplicidad impar si es de la forma: $(x \pm a)^{2n+1}$ donde $n \in \mathbb{N}$.

Recordemos si la raíz es de multiplicidad impar, entonces los valores de verdad de los intervalos adyacentes son diferentes, es decir:




donde $\forall x \in \mathbb{R}$. En resumen, los valores de verdad se intercalan ya sea V, F o F, V.

Situemos los puntos críticos $\{x = \sqrt{5}, x = -\sqrt{5}\}$ en la recta real.




Tomemos un valor de cualquier intervalo y como es de multiplicidad impar en el siguiente intervalo se intercalará hasta hacer el análisis en el siguiente punto crítico, es decir:

Sea $3 \in [\sqrt{5}, +\infty)$, entonces evaluemos 3 en la inecuación y veamos su valor de verdad.

$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) \geq 0 \Longrightarrow (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})$$

$$\Longrightarrow 4 \geq 0 \quad \text{afirmación verdadera (V)}$$

Entonces como todos son de multiplicidad impar se intercalarán los valores de verdad en V, F, V, es decir:


Solo nos interesa donde son verdaderos los valores de verdad, así el conjunto solución están en los intervalos:

$$(-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty)$$

**Respuesta**

Paola encuentra el conjunto solución:

$$C_s = \{ x \in (-, \infty - \sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty) \};$$

**87.** Javier quiere encontrar el conjunto solución de la inecuación:

$$x^3 > x^2$$

## Resolución

Antes de resolver el ejercicio, Javier observa que no se debe pasar a dividir la variable $x^2$, pues nó sabe si es positivo o negativo, es lo que se quiere determinar. Dicho esto, resuelve el ejercicio.

$$x^3 > x^2 \Longrightarrow x^3 - x^2 > 0$$

$$\Longrightarrow x^2(x-1) > 0 \quad \text{factorizando términos semejantes}$$

Ahora evalúa los puntos críticos de la inecuación $x^2(x-1) > 0$, para así situarlos en la recta real.

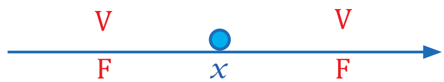
$$x^2(x-1) > 0 \Longrightarrow x^2 = 0 \quad \text{(multiplicidad par)}$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{(multiplicidad impar)}$$

$$\Longrightarrow x = 0$$

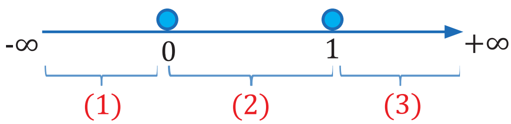
$$x = 1$$

Es de multiplicidad par si es de la forma: $(x \pm a)^{2n}$ donde $n \in \mathbb{N}$. Recordemos que si la raíz es de multiplicidad par, entonces los valores de verdad de los intervalos adyacentes son iguales, es decir:




$\forall x \in \mathbb{R}$. En resumen, los valores de verdad no se intercalan ya sea V, V o F, F.

Situemos los puntos críticos $\{x = 0, x = 1\}$ en la recta real.




Tomemos un valor de cualquier intervalo y como es de multiplicidad par en el siguiente intervalo se intercalará hasta hacer el análisis en el siguiente punto crítico, es decir:

Sea $2 \in [1, +\infty)$, entonces evaluemos 2 en la inecuación y veamos su valor de verdad.

$$x^2(x-1) > 0 \Longrightarrow 2^2(2-1) > 0$$

$$\Longrightarrow 4 > 0 \quad \text{afirmación verdadera (V)}$$

Entonces, como es de multiplicidad impar en 1, se intercalarán los valores de verdad en F, V hasta el siguiente punto crítico que es de multiplicidad par en 0, no se intercala, es decir:


Solo nos interesa donde son verdaderos los valores de verdad, así el conjunto solución está en el intervalo: $(1,+\infty)$

**Respuesta**

Javier encuentra el conjunto solución: $C_s = \{x; x \in (1, +\infty)\}$

**88.** Determinar el conjunto solución de la inecuación con valor absoluto:

$$|2x + 1| \leq 3x + 2$$

## Resolución

Empecemos aplicando la desigualdad de valor en la inecuación.

$$|2x + 1| \leq 3x + 2 \Longrightarrow \underbrace{-(3x + 2) \leq 2x + 1}_{(1)} \overbrace{\leq 3x + 2}^{(2)}$$

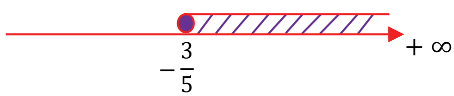
Resolvamos el caso (1) de la inecuación.

$$-(3x + 2) \leq 2x + 1 \Longrightarrow -3x - 2 \leq 2x + 1$$

$$\Longrightarrow -1 - 2 \leq 2x + 3x \Longrightarrow -3 \leq 5x$$

$$\Longrightarrow -\frac{3}{5} \leq x$$ por la propiedad $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ si\ a > 0, \boxed{ab > c \longrightarrow b > \frac{c}{a}}$

Gráficamente:

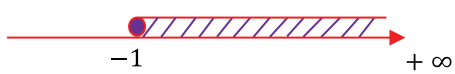



Resolvamos el caso (2) de la inecuación.

$$2x + 1 \leq 3x + 2 \Longrightarrow 1 - 2 \leq 3x - 2x$$

$$\Longrightarrow -1 \leq x$$

Gráficamente:



Los elementos del conjunto solución tienen que satisfacer el caso $(1)$ y $(2)$, por tanto los elementos que cumplan ambos casos será la, intersección del conjunto solución $(1)$ y $(2)$.
El conjunto solución será:

$$[-1,+\infty)\cap\left[-\frac{3}{5},+\infty\right)=\left[-\frac{3}{5},+\infty\right)$$

**Respuesta**
El conjunto soluciones es: $C_s=\left\{x;\, x\in\left[-\frac{3}{5},+\infty\right)\right\}$

**89.** Hallar el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{x-2}{x-4}<\frac{x+5}{x+3}$$

## Resolución

Como ya lo dijimos antes no es conveniente despejar el denominador si depende de una variable, pues no nos garantiza si es positivo o negativo por tanto procedamos de la manera tradicional despejando un lado dé la inecuación.

$$\frac{x-2}{x-4}<\frac{x+5}{x+3}\Longrightarrow\frac{x-2}{x-4}-\frac{x+5}{x+3}<0$$ despejando un lado de la inecuación

$$\Longrightarrow\frac{(x-2)(x+3)-(x+5)(x-4)}{(x-4)(x+3)}<0$$ sacando el m.c.d.

$$\Longrightarrow\frac{x^2+3x-2x-6-(x^2-4x+5x-20)}{(x-4)(x+3)}<0$$

propiedad distributiva $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\ \boxed{a(b-c)=ab-ac}$

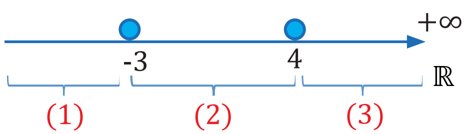
$$\Longrightarrow\frac{x^2+x-6-x^2-x+20}{(x-4)(x+3)}<0$$

$$\Longrightarrow\frac{14}{(x-4)(x+3)}<0$$

Los únicos puntos críticos de la inecuación serían: $(x-4)(x+3)>0$.

$$(x-4)(x+3)>0\Longrightarrow \begin{aligned} x-4&=0\\ x+3&=0 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x&=4\\ x&=-3 \end{aligned}$$

Los situamos en la recta real $\mathbb{R}$.



Notemos que ambos puntos críticos son de multiplicidad impar, por tanto, se intercalarían en los valores de verdad, ya sean V, F o F, V. Tomemos un punto cualquiera de los intervalos para hacer el análisis en los valores de verdad.

Sea $5 \in (4, +\infty)$ remplazamos tal valor en la inecuación original:

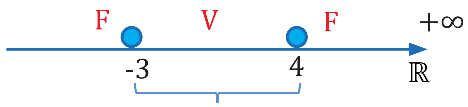
$$\frac{14}{(x-4)(x+3)} < 0 \Longrightarrow \frac{14}{(5-4)(5+3)} < 0$$

$$\Longrightarrow \frac{14}{(1)(8)} < 0$$

$\Longrightarrow \frac{7}{4} < 0$ sacando mitades

$\Longrightarrow 1.75 < 0$ afirmación falsa (F)

Así podemos afirmar:




Conjunto solución será: (-3, 4)

**Nota:** Los puntos críticos que están en el denominador siempre serán puntos abiertos en una inecuación, al situarlos en la recta real $\mathbb{R}$.

**Respuesta**

El conjunto solución es: $C_s = \{x; x \in (-3,4)\}$

## Función exponencial y logarítmica

**90.** La maestra de matemática le deja de tarea a Wendy la ecuación logarítmica: $\log x - \log(x-2) = \log 2$

### Resolución

Wendy agrupa los logaritmos por términos semejantes, para así poder efectuar las definiciones de logaritmo.

$$\log x - \log(x-2) = \log 2 \Longrightarrow \log \frac{x}{(x-2)} = \log 2$$

teorema $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0,\ a \neq 0, M, N > 0,$ $\boxed{\log_a M - \log_a N = \log_a \left(\frac{M}{N}\right)}$

$$\Longrightarrow \frac{x}{(x-2)} = 2$$

propiedad $\forall a \in \mathbb{R}, a > 1,$ y $M, N > 0,$ $\boxed{\mathrm{Log}_a M = \log_a N \Longrightarrow M = N}$

$\Longrightarrow x = 2(x-2)$ propiedad $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0,$ $\boxed{au = b \to u = \frac{b}{a}}$

$\Longrightarrow x = 2x - 4$ propiedad distributiva

$$\Longrightarrow x - x + 4 = 2x - 4 - x + 4$$
$$\Longrightarrow x - x + 4 = 2x - x + 4 - 4$$
$$\Longrightarrow 4 = x$$

**Respuesta**

Así Wendy encuentra el valor de: $x = 4$

**91.** Resuelva la ecuación logarítmica dada por:

$$\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{3}{4}$$

## Resolución

Hagamos un cambio de base y veamos qué se puede desarrollar.

$$\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{3}{4} \Longrightarrow \frac{\log x}{\log a} - \frac{\log x}{\log a^2} + \frac{\log x}{\log a^4} = \frac{3}{4}$$

cambio de base $\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 1$, y $M, N > 0$ $\boxed{\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}}$

$$\Longrightarrow (\log x)\left(\frac{1}{\log a} - \frac{1}{\log a^2} + \frac{1}{\log a^4}\right) = \frac{3}{4}$$ factorizando términos semejantes

$$\Longrightarrow (\log x)\left(\frac{1}{\log a} - \frac{1}{2\log a} + \frac{1}{4\log a}\right) = \frac{3}{4}$$

teorema $\forall a, \in \mathbb{R}, a, > 1$, y $M, N > 0$, $\boxed{\log_b M^n = n \log_b M}$

$$\Longrightarrow (\log x) \cdot \frac{1}{\log a}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow (\log x) \cdot \frac{1}{\log a}\left(\frac{4 - 2 + 1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$ sacando el m.c.d.

$$\Longrightarrow (\log x) \cdot \frac{1}{\log a}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow (\log x) \cdot \frac{1}{\log a} = 1$$ propiedad $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{ab = cb \rightarrow a = c}$

$$\Longrightarrow \log x = \log a$$ propiedad $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $\boxed{u = \frac{b}{a} \rightarrow au = b}$

$$\Longrightarrow x = a;$$

propiedad $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0$, y $M, N > 0$, $\boxed{\mathrm{Log}_a M = \log_a N \Longrightarrow M = N}$

**Respuesta**

El valor de $x$ es $a$.

**92.** Lidia quiere resolver la ecuación exponencial:

$$3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3=0$$

## Resolución

Resolveremos el problema de una manera diferente, pero antes expresemos los términos en su forma exponencial.

$$3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3=0 \Longrightarrow 3\sqrt[x]{9^2}-10\sqrt[x]{9}+3=0$$

expresado en su forma exponencial

$$\Longrightarrow 3\left(\sqrt[x]{9}\right)^2-10\sqrt[x]{9}+3=0$$

propiedad de multiplicación de exponentes $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\ \boxed{\left(a^b\right)^c=a^{bc}}$

Hagamos un cambio de variable en $\sqrt[x]{9}$ tal que $u=\sqrt[x]{9}$.

$$\begin{aligned}
3\left(\sqrt[x]{9}\right)^2-10\sqrt[x]{9}+3=0 &\Longrightarrow 3u^2-10u+3=0\\
&\Longrightarrow 3u^2-10u+3=0\\
&\Longrightarrow (3u-1)(u-3)=0\\
&\Longrightarrow 3u-1=0 \text{ o } u-3=0\\
&\Longrightarrow 3u=1 \text{ o } u=3\\
&\Longrightarrow u=\tfrac{1}{3} \text{ o } u=3
\end{aligned}$$

Volvamos a reemplazar el valor de $u$ que es igual a $\sqrt[x]{9}$.

$$u=\frac{1}{3} \text{ o } u=3 \Longrightarrow \sqrt[x]{9}=\frac{1}{3} \text{ o } \sqrt[x]{9}=3$$

$\Longrightarrow \sqrt[x]{3^2}=3^{-1}$ o $\sqrt[x]{3^2}=3$ expresado en su forma exponencial

$\Longrightarrow (3^2)^{\frac{1}{x}}=3^{-1}$ o $(3^2)^{\frac{1}{x}}=3$ propiedad $\forall a,b,c\in\mathbb{N},\ \boxed{a^{\frac{b}{c}}=\sqrt[c]{a^b}}$

$\Longrightarrow 3^{\frac{2}{x}}=3^{-1}$ o $3^{\frac{2}{x}}=3$ propiedad $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\ \boxed{\left(a^b\right)^c=a^{bc}}$

$\Longrightarrow \frac{2}{x}=-1$ o $\frac{2}{x}=1$ teorema $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\ \boxed{a^b=a^c\Longrightarrow b=c}$

$\Longrightarrow -2=x$ o $2=x$ despejando $x$

**Respuesta**

Lidia encuentra los valores de $x$ que son: $x=-2$ o $x=2$

**93.** Determine los valores de $x$ en la ecuación logarítmica dada por:

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2 = 1$$

## Resolución

Hagamos un cambio de base y veamos qué se puede agrupar.

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2 = 1 \Longrightarrow \frac{\log(x+12)}{\log 4}\cdot\frac{\log 2}{\log x} = 1$$

propiedad $\forall a,b\in\mathbb{R}, a,b>0, b\neq 0,$ y $M,N>0$ $\boxed{\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}}$

$$\Longrightarrow \frac{\log(x+12)}{\log 2^2}\cdot\frac{\log 2}{\log x} = 1$$ expresado en su forma exponencial

$$\Longrightarrow \frac{\log(x+12)}{2\log 2}\cdot\frac{\log 2}{\log x} = 1$$

teorema $\forall a,\in\mathbb{R}, a,>1,$ y $M,N>0$ $\boxed{\log_b M^n = n\log_b M}$

$$\Longrightarrow \frac{\log(x+12)}{2}\cdot\frac{1}{\log x} = 1$$ simplificando términos semejantes

$$\Longrightarrow \frac{\log(x+12)}{2\log x} = 1$$

$$\Longrightarrow \log(x+12) = 2\log x$$ propiedad $\forall a\in\mathbb{R}, a\neq 0,$ $\boxed{au = b \to u = \frac{b}{a}}$

$$\Longrightarrow \log(x+12) - 2\log x = 0$$

$$\Longrightarrow \log(x+12) - \log x^2 = 0$$

teorema $\forall a,\in\mathbb{R}, a,>1,$ y $M,N>0$ $\boxed{\log_b M^n = n\log_b M}$

$$\Longrightarrow \log\frac{(x+12)}{x^2} = 0$$

teorema $\forall a\in\mathbb{R}, a>1,$ y $M,N>0,$ $\boxed{\log_a M - \log_a N = \log_a\left(\frac{M}{N}\right)}$

$$\Longrightarrow \frac{(x+12)}{x^2} = 10^0$$

definición $\forall x,y\in\mathbb{R}, x>0, b>0, b\neq 0$ $\boxed{\log_b x = y \Leftrightarrow x = b^y}$

$$\Longrightarrow \frac{(x+12)}{x^2} = 1$$

$$\Longrightarrow x+12 = x^2$$ propiedad $\forall a\in\mathbb{R}, a\neq 0,$ $\boxed{au = b \to u = \frac{b}{a}}$

**Nota:** No son equivalentes las expresiones:

$$\frac{\log a}{b} \neq \log\frac{a}{b}, con\ b \neq 0$$

$\Longrightarrow\ 0 = x^2 - x - 12$

$\Longrightarrow\ 0 = (x-4)(x+3)$ factorizando

$\Longrightarrow\ x - 4 = 0$ o $x + 3 = 0$

$\Longrightarrow\ x = 4$ o $x = -3$

Notemos que los logaritmos en los cuales se trabajó son:

$$\log(x+12) \text{ y } \log x$$

Si reemplazamos $x$ = -3 en $\log x$, no estaría bien definido.
Por tanto la única solución que vale es: $x = 4$

**Respuesta**

Así la solución es: $x = 4$

**94.** Andrea en el recreo, quiere determinar el valor de $x$ en la ecuación exponencial:

$$\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$$

## Resolución

Andrea multiplica los exponentes para reducir el problema.

$$\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4 \Longrightarrow 2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \sqrt[\frac{2}{\sqrt{x}-1}]{2^2};$$

pasamos como raíz $\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$

$\Longrightarrow 2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \left(2^2\right)^{\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}-1}}$ expresamos la raíz como exponente

$\Longrightarrow 2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \left(2^2\right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}}$ propiedad de extremos y medios

$\Longrightarrow 2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2^{\sqrt{x}-1}$ multiplicamos exponentes

$\Longrightarrow \left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2^{\sqrt{x}-1} \cdot 2^{-1}$ pasamos a dividir

$\Longrightarrow 2^{\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}} = 2^{\sqrt{x}-1-1}$ suma de exponentes

$\Longrightarrow 2^{\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}} = 2^{\sqrt{x}-2}$

$\Longrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}-2$ teorema $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{a^b = a^c \Longrightarrow b = c}$

$\Longrightarrow \sqrt{x}+3=2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)$ propiedad $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0,$ $\boxed{au=b \rightarrow u=\frac{b}{a}}$

$\Longrightarrow \sqrt{x}+3=2x-4\sqrt{x}$ propiedad distributiva

$\Longrightarrow \sqrt{x}+4\sqrt{x}-2x+3=0$

$\Longrightarrow 5\sqrt{x}-2x+3=0$

$\Longrightarrow 5\sqrt{x}-2(\sqrt{x})^2+3=0$ interpretamos $x$ como raíz

$\Longrightarrow 2(\sqrt{x})^2-5\sqrt{x}-3=0$ ordenamos la ecuación

$\Longrightarrow (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)=0$ factorizando

$\Longrightarrow 2\sqrt{x}+1=0$ o $\sqrt{x}-3=0$

$\Longrightarrow 2\sqrt{x}=-1$ o $\sqrt{x}=3$ despejando

$\Longrightarrow \sqrt{x}=-\frac{1}{2}$ o $\sqrt{x}=3;$

$\Longrightarrow x=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ o $x=3^2$ elevando al cuadrado para despejar $x$

$\Longrightarrow x=\frac{1}{4}$ o $x=9$

**Respuesta**

Andrea determina los valores de $x$ que son: $x=\frac{1}{4}$ o $x=9$

## Exponentes y radicales

**95.** A Marco, en su preparación para un examen de matemática, le piden simplificar la expresión: $(8x^4y^{-3})^{-2}(\frac{1}{2}x^{-5}y^2)$

### Resolución

Marco expresa los exponentes en números naturales para poder simplificarlos.

$$(8x^4y^{-3})^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}x^{-5}y^2\right) \Longrightarrow \frac{1}{(8x^4y^{-3})^2}\cdot\left(\frac{1}{2}x^{-5}y^2\right)$$

propiedad del inverso multiplicativo, $\forall a \in \mathbb{R}, \exists a^{-1},$ $\boxed{a^{-1}=\frac{1}{a}}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\left(8x^4\frac{1}{y^3}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x^5}y^2\right)$$

propiedad del inverso multiplicativo, $\forall a \in \mathbb{R}, \exists a^{-1},$ $\boxed{a^{-1}=\frac{1}{a}}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\left(\frac{8x^4}{y^3}\right)^2}\cdot\left(\frac{y^2}{2x^5}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{(8x^4)^2}{(y^3)^2}} \cdot \left(\frac{y^2}{2x^5}\right)$$ propiedad de exponente, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{(ab)^c = a^c b^c}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{64x^8}{y^6}} \cdot \left(\frac{y^2}{2x^5}\right)$$ propiedad de multiplicación de exponentes. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{\left(a^b\right)^c = a^{bc}}$

$$\Rightarrow \frac{y^6}{64x^8} \cdot \frac{y^2}{2x^5}$$ propiedad de extremos y medios, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}$, con $b, d \neq 0$, $\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}}$

$$\Rightarrow \frac{y^{6+2}}{64 \cdot 2 \cdot x^{8+5}}$$

$$\Rightarrow \frac{y^8}{128x^{13}}$$

**Respuesta**

Así Marco asegura que la simplificación es: $\dfrac{y^8}{128x^{13}}$

**96.** Valeria y Pablo compiten por quién simplifica en el menor tiempo, la expresión:

$$\frac{x^{-2} - 2(xy)^{-1} + y^{-2}}{\left(\frac{y}{x}\right)^{-2} + xy^{-1} - 2x^0}$$

## Resolución

Valeria toma la delantera tomando todos los exponentes con signo negativo y los expresa como el inverso de un número, es decir:

$$\frac{x^{-2} - 2(xy)^{-1} + y^{-2}}{\left(\frac{y}{x}\right)^{-2} + xy^{-1} - 2x^0} \Rightarrow \frac{\frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + x\frac{1}{y} - 2x^0}$$ propiedad $\forall a \in \mathbb{R}, \exists a^{-1}$, $\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} - 2}$$ ley de potencia cero $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $\boxed{a^0 = 1}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{y^2 - 2xy + x^2}{x^2y^2}}{\frac{x^2 + xy - 2y^2}{y^2}}$$ sacando el m.c.d.

$$\Rightarrow \frac{y^2(y^2 - 2xy + x^2)}{(x^2y^2)(x^2 + xy - 2y^2)}$$ propiedad $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}$, con $b, d \neq 0$, $\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}}$

$$\Longrightarrow \frac{y^2(x-y)(x-y)}{x^2y^2(x+2y)(x-y)}$$ factorizando

$$\Longrightarrow \frac{(x-y)}{x^2(x+2y)}$$ ley de simplificación $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \boxed{\frac{ab}{b} = a}$

**Respuesta**
Valeria simplifica la expresión en el menor tiempo posible su resultado es: $\frac{(x-y)}{x^2(x+2y)}$

**97.** Simplificar la expresión dada por: $\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-b^n}} \cdot \sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-b^n}}$

## Resolución

Como ambas son raíces de índice $n$ y es el producto de raíces, entonces unamos ambas raíces y veamos qué operaciones podemos efectuar:

$$\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-b^n}} \cdot \sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-b^n}} \Longrightarrow \sqrt[n]{\left(a+\sqrt{a^2-b^n}\right) \cdot \left(a-\sqrt{a^2-b^n}\right)}$$

propiedades $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \boxed{\sqrt[c]{a} \cdot \sqrt[c]{b} = \sqrt[c]{ab}}$

$$\Longrightarrow \sqrt[n]{a^2-\left(\sqrt{a^2-b^n}\right)^2}$$

diferencia de cuadrados $\forall a, b \in \mathbb{R}, \boxed{a^2-b^2 = (a-b)(a+b)}$

$$\Longrightarrow \sqrt[n]{a^2-(a^2-b^n)}$$ propiedad de exponente $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = a$

$$\Longrightarrow \sqrt[n]{a^2-a^2+b^n}$$

$$\Longrightarrow \sqrt[n]{b^n}$$

$$\Longrightarrow b$$ propiedad de exponente $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt[n]{a^n} = a$

**Respuesta**
La simplificación es $b$.

**98.** Racionalizar la expresión dada por: $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$, donde $a\sqrt{b}-b\sqrt{a} \neq 0$

## Resolución

Para resolver este tipo de problemas se debe multiplicar por el conjugado del denominador.

$$\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}} \Longrightarrow \frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}\cdot\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$$ conjugado del denominador

$$\Longrightarrow \frac{\left(a\sqrt{b}-b\sqrt{a}\right)^2}{\left(a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\right)\left(a\sqrt{b}-b\sqrt{a}\right)}$$ propiedad $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, $\boxed{a^b\cdot a^c = a^{b+c}}$

$$\Longrightarrow \frac{\left(a\sqrt{b}-b\sqrt{a}\right)^2}{\left(a\sqrt{b}\right)^2-\left(b\sqrt{a}\right)^2}$$

diferencia de cuadrados $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$

$$\Longrightarrow \frac{(a)^2\left(\sqrt{b}\right)^2-2\left(a\sqrt{b}\right)\left(b\sqrt{a}\right)+(b)^2\left(\sqrt{a}\right)^2}{(a)^2\left(\sqrt{b}\right)^2-(b)^2\left(\sqrt{a}\right)^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{a^2b-2ab\sqrt{a}\sqrt{b}+ab^2}{a^2b-b^2a}$$

$$\Longrightarrow \frac{ab\left(a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b\right)}{ab(a-b)}$$ factorizando términos semejantes

$$\Longrightarrow \frac{a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b}{a-b}$$ ley de simplificación $\forall a,b \in \mathbb{R}, b\neq 0$, $\boxed{\frac{ab}{b}=a}$

**Respuesta**

Racionalizando dá como resultado: $\dfrac{a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b}{a-b}$

## Progresión aritmética y geométrica

**99.** Se sabe que la fórmula general de una progresión aritmética está dada particularmente, de la siguiente manera:

$$a_n=\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}$$

Determinar la sumatoria de los 10 primeros términos.

## Resolución

Notemos que tiene una fórmula particular de la progresión aritmética, entonces hallemos el primer término y el décimo término para poder hallar la sumatoria de los 10 primeros términos.

$$a_n=\frac{1}{2}n-\frac{3}{4} \Longrightarrow a_1=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow a_1=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow a_1 = \frac{2-3}{4}$$ sacando el m.c.d.

$$\Longrightarrow a_1 = -\frac{1}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{2}n - \frac{3}{4} \Longrightarrow a_{10} = \frac{1}{2}\cdot 10 - \frac{3}{4} \Longrightarrow a_{10} = \frac{10}{2} - \frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow a_{10} = \frac{20-3}{4}$$ sacando el m.c.d.

$$\Longrightarrow a_{10} = \frac{17}{4}$$

Así el primer término es $-\frac{1}{4}$ y el décimo término es $\frac{17}{4}$ entonces reemplacemos en la fórmula de la sumatoria de una progresión aritmética.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Longrightarrow S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})\cdot 10}{2}$$

$$\Longrightarrow S_{10} = \frac{\left(-\frac{1}{4} + \frac{17}{4}\right)\cdot 10}{2}$$

$$\Longrightarrow S_{10} = \frac{\left(\frac{16}{4}\right)\cdot 10}{2}$$

$$\Longrightarrow S_{10} = \frac{(4)\cdot 10}{2}$$ ley de simplificación $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \boxed{\frac{ab}{b} = a}$

$$\Longrightarrow S_{10} = 2\cdot 10$$ ley de simplificación $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \boxed{\frac{ab}{b} = a}$

$$\Longrightarrow S_{10} = 20$$

**Respuesta**

Así la sumatoria de los 10 primeros términos es 20.

**100.** Se sabe que el tercer término de una progresión aritmética es 5 y el séptimo término es 3, hallar la sumatoria de los 25 primeros términos.

## Resolución

Si se quiere hallar la sumatoria de los primeros 25 términos entonces necesitamos la fórmula de:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

**Datos**

$a_3 = 5$

$a_7 = 3$

$S_{25} = ?$

Sabemos que la fórmula para hallar el término en general es:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Longrightarrow a_3 = a_1 + (3-1)d$$

$$\Longrightarrow a_3 = a_1 + 2d$$

Como $a_3 = 5$ dato

$$\Longrightarrow 5 = a_1 + 2d \quad ......(1)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Longrightarrow a_7 = a_1 + (7-1)d$$

$$\Longrightarrow a_7 = a_1 + 6d$$

Como $a_7 = 3$ dato

$$\Longrightarrow 3 = a_1 + 6d \quad ......(2)$$

Así tenemos el sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, hallemos $a_1$ y $d$.

$$\begin{cases} 5 = a_1 + 2d & //(-1) \\ 3 = a_1 + 6d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -5 = -a_1 - 2d \\ 3 = a_1 + 6d \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se tendrá:

factorizar el signo
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$,
$\boxed{(a-b) = -(b-a)}$

$$-2 = 4d \Longrightarrow d = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow d = -\frac{1}{2} \quad ......(3)$$

Reemplazando ecuación (3) en (2):

$$3 = a_1 + 6d \Longrightarrow a_1 = 3 - 6d$$

$$\Longrightarrow a_1 = 3 - 6(-\frac{1}{2})$$

$$a_1 = 3 + 3$$

$$a_1 = 6$$

Todo número multiplicado por cero es cero, es decir:
$\forall a \in \mathbb{R}$,
$\boxed{a \cdot 0 = 0}$

Luego, $a_1 = 6$ y $d = -\frac{1}{2}$, ahora hallemos $a_{25}$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Longrightarrow a_{25} = a_1 + (25-1)d$$

$$\Longrightarrow a_{25} = 6 + (25-1)(-\frac{1}{2})$$

$$\Longrightarrow a_{25} = 6 + 24(-\frac{1}{2})$$

$$\Longrightarrow a_{25} = 6 - 12$$

$$\Longrightarrow a_{25} = -6$$

Luego, $a_1 = 6$, $d = -\frac{1}{2}$, y $a_{25} = -6$, ahora hallemos: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Longrightarrow S_{25} = \frac{(6 + (-6))25}{2} \Longrightarrow S_{25} = \frac{(0)25}{2} \Longrightarrow S_{25} = 0$$

**Respuesta**

Así la sumatoria de los 25 primeros términos es 0.

## Números enteros, racionales y fracciones

**101.** Erika se pone resolver la tarea de matemática, sabe que el divisor de una división es 53. Si se multiplica al dividendo por 54 y se efectúa nuevamente la división, el cociente queda aumentado en 1524 y el residuo no se altera. ¿Cuál es el valor de sumar el cociente inicial con el residuo?

**Datos**

*D:* dividendo
*d:* divisor
*q:* cociente
*r:* resto

$d = 53$

$q + 1524$

**Resolución**

Emplea una división común, es decir:

$$\begin{array}{r|l} D & 54 \\ \hline r & q \end{array}$$

De donde:

$$D = 53q + r \quad (1)$$

Se efectúa nuevamente la división, por condición de problema:

$$\begin{array}{r|l} 54D & 54 \\ \hline r & q+1524 \end{array}$$

De donde:

$$54D = 53(q+1524)+r \quad (2)$$

**Algoritmo de la división**

Dividendo  Divisor

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$$

Resto  Cociente

$D, d, q, r \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$

$r < d$

$\boxed{D = dq + r}$

Algoritmo de Euclides

Ahora, se resta (1) de (2):

$$\begin{array}{rl} & 54D = 53q + 53 \cdot 1524 + r \\ - & D = 53q + r \\ \hline & 53D = 53 \cdot 1524 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad D = 1524$$

Luego la división inicial es

$$\begin{array}{r|l} 1524 & 54 \\ \cline{2-2} -106 & 28 \\ \cline{1-1} 464 & \\ -424 & \\ \cline{1-1} 40 & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} q = 28 \\ \text{y} \\ R = 40 \end{array}$$

De donde la suma entre el cociente y resto es

$$q + r = 28 + 40 = 68 \quad \Longrightarrow \quad q + r = 68$$

**Respuesta**

La respuesta es 68.

**102.** Simplificar la siguiente fracción compuesta

$$F=\cfrac{5\frac{5}{3}}{\cfrac{1}{2}\cdot\cfrac{1}{\cfrac{1}{2}\div\cfrac{5}{3\div\cfrac{\frac{1}{2}}{3+\frac{1}{2}}}}}$$

## Resolución

Transformando el denominador en fracciones reducidas a sus términos más sencillos, es decir:

$$F=\cfrac{5\frac{5}{3}}{\cfrac{1}{2}\cdot\cfrac{1}{\cfrac{1}{2}\div\cfrac{5}{3\div\cfrac{\frac{1}{2}}{\boxed{3+\frac{1}{2}}}}}}=\cfrac{5+\frac{5}{3}}{\cfrac{1}{2}\cdot\cfrac{1}{\cfrac{1}{2}\div\cfrac{5}{3\div\boxed{\cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{2}}}}}}$$

Operación de división (extremos y medios)

$$=\cfrac{\frac{20}{3}}{\cfrac{1}{2}\cdot\cfrac{1}{\cfrac{1}{2}\div\cfrac{5}{\boxed{3\div\frac{1}{7}}}}}=\cfrac{\frac{20}{3}}{\cfrac{1}{2}\cdot\cfrac{1}{\boxed{\frac{1}{2}\div\frac{5}{21}}}}$$

Operación de división

$$=\cfrac{\frac{20}{3}}{\cfrac{1}{2}\cdot\boxed{\cfrac{1}{\frac{21}{10}}}}=\cfrac{\frac{20}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{21}}$$

Simplificando

$$=\cfrac{\frac{20}{3}}{\frac{5}{21}}=\frac{20\cdot 21}{3\cdot 5}=28$$

**Respuesta**

El resultado es 28.

**103.** Nicolás tiene una granja de 230 animales, entre patos, gallinas y conejos. ¿Cuántas gallinas tiene, si el número de patos es cuatro veces al número de gallinas, y en total hay 540 patas?

**Datos**
$A$: animales
$P$: patos
$G$: gallinas
$C$: conejos

$\#A=230$
$\#P=4\#G$

**Total:**
540 patas

**Resolución**
Asumiendo que, de los 230 animales, si fueran todos aves, se tendría:

$$2\cdot 230=460 \text{ patas.}$$

Ahora falta agregar 2 patas más de cada conejo, esto resulta, restar patas de las aves del total 540 patas (animales), es decir, el incremento es:

$$\Delta = 540 - 460 = 80 \text{ patas}$$

*Fuente: Yandex*

Cantidad de conejos:

$$\#C = \frac{\Delta}{2} = \frac{80}{2} = 40 \quad \Rightarrow \#C = 40$$

Cantidad de aves:

$$\begin{aligned} \#P + \#G &= \#A - \#C \\ &= 230 - 40 = 190 \\ &\Rightarrow \#P + \#G = 190 \qquad (1) \end{aligned}$$

Del problema, se tiene:

$$\#P = 4\#G \qquad (2)$$

Cantidad de gallinas: se obtiene, reemplazando (2) en (1), es decir:

$$\begin{aligned} 4\#G + \#G = 190 &\Rightarrow 5\#G = 190 \\ &\Rightarrow \#G = \frac{190}{5} = 38 \\ &\Rightarrow \#G = 38 \end{aligned}$$

**Respuesta**
Nicolás tiene en su granja 38 gallinas.

**104.** En una prueba de admisión de ingeniería se pide determinar la suma de los números enteros siguientes:

$$S=2+(3+3)+(4+4+4)+\cdots+(10+\cdots+10)$$

Suma de $n$ términos:

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n-veces}=n\cdot a$$

$$a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$$

Sumas notables:

$$1+2+\cdots+n=$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$1^2+2^2+\cdots+n^2=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

## Resolución

$$S=2+\underbrace{(3+3)}_{\text{2 sumandos}}+\underbrace{(4+4+4)}_{\text{3 sumandos}}+\cdots+\underbrace{(10+\cdots+10)}_{\text{9 sumandos}}$$

Por la suma de $n$ términos, se tiene:

$$S=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+9\cdot 10$$

Cada término se puede expresar como:

$$1\cdot 2=1(1+1)=1^2+1$$
$$2\cdot 3=2(2+1)=2^2+2$$
$$3\cdot 4=3(3+1)=3^2+3$$
$$\vdots$$
$$9\cdot 10=9\,(9+1)=9^2+9$$

Luego, reescribiendo la suma:

$$S=(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2)+(1+2+3+\cdots+9)$$

Por sumas notables

$$=\frac{9(9+1)(2\cdot 9+1)}{6}+\frac{9(9+1)}{2}=\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}+\frac{9\cdot 10}{2}$$

$$=3\cdot 5\cdot 19+9\cdot 5=285+45=330$$

**Respuesta**

La suma de los enteros es 330 .

## Divisibilidad y números primos

**105.** Ana tiene el número 303, quiere saber si es primo o compuesto.

Aquellos números enteros positivos que tienen más de dos divisores enteros positivos se denominan **"números compuestos"**

## Resolución

De manera análoga al problema (problemas intermedios), "Método para determinar si un número es primo o compuesto", es decir:

**Paso 1.**

$$\sqrt{303}\implies 289=17^2<303<18^2=324$$
$$\sqrt{303}\approx 17$$

**Paso 2.**

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}\leq\{17\}$ o bien

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\leq 17$$

Paso 3.

$$303 = \begin{cases} 303 = 2 \cdot 151 + 1 \\ 303 = 3 \cdot 101 \quad \text{(división exacta)} \\ \vdots \end{cases}$$

Aquellos números enteros positivos que tienen exactamente dos divisores enteros positivos, lo cual son la unidad y el mismo número se denominan "números primos"

**Respuesta**

Por consiguiente, 303 es un número compuesto.

**106.** Jaime se prepara para el examen de dispensación, para ello resuelve el siguiente problema: Si $MCD(3A,24C) = 18N$, $MCD(2C,B) = 2N$ y $MCD(A,4B,8C)=188$, calcular el valor de $N$.

## Resolución

Si $MCD(3A,24C) = 18N$
dividiendo por 3

$\Longrightarrow MCD(A,8C)=6N$

Si $MCD(2C,B) = 2N$
multiplicando por 4

$\Longrightarrow MCD(8C,4B)=8N$

De donde, se tiene:

$$MCD(A,8C) = 6N \;\wedge\; MCD(8C,4B) = 8N$$

Entonces, por la propiedad de $MCD$:

$$MCD(A,4B,8C) = \underbrace{MCD(6N,8N) = 188}_{(1)}$$

**Propiedad:**

Sean los números $A, B, C, D, \ldots$

$MCD(A,B) = p \wedge MCD(C,D)=q$

$\Downarrow$

$MCD(A,B,C,D)=pq$

Ahora se determinan los divisores comunes de:

$$\left.\begin{aligned} 6N&: N, 2N, 3N, 6N \\ 8N&: N, 2N, 4N, 8N \end{aligned}\right\} \Longrightarrow MCD(6N,8N) = 2N$$

De donde, hay un solo divisor común. Luego en (1), se tiene:

$$2N = 188 \;\Rightarrow\; N = 94$$

**Respuesta**

El valor de $N$ es 94.

**107.** Tres ciclistas recorren un sendero que rodea un lago. Uno tarda 10 minutos en completar una vuelta, otro 15 minutos y el tercero 18 minutos. Comienzan al mismo tiempo y deciden detenerse la primera vez que los tres coincidan nuevamente en el punto de partida, ¿cuánto tiempo duró el recorrido y cuántas vueltas completó cada uno?

*Fuente: Club de atletas La Paz*

**Datos:**

$A$: primer atleta
$B$: segundo atleta
$C$: tercer atleta
Tiempos en minutos
$t_A = 10\ min$
$t_B = 15\ min$
$t_C = 18\ min$
Número de vueltas
$n_A$ : primer atleta
$n_B$ : segundo atleta
$n_C$ : tercer atleta

**Resolución**

Como parten juntos, el tiempo que debe transcurrir para que vuelvan a pasar simultáneamente es el menor múltiplo común de los tiempos $t_A$,$t_B$ y $t_C$, es decir:

$$t = MCM(10,15,18)=90$$

$$\Longrightarrow \quad t = 90\, min$$

Donde:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | 15 | 18 | 2 |
| 5 | 15 | 9 | 3 |
| 5 | 5 | 3 | 3 |
| 5 | 5 | 1 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | |

$$\Longrightarrow \quad MCM(10,15,18) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$$

Entonces, el paseo duró 90 minutos el paseo. Luego, el número de vueltas que dió cada atleta es:

$$n_A = \frac{t}{t_A} = \frac{90}{10} = 9 \quad \longrightarrow \quad n_A = 9\ vueltas$$

$$n_B = \frac{t}{t_A} = \frac{90}{15} = 6 \quad \longrightarrow \quad n_B = 6\ vueltas$$

$$n_C = \frac{t}{t_A} = \frac{90}{18} = 5 \quad \longrightarrow \quad n_C = 5\ vueltas$$

**Respuesta**

El paseo duró 90 minutos, y dan 9,6 y 5 vueltas, respectivamente.

**108.** Carola se prepara para olimpiadas de matemática y resuelve el siguiente problema: Dados los números: $A = 4^n \cdot 5^n$; $B = 12^n \cdot 15^n$
Si el máximo común divisor de $A$ y $B$ es 400, determinar el valor de $n$.

## Resolución

En primer lugar, descompone los números dados en forma canónica (factorización en primos), es decir:

$$A = 4^n \cdot 5^n = (2^2)^n \cdot 5^n \; ; \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$\begin{aligned} B = 12^n \cdot 15^n &= (2^2 \cdot 3)^n \cdot (3 \cdot 5)^n \\ &= 2^{2n} \cdot 3^n \cdot 3^n \cdot 5^n \\ &= 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^n \end{aligned}$$

Entonces el máximo común divisor entre $A$ e $B$ es

$$MCD(A,B) = 2^{2n} \cdot 5^n = (2^2 \cdot 5)^n = 20^n$$

Por el dato del enunciado, se tiene:

$$MCD(A,B) = 20^n = 400 \quad \ldots \quad (1)$$

Descomponiendo 400 en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 400 & 2 \\ 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad 400 = 2^4 5^2 = (2^2 \cdot 5)^2 = 20^2$$

Luego en (1), se tiene:

$$20^n = 400 \quad \Longrightarrow \quad 20^n = 20^2$$ Por la propiedad, de igualdad de bases

**Propiedad:**

$$a^m = a^n \Longrightarrow m = n$$

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

**Respuesta**

El valor de $n$ es 2.

## Potenciación y radicación

**109.** Andrés resuelve la tarea de matemática que consiste en determinar el valor de la expresión:

$$E = \frac{\{[(3^2)^3]^4\}^5 3^{6^3}}{3^{11^2}(3^{21})^{10}}$$

## Resolución

Se hace primero las operaciones encerradas entre paréntesis, es decir:

$$E = \frac{\{[(3^2)^3]^4\}^5 3^{6^3}}{3^{11^2}(3^{21})^{10}}$$ expresión dada

$$= \frac{\{[3^{2\cdot 3}]^4\}^5 3^{216}}{3^{121}3^{21\cdot 10}}$$ $(a^m)^n = a^{mn}, a \in \mathbb{Z}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}$

$$= \frac{\{[3^6]^4\}^5 3^{216}}{3^{121}3^{210}}$$ operaciones en exponentes

$$= \frac{\{3^{6\cdot 4}\}^5 3^{216}}{3^{121}3^{210}}$$

$$= \frac{\{3^{24}\}^5 3^{216}}{3^{121}3^{210}}$$

$$= \frac{3^{24\cdot 5}3^{216}}{3^{121}3^{210}} = \frac{3^{120}3^{216}}{3^{121}3^{210}}$$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \in \mathbb{Z}, a \neq 0, m > n, m, n \in \mathbb{N}$

$$= 3^{120}3^{216}3^{-121}3^{-210}$$ $a^m a^n = a^{m+n}, a \in \mathbb{Z}, \quad m, n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow E = 3^5$$

**Respuesta**

Por consiguiente, el resultado es $3^5$.

**110.** Calcular el valor de "$F$" en la siguiente expresión:

$$F = \underbrace{5^{12} + 5^{12} + \cdots + 5^{12}}_{625-veces} - 25^8 + 2025$$

**Resolución:**

Aplicando la suma de los $n$ términos, se tiene:

$$F = \underbrace{5^{12} + 5^{12} + \cdots + 5^{12}}_{625-veces} - 25^8 + 2025$$

$$= 625 \cdot 5^{12} - 25^8 + 2025$$

Descomposición de 625 es $5^4$

$$= 5^4 \cdot 5^{12} - 25^8 + 2025;$$ $a^m a^n = a^{m+n}, a \in \mathbb{Z}, \quad m, n \in \mathbb{N}$

$$= 5^{4+12} - 25^8 + 2025$$ operación en el exponente

$$= 5^{16} - 25^8 + 2025$$

$$= (5^2)^8 - 25^8 + 2025$$

$$= 25^8 - 25^8 + 2025 \quad = 2025$$

**Respuesta**

Por consiguiente, el valor de la expresión es 2025.

**111.** Amalia tiene una prueba de matemática en el curso básico de ingeniería, para el cual se prepara y se propone resolver la siguiente expresión:

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}-7$$

## Resolución

Observa que es conveniente racionalizar cada término, de modo que multiplica por la conjugada del denominador, es decir:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{(\sqrt{1})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1}\qquad (a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

Análogamente, se racionalizan los demás términos.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{4})^2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\cdot\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{(\sqrt{99})^2-(\sqrt{100})^2}=\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100}=\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}$$

Luego, reemplazando en la expresión dada, se tiene:

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}-7$$

$$\Longrightarrow S=\underbrace{\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1}+\cdots+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}}_{\textit{Fracción homogénea}}-7$$

$$=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}-7$$

Se cancelan los términos semejantes

$$=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{100}}{-1}-7=\frac{1-10}{-1}-7$$

$$=\frac{-9}{-1}-7=9-7=2\qquad \text{ley de signos en la división}$$

$$\Longrightarrow S=2$$

**Respuesta**

El resultado de la expresión es 2.

**112.** Si $a$ y $b$ son constantes. Calcular el valor de "$m$" en la siguiente expresión:

$$\frac{\left[\sqrt[\frac{1}{2}]{a^{-3}\left(\sqrt[\frac{1}{4}]{b^{3}}\right)}\right]^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{\sqrt[\frac{1}{2}]{a^{6}\left(\sqrt{b^{-3}}\right)}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{m}$$

## Resolución

En la igualdad, desarrollando el primer miembro y luego aplicando las propiedades de potenciación y radicación.

$$\frac{\left[\sqrt[\frac{1}{2}]{a^{-3}\left(\sqrt[\frac{1}{4}]{b^{3}}\right)}\right]^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{\sqrt[\frac{1}{2}]{a^{6}\left(\sqrt{b^{-3}}\right)}}}=\frac{\left[\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{1}{a^{3}}\cdot b^{\frac{3}{\frac{1}{4}}}}\right]^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{\sqrt[\frac{1}{2}]{a^{6}\cdot b^{-\frac{3}{2}}}}}=\frac{\left[\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{1}{a^{3}}\cdot b^{12}}\right]^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{a^{6}}{b^{\frac{3}{2}}}}}}$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}};\qquad \sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}},\qquad a,b\in\mathbb{R},m,n\in\mathbb{N}$$

$$=\frac{\left[\left(\frac{b^{12}}{a^{3}}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{a^{6}}{b^{\frac{3}{2}}}\right)^{2}}}=\frac{\left[\left(\frac{b^{12}}{a^{3}}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{a^{6}}{b^{\frac{3}{2}}}\right)^{2}}}=\frac{\left(\frac{b^{12}}{a^{3}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{a^{6}}{b^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Por ley de exponentes

$$=\frac{\frac{b^{4}}{a}}{\frac{a^{4}}{b}}=\frac{b^{4}\cdot b}{a^{4}\cdot a}=\frac{b^{5}}{a^{5}}$$

Producto de extremos y medios

$$=\left(\frac{b}{a}\right)^{5}$$

De donde, $\left(\frac{b}{a}\right)^{m}=\left(\frac{b}{a}\right)^{5}\implies m=5$

**Respuesta**

El valor de $m$ es 5.

## Números decimales y notación científica

Fórmula práctica de conversión de números decimales a fracciones comunes:

$$M = \overbrace{abcde}^{m=4}$$

$$\text{Decimal periódico} \rightsquigarrow a,bc\overline{de} = \frac{M-s}{10^m-10^k} = \underbrace{\frac{abcde-abc}{10^4-10^2}}_{\text{fracción común}}$$

$$s = \underbrace{abc}_{k=2}$$

**Donde:** $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$.

| | |
|---|---|
| $M$= entero que resulta de recorrer el punto decimal hasta la última cifra del periodo.<br><br>$s$= entero que resulta de recorrer el punto decimal hasta una cifra antes del periodo. | $m$= lugares recorridos para obtener $M$.<br><br>$k$= lugares recorridos para obtener $s$. |

**113.** Convertir los números decimales a su forma de fracciones:

$a$). $x = 0{,}666\cdots = 0,\overline{6}$

$b$). $y = 3{,}666\cdots = 3,\overline{6}$

$c$). $z = 0{,}58333\cdots = 0{,}58\overline{3}$

### Resolución

Usando la fórmula practico para convertir números decimales, se tiene

a) $x = 0{,}666\cdots = 0,\overline{6}$

Identificando los valores, $M = 6, m = 1, s = 0, k = 0$. Luego sustituyendo en la fórmula:

$$x = 0,\overline{6} = \frac{6-0}{10^1-10^0} = \frac{6}{10-1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

b) $y = 3{,}666\cdots = 3,\overline{6}$

Identificando los valores, $M = 36, m = 1, s = 3, k = 0$. Luego sustituyendo en la fórmula:

$$y = 3,\overline{6} = \frac{36-3}{10^1-10^0} = \frac{33}{10-1} = \frac{33}{9} = \frac{11}{3} \Rightarrow y = \frac{11}{3}.$$

De otra forma como $y = 3{,}666\cdots = 3{,}\overline{6}$ se puede separar la parte entera, es decir

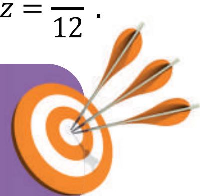
$$y = 3{,}\overline{6} = 3 + 0{,}\overline{6} = 3 + \frac{2}{3} \quad \text{por la parte a) pues } x = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{11}{3} \implies y = \frac{11}{3}.$$

c) $z = 0{,}58333\cdots = 0{,}58\overline{3}$

Identificando los valores, $M = 583, m = 3, s = 58, k = 2$. Luego sustituyendo en la fórmula:

$$z = 0{,}58\overline{3} = \frac{583 - 58}{10^3 - 10^2} = \frac{525}{1000 - 100} = \frac{525}{900} = \frac{7}{12} \implies z = \frac{7}{12}.$$



**Respuesta**
Los números decimales convertidos en fracciones son

$$x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{11}{3} \text{ y } z = \frac{7}{12}$$

**114.** Juan Carlos se entrena para un examen de competencia de matemática y calcula el valor de $H$ en la siguiente expresión:

$$H = \sqrt{\frac{\left(\frac{0{,}15}{0{,}8} + \frac{10{,}5}{16{,}8} - 0{,}25\right) \cdot \frac{130}{117}}{\frac{\sqrt{2197}}{1{,}\overline{1}} \cdot \frac{0{,}1\overline{3}}{\sqrt{117}} \cdot \frac{1}{13}}}$$

## Resolución

Convirtiendo los números decimales a fracciones, donde aparece la cantidad subradical.

**Número decimal periódico:**

$$N_{\bar{a}} = \frac{M - s}{10^m - 10^k} \quad (FP)$$

Esta fórmula está dada al principio de este contenido.

Números decimales exactos a fracciones:

$$0{,}15 = \frac{15}{100}; \quad 0{,}8 = \frac{8}{10}; \quad 0{,}25 = \frac{25}{100}$$

$$10{,}5 = 10 + 0{,}5 = 10 + \frac{5}{10} = \frac{105}{10}$$

$$16{,}8 = 16 + 0{,}8 = 16 + \frac{8}{10} = \frac{168}{10}$$

Números decimales periódicos a fracciones, se calcula con la fórmula periódica (FP):
Para $1{,}\overline{1}$ se identifica $M = 11, m = 1, s = 1, k = 0$. Entonces

$$1{,}\overline{1} = \frac{11 - 1}{10^1 - 10^0} = \frac{10}{10 - 1} = \frac{10}{9} \implies 1{,}\overline{1} = \frac{10}{9}$$

Para $0{,}1\overline{3}$, se identifica $M = 13,\ m = 2, s = 1,\ k = 1.$ Entonces

$$0{,}1\overline{3} = \frac{13-1}{10^2 - 10^1} = \frac{12}{100-10} = \frac{12}{90} \quad \Longrightarrow \quad 0{,}1\overline{3} = \frac{12}{90}$$

Para simplificar las operaciones, podemos hacer lo siguiente en la expresión dada:

$$H = \sqrt{\frac{\left(\frac{0{,}15}{0{,}8} + \frac{10{,}5}{16{,}8} - 0{,}25\right)\cdot\frac{130}{117}}{\frac{\sqrt{2197}}{1,\overline{1}}\cdot\frac{0{,}1\overline{3}}{\sqrt{117}}\cdot\frac{1}{13}}} = \sqrt{\frac{X\cdot Y}{Z}} \qquad \dots \qquad (1)$$

**Donde:**

$$X = \frac{0{,}15}{0{,}8} + \frac{10{,}5}{16{,}8} - 0{,}25 = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{8}{10}} + \frac{\frac{105}{10}}{\frac{168}{10}} - \frac{25}{100} = \frac{15\cdot 10}{100\cdot 8} + \frac{105\cdot 10}{10\cdot 168} - \frac{25}{100}$$

Convirtiendo decimales a fracciones y operaciones

$$= \frac{3}{16} + \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3+10-4}{16} = \frac{9}{16} \quad \Longrightarrow \quad X = \frac{9}{16}$$

$$Y = \frac{130}{117} = \frac{2\cdot 5\cdot 13}{3^2\cdot 13} = \frac{10}{9} \quad \Longrightarrow \quad Y = \frac{10}{9}$$

$$Z = \frac{\sqrt{2197}}{1,\overline{1}}\cdot\frac{0{,}1\overline{3}}{\sqrt{117}}\cdot\frac{1}{13} = \frac{\sqrt{2197}}{\frac{10}{9}}\cdot\frac{\frac{12}{90}}{\sqrt{117}}\cdot\frac{1}{13}$$

Convirtiendo decimales a fracciones y operaciones

$$= \frac{\sqrt{13^2\cdot 13}}{\frac{10}{9}}\cdot\frac{\frac{12}{90}}{\sqrt{3^2\cdot 13}}\cdot\frac{1}{13} = \frac{13\sqrt{13}}{\frac{10}{9}}\cdot\frac{\frac{12}{90}}{13\sqrt{13}}\cdot\frac{1}{13}$$

Operaciones por extremos y medios

$$= \frac{13\cdot 9\cdot\sqrt{13}}{10}\cdot\frac{12}{90\cdot 3\cdot\sqrt{13}}\cdot\frac{1}{13} = \frac{1}{25} \quad \Longrightarrow \quad Z = \frac{1}{25}$$

Luego reemplazando en (1), se tiene:

$$A = \sqrt{\frac{X\cdot Y}{Z}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{16}\cdot\frac{10}{9}}{\frac{1}{25}}} = \sqrt{\frac{\frac{10}{16}}{\frac{1}{25}}} = \sqrt{\frac{25\cdot 10}{16\cdot 1}} = \sqrt{\frac{5^2\cdot 5}{2^2\cdot 2}} = \frac{\sqrt{5^2}\sqrt{5}}{\sqrt{2^2}\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

**Respuesta**

El valor de $H$ es $\dfrac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

**115.** Calcular el valor de "$E$" en la siguiente expresión:

$$E = 6 \div \frac{1}{3} - 0{,}8 \div \frac{1{,}5}{\frac{3}{2}\cdot 0{,}4 \cdot \frac{50}{1 \div \frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0{,}25}}{6 - \frac{46}{1 + 2{,}2\cdot 10}}$$

## Resolución

Primero, convirtiendo decimales exactos a fracciones, es decir:

$$0{,}8 = \frac{8}{10}; \qquad 0{,}4 = \frac{4}{10}; \qquad 0{,}25 = \frac{25}{100}$$

$$1{,}5 = 1 + 0{,}5 = 1 + \frac{5}{10} = \frac{10+5}{10} = \frac{15}{10} \longrightarrow 1{,}5 = \frac{15}{10}$$

$$2{,}2 = 2 + 0{,}2 = 2 + \frac{2}{10} = \frac{20+2}{10} = \frac{22}{10} \longrightarrow 2{,}2 = \frac{22}{10}$$

Luego en fracciones compuestas, la expresión queda como:

$$E = 6 \div \frac{1}{3} - \frac{8}{10} \div \frac{\frac{15}{10}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{50}{1 \div \frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{25}{100}}}{6 - \frac{46}{1 + \frac{22}{10}\cdot 10}}$$

Simplificando

$$= 18 - \frac{8}{10} \div \frac{\frac{15}{10}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{50}{2}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{100}{25}}{6 - \frac{46}{1+22}}$$

Simplificando

$$= 18 - \frac{8}{10} \div \frac{\frac{15}{10}}{15} + \frac{1}{4} + \frac{1+2}{6 - \frac{46}{23}}$$

$$= 18 - \frac{8}{10} \div \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1+2}{6-2}$$

$$= 18 - \frac{80}{10} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 18 - 8 + \frac{4}{4}$$

$$= 10 + 1 = 11$$

$$\Longrightarrow \quad E = 11$$

**Respuesta**

El valor de "$E$" es 11.

**116.** Determinar el valor de la siguiente fracción:

$$B = \left( \frac{2{,}3 \times 10^{-4} + 5{,}7 \times 10^{-4}}{3{,}24 \times 10^{-6} - 1{,}64 \times 10^{-6}} \right)^2$$

## Resolución

Observe que tanto el numerador y denominador, los números decimales se pueden convertir a enteros, por ejemplo

$$2{,}3 \times 10^{-4} = 23 \times 10^{-5}$$

Luego, la fracción dada se escribe, como:

$$B = \left( \frac{23 \times 10^{-5} + 57 \times 10^{-5}}{324 \times 10^{-8} - 164 \times 10^{-8}} \right)^2$$

Por factorización

$$= \left( \frac{(23 + 57) \times 10^{-5}}{(324 - 164) \times 10^{-8}} \right)^2$$

$$= \left( \frac{80}{160} \times 10^{-5+8} \right)^2$$

$$= \left( \frac{1}{2} \times 10^3 \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 10^6 = 0{,}25 \times 10^6$$

$$\Rightarrow \quad B = 0{,}25 \times 10^6$$

**Respuesta**

El valor de la expresión simplificada es $0{,}25 \times 10^6$.

## Números irracionales y reales

**117.** Juan resuelve la siguiente expresión:

$$F = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

Si $F = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, determinar el valor de $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$.

### Resolución

Note que la expresión dada es una fracción compuesta.

$$F = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \underbrace{\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}_{F-1}}}$$

Luego la fracción se expresa como:

$$F = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + F - 1}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \boxed{\cfrac{1}{F+1}}}$$

Operaciones

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{3F + 3 + 1}{F + 1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{3F + 4}{F + 1}} = 1 + \frac{F + 1}{3F + 4}$$

Operaciones de medios y extremos

$$= \frac{3F + 4 + F + 1}{3F + 4} = \frac{4F + 5}{3F + 4} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{4F + 5}{3F + 4}$$

De donde

$$F(3F + 4) = 4F + 5 \quad \Rightarrow \quad 3F^2 + 4F - 4F - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3F^2 = 5$$

Sacando raíz cuadrada positiva

$$\Rightarrow \quad F = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

Donde: $\sqrt{x} = \sqrt{5}$ y $\sqrt{y} = \sqrt{3}$, entonces $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$

**Respuesta**

El valor de $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ es $\sqrt{15}$.

**118.** Dadas las expresiones siguientes

$$a=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad b=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

determinar el valor de $a^2-b^2$.

## Resolución

Racionalizando el denominador en cada expresión dado.

$$a=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

Aplicando binomio cuadrado y diferencia de cuadrados

$$=\frac{4+4\sqrt{3}+3}{4-3}=\frac{7+4\sqrt{3}}{1}=7+4\sqrt{3}$$

$$b=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

Aplicando binomio cuadrado y diferencia de cuadrados

$$=\frac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3}=\frac{7-4\sqrt{3}}{1}=7-4\sqrt{3}$$

Luego

$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= \left(7+4\sqrt{3}\right)^2-\left(7-4\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 49+56\sqrt{3}+16\cdot 3-(49-56\sqrt{3}+16\cdot 3) \\ &= 49+56\sqrt{3}+48-49+56\sqrt{3}-48 \\ &= 112\sqrt{3} \end{aligned}$$

**Respuesta**

El valor buscado es $112\sqrt{3}$.

**119.** Zaida resuelve su examen preuniversitario, que consiste en determinar el valor de la siguiente expresión:

$$E=\left[\sqrt[\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}]{\sqrt[\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}]{\sqrt[\sqrt{\sqrt{2}}]{\sqrt[\sqrt{2}]{\sqrt{2^{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}}}}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

## Resolución

Por la propiedad, donde el índice de radical, se puede escribir como:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} = \sqrt[16]{2} = 2^{\frac{1}{16}}, \qquad \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{8}},$$

$$\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}, \qquad \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

El exponente de 2 en la cantidad subradical, se puede escribir como:

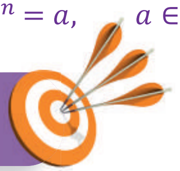
$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{15}}}}} = \sqrt[16]{2^{15}} = 2^{\frac{15}{16}}$$

Luego, reemplazando en la expresión dada:

$$E = \left[\sqrt[2^{\frac{1}{16}}]{\sqrt[2^{\frac{1}{8}}]{\sqrt[2^{\frac{1}{4}}]{\sqrt[2^{\frac{1}{2}}]{2^{2^{\frac{15}{16}}}}}}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sqrt[2^{\frac{1}{16}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}]{2^{2^{\frac{15}{16}}}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sqrt[2^{\frac{15}{16}}]{2^{2^{\frac{15}{16}}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Operación en el índice radical

$$= 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \qquad \sqrt[n]{a^n} = a, \quad a \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{N}$$



**Respuesta**

El valor de la expresión dada es $\sqrt{2}$.

**120.** Simplificar la siguiente expresión:

$$R = \frac{\sqrt{26+\sqrt{675}} - \sqrt{26-\sqrt{675}}}{\left(\sqrt{26-\sqrt{675}}\right)\left(\sqrt{26+\sqrt{675}}\right)}$$

## Resolución

Aplicando, la transformación de radicales dobles tanto en el numerador, como en el denominador, a radicales simples:

$$a = 26, \qquad b = 675$$

$$c = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{26^2 - 675} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow c = 1$$

Luego, remplazando en la expresión dada

$$R = \frac{\sqrt{\frac{26+1}{2}} + \sqrt{\frac{26-1}{2}} - \left(\sqrt{\frac{26+1}{2}} - \sqrt{\frac{26-1}{2}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{26+1}{2}} - \sqrt{\frac{26-1}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{26+1}{2}} + \sqrt{\frac{26-1}{2}}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{27}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}} - \sqrt{\frac{27}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{27}{2}} - \sqrt{\frac{25}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{27}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}}\right)} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{25}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{27}{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{25}{2}}\right)^2}$$

Transformación de radicales dobles a radicales simples

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

Donde:

$$c = \underbrace{\sqrt{a^2 - b}}_{\text{cuadrado perfecto}}$$

Por la diferencia de cuadrados en el denominador y racionalizando el numerador

$$= \frac{\frac{2 \cdot 5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{\frac{27}{2} - \frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{2}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{1} = 5\sqrt{2}$$

**Respuesta**

La simplificación de la expresión dada es $5\sqrt{2}$.

## Razones, proporciones y porcentajes

**121.** Si $f(x)$ es una función de proporcionalidad directa y se cumple que $f(2) + f(5) = 21$, calcule el valor de:

$$E = f\left(\frac{7}{11}\right) \cdot f(11) \cdot f(13)$$

### Resolución

Como $f(x)$ es una función de proporcionalidad directa, es decir:

$$f(x) = kx \qquad \ldots \quad (1)$$

donde k es constante de proporcionalidad. Luego, evaluando los valores $x = 2$ y $x = 5$ en $f(x)$ en (1), se tiene:

$$f(2) = 2k \qquad \wedge \quad f(5) = 5k \quad \ldots \quad (2)$$

Del enunciado, se tiene

$$f(2) + f(5) = 21 \quad \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad 2k + 5k = 21 \quad \Longrightarrow \quad k = 3$$

Ahora, también evaluando los valores $x = \frac{7}{11}, x = 11, x = 13 \quad k = 3$, en (1), se tiene:

$$f\left(\frac{7}{11}\right) = 3 \cdot \frac{7}{11}, \qquad f(11) = 3 \cdot 11 \quad \wedge \quad f(13) = 3 \cdot 13$$

Luego

$$E = f\left(\frac{7}{11}\right) \cdot f(11) \cdot f(13) = \left(3 \cdot \frac{7}{11}\right) \cdot (3 \cdot 11) \cdot (3 \cdot 13)$$
$$= 3^3 \cdot 7 \cdot 13 = 2457$$

**Respuesta**

El valor de $E$ es 2457.

**122.** Si dos carpinteros fabrican 8 sillas en 1 día, ¿Cuántas sillas pueden fabricar 4 carpinteros en 3 días?

### Resolución

Planteando una regla de tres compuesta con los datos del problema.

$$\begin{array}{ccccc} \textbf{Carpinteros} & & \textbf{Sillas} & & \textbf{Días} \\ 2 & \longrightarrow & 8 & \longrightarrow & 1 \\ 4 & \longrightarrow & x & \longrightarrow & 3 \end{array}$$

Comparando las proporciones de dos en dos, cada columna de datos conocidos con la columna que tiene la incógnita, es decir:

- Mas carpintero fabrican más sillas. La relación es directa.
- En más días se fabrican más sillas. La relación es directa.

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Carpinteros} & & \textbf{Sillas} \\ 2 & \longrightarrow & 8 \\ 4 & \longrightarrow & x \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{ccc} \textbf{Sillas} & & \textbf{Días} \\ 8 & \longrightarrow & 1 \\ x & \longrightarrow & 3 \end{array}$$

$$x = \frac{4 \cdot 8}{2} \qquad \qquad x = \frac{3 \cdot 8}{1}$$

Para hallar valor de $x$, combinamos las proporciones y operamos

$$x = \frac{4 \cdot 8 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 2 \cdot 8 \cdot 3 = 48$$

**Respuesta**

4 carpinteros pueden fabricar 48 sillas en 3 dias.

**123.** 8 obreros trabajan 6 horas diarias durante 2 días para construir una muralla. ¿Cuántos días tardaran en construir una muralla similar, si 6 odreros trabajan 4 horas diarias?

## Resolución

Planteando una regla de tres compuesta con los datos del problema.

$$\begin{array}{ccccc} \textbf{Obreros} & & \textbf{Días} & & \textbf{Horas} \\ 8 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 6 \\ 6 & \longrightarrow & x & \longrightarrow & 4 \end{array}$$

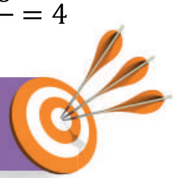
– A menos obreros, más días de trabajo. La relación es inversa.
– A menos obreros, más días de trabajo. La relación es inversa.

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Obreros} & & \textbf{Días} \\ 8 & \longrightarrow & 2 \\ 6 & \longrightarrow & x \end{array} \qquad x = \frac{8 \cdot 2}{6}$$

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Días} & & \textbf{Horas} \\ 2 & \longrightarrow & 6 \\ x & \longrightarrow & 4 \end{array} \qquad x = \frac{6 \cdot 2}{4}$$

Para hallar valor de $x$, combinamos las proporciones y operamos

$$x = \frac{8 \cdot 2 \cdot 6}{6 \cdot 4} = 4$$



**Respuesta**

6 obreros tardarán 4 dias.

**124.** En una universidad, el 30% de los estudiantes son mujeres. Si el número de mujeres aumenta en 40% y el de los hombres disminuye en 10%, ¿en qué porcentaje varía el total de estudiantes?

## Resolución

Separando porcentaje inicial y porcentaje final, de la siguiente manera:

| **Porcentaje inicial:** | **Porcentaje final:** |
|---|---|
| $M_0$: mujeres 30% | $M_f$: mujeres 40% |
| $H_0$: hombres 70% | $H_f$: hombres 60% |

**Porcentaje final de mujeres:**

$$\%M_f = 30\% + \frac{40}{100} \cdot 30\% = \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot 30\%$$

$$= \frac{7}{5} \cdot \frac{30}{100} = \frac{21}{50} \cdot \frac{2}{2} = \frac{42}{100} = 42\% \quad \Longrightarrow \quad \%M_f = 42\%$$

**Porcentaje final de hombres:**

$$\%H_f = 70\% - \frac{10}{100} \cdot 70\% = \left(1 - \frac{1}{10}\right) \cdot 70\%$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{70}{100} = \frac{63}{100} = 63\% \quad \Longrightarrow \quad \%H_f = 63\%$$

**Porcentaje final entre mujeres y hombres:**

$$\%M_f + \%H_f = 42\% + 63\% = 105\%$$

**Variación porcentual:**

Varia del 100% al 105%, por lo que aumenta en 5%

**Respuesta**

El porcentaje que varía es 5%.

**125.** En el departamento de Beni, en una región del bosque hay, 1500 árboles. El 35% son robles, el 45% son cedro y el resto son pinos. ¿Cuántos pinos hay en el bosque?

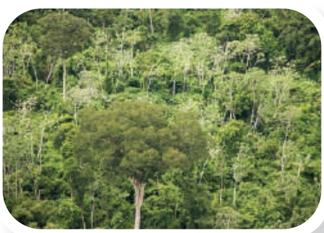
**Datos:**

**Total:** 1500 árboles en total

$R$ = Robles: 35%

$C$ = Cedros: 45%

$P$ = Pinos: $x$%



*Fuente: Ecoregiones de Bolivia*

**Resolución**

Cantidad de robles:

$$35\% \text{ de } 1500 \longrightarrow \#R = \frac{35}{100} \cdot 1500 = 525$$

$$45\% \text{ de } 1500 \longrightarrow \#C = \frac{45}{100} \cdot 1500 = 675$$

Como hay 525 robles y 675 cedros, restándole al total 1500, se obtiene la cantidad de pinos, es decir:

$$\#P = 1500 - 525 - 676 = 300$$

**Respuesta**

En el bosque hay 300 pinos.

## Ecuaciones

**126.** Por cualquier método resuelva el sistema de ecuaciónes dado por:

$$\begin{cases} 5x-2y+z=24 \\ 2x+5y-2z=-14 \\ x-4y+3z=26 \end{cases}$$

### Resolución

Para resolver el sistema de ecuaciones usaremos determinantes, la regla de Cramer.

Recordando un poco:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

Sea:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};\Delta_x=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};\ \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},y=\frac{\Delta_y}{\Delta},z=\frac{\Delta_z}{\Delta};\ para\ \Delta\neq 0$$

Así resolvamos el problema.

$$\begin{matrix} 5x-2y+z=24 \\ 2x+5y-2z=-14 \\ x-4y+3z=26 \end{matrix}\Longrightarrow\Delta=\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \\ 1 & -4 \end{matrix}$$

$$\Delta=(5\cdot5\cdot3)+(-2\cdot-2\cdot1)+(1\cdot2\cdot-4)-[(1\cdot5\cdot1)+(-4\cdot-2\cdot5)$$
$$+(3\cdot2\cdot-2)]$$

$$\Delta=75+4-8-[5+40-12]$$

$$\Delta=71-[33]$$

$$\Delta=38$$

$$\begin{matrix} 5x-2y+z=24 \\ 2x+5y-2z=-14 \\ x-4y+3z=26 \end{matrix}\Longrightarrow\Delta_x=\begin{vmatrix} 24 & -2 & 1 \\ -14 & 5 & -2 \\ 26 & -4 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 24 & -2 \\ -14 & 5 \\ 26 & -4 \end{matrix}$$

$$\Delta_x=(24\cdot5\cdot3)+(-2\cdot-2\cdot26)+(1\cdot-14\cdot-4)-[(1\cdot5\cdot26)$$
$$+(24\cdot-2\cdot-4)+(3\cdot-14\cdot-2)]$$

$$\Delta_x=360+104+56-[130+192+84]$$

$$\Delta_x=520-406$$

$$\Delta_x=114$$

$$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 24 \\ 2x + 5y - 2z &= -14 \\ x - 4y + 3z &= 26 \end{aligned} \Longrightarrow \Delta_y = \left|\begin{array}{ccc} 5 & 24 & 1 \\ 2 & -14 & -2 \\ 1 & 26 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 5 & 24 \\ 2 & -14 \\ 1 & 26 \end{array}$$

$$\Delta_y = (5 \cdot -14 \cdot 3) + (24 \cdot -2 \cdot 1) + (1 \cdot 2 \cdot 26) - [(1 \cdot -14 \cdot 1) + (26 \cdot -2 \cdot 5) + (3 \cdot 2 \cdot 24)]$$

$$\Delta_y = -210 - 48 + 52 - [-14 - 260 + 144]$$

$$\Delta_y = -206 + 130$$

$$\Delta_y = -76$$

$$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 24 \\ 2x + 5y - 2z &= -14 \\ x - 4y + 3z &= 26 \end{aligned} \Longrightarrow \Delta_z = \left|\begin{array}{ccc} 5 & -2 & 24 \\ 2 & 5 & -14 \\ 1 & -4 & 26 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 5 & -2 \\ 2 & 5 \\ 1 & -4 \end{array}$$

$$\Delta_z = (5 \cdot 5 \cdot 26) + (-2 \cdot -14 \cdot 1) + (24 \cdot 2 \cdot -4) - [(1 \cdot 5 \cdot 24) + (-4 \cdot -14 \cdot 5) + (26 \cdot 2 \cdot -2)]$$

$$\Delta_z = 650 + 28 - 192 - [120 + 280 - 104]$$

$$\Delta_z = 486 - 296$$

$$\Delta_z = 190$$

Como $\Delta \neq 0$ se puede reemplazar en:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \Longrightarrow x = \frac{114}{38}, y = -\frac{76}{38}, z = \frac{190}{38}$$

$$\Longrightarrow x = 3, y = -2, z = 5$$

Se verifica la respuesta, reemplazando los valores encontrados en los sistemas de ecuaciones (1), (2) o (3). Reemplacemos en la ecuación (1).

$$5x - 2y + z = 24 \Longrightarrow 5 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) + 5 = 24$$

$$\Longrightarrow 15 + 4 + 5 = 24$$

$$\Longrightarrow 24 = 24$$

**Respuesta**

El resultado de la operación propuesta es 6.

**127.** La mamá de Fabio fue a comprar cierta cantidad de cuadernos para sus hijos, por el inicio de clases. Gastó 84 Bs en un puesto, pero al preguntar en otro notó que podía haber comprado dos cuadernos más con la misma cantidad de dinero, pues ahí los cuadernos costaban 1 Bs menos. ¿Cuántos cuadernos compró la mamá de Fabio?

## Resolución

Asignemos variables tanto al precio, cantidad unitaria por cuaderno y al costo.

## Datos:

*$x$: Número de cuadernos*
*$a$: Precio unitario por cuaderno*
*$P = 84$; Monto por todos los cuadernos*
*$L_1$: Primer puesto*
*$L_2$: Segundo puesto*

*Fuente: Diario Opinión*

$L_1: P = ax \Longrightarrow 84 = ax \;\ldots\ldots (1)$

$L_2: P = (a-1)(x+2) \Longrightarrow 84 = (a-1)(x+2) \;\ldots\ldots (2)$

Así tenemos el sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 84 = ax \\ 84 = (a-1)(x+2) \end{cases}$$

De la ecuación (1) despejemos $a$.

$$84 = ax \Longrightarrow \frac{84}{x} = a \;\ldots\ldots (3)$$

Del sistema de ecuación (3) reemplacemos en ecuación (2).

$$84 = (a-1)(x+2) \Longrightarrow 84 = \left(\frac{84}{x} - 1\right)(x+2)$$

$\Longrightarrow 84 = \left(\frac{84-x}{x}\right)(x+2)$; sacando el m.c.d.

$\Longrightarrow 84x = (84-x)(x+2)$

propiedad $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0,$ $\boxed{ab = c \Longrightarrow b = \frac{c}{a}}$

$\Longrightarrow 84x = 84x + 168 - x^2 - 2x$

propiedad distributiva $\forall a, b, c \in \mathbb{R},$ $\boxed{a(b-c) = ab - ac}$

$\Longrightarrow x^2 + 2x - 168 = 0$ ordenando

$\Longrightarrow (x-12)(x+14) = 0$ factorizando

$\Longrightarrow x - 12 = 0 \text{ o } x + 14 = 0$

$\Longrightarrow x = 12 \text{ o } x = -14$

Como $x$ es el número de cuadernos y tiene que ser una cantidad positiva, solo nos queda que $x$ sea igual a 12.

**Respuesta**

La mamá de Fabio compró 12 cuadernos.

**128.** Maya y Abel están en el colegio, a la hora del recreo ambos se compran cierta cantidad de masticables. Abel piensa que, si tuviera 2 masticables más, entonces tendría el mismo número de masticables que Maya. Mientras que Maya piensa que si Abel le diera 1 masticable tendría el doble que él. ¿Cuantos masticables tienen Maya y Abel?

*Fuente: Periódico Los tiempos.*

## Resolución

Primero asignemos variables para poder generar datos.

## Datos

*M: Número de masticables que tiene Maya*

*A: Número de masticables que tiene Abel*

Abel piensa, si tuviera 2 masticables más, entonces tendría el mismo número de masticables de Maya.

$$A + 2 = M$$

Maya piensa que si Abel le diera 1 masticables tendría el doble que él.

$$M + 1 = 2(A - 1)$$

Entonces nos daría el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + 2 = M \;\ldots..(1) \\ M + 1 = 2(A - 1) \;\ldots..(2) \end{cases}$$

Reemplazar $M$ de la ecuación $(1)$ en la ecuación $(2)$.

$$\begin{aligned} M + 1 = 2(A - 1) &\Longrightarrow A + 2 + 1 = 2(A - 1) \\ &\Longrightarrow A + 3 = 2A - 2 \\ &\Longrightarrow 3 + 2 = 2A - A \\ &\Longrightarrow 5 = A \;\ldots..(3) \end{aligned}$$

Reemplazamos la ecuación $(3)$ en la ecuación $(1)$.

$$\begin{aligned} A + 2 = M &\Longrightarrow 5 + 2 = M \\ &\Longrightarrow 7 = M \end{aligned}$$

**Respuesta**

Así Maya compró 7 masticables y Abel compró 5 masticables.

**129.** En Bolivia se quiere promediar las temperaturas de los siguientes departamentos; Beni, Cochabamba y Potosí. Se tiene una temperatura promedio de 28°C en el verano, en Cochabamba fue 3°C mayor que el promedio de temperaturas de las otras ciudades, en Potosi fue 15°C menor que la temperatura promedio de las otras ciudades. ¿Cuál es la temperatura de Beni, Cochabamba y Potosí?

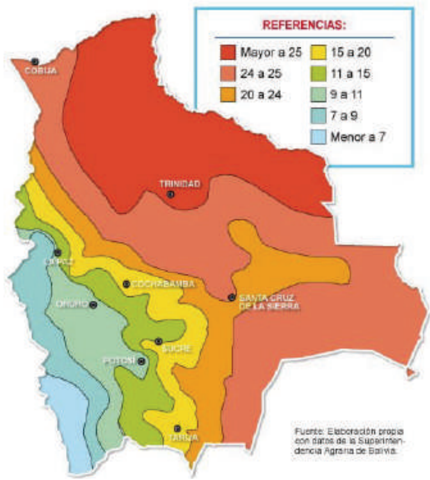
## Resolución

Se hace un análisis para poder asignar variables a cada departamento, y así relacionarlos con las medidas y con las condiciones del problema. Una vez hecho esto se formarán los sistemas de ecuaciones de la siguiente manera

**Datos:**

*$x$: Temperatura en Beni*
*$y$: Temperatura en Cochabamba*
*$z$: Temperatura en Potosí*

**Temperaturas en el territorio boliviano. (En ℃ )**




*Fuente: Centro de documentación e información Bolivia*

Ahora con el promedio respecto a las 3 ciudades y luego entre 2 ciudades, es decir:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 28 \\ y = \dfrac{x+z}{2} + 3 \\ z = \dfrac{x+y}{2} - 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 28 \\ y - 3 = \dfrac{x+z}{2} \\ z + 15 = \dfrac{x+y}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+y+z = 28 \cdot 3 \\ 2 * (y-3) = x+z \\ 2(z+15) = x+y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z = 84 \\ 2y - 6 = x+z \\ 2z + 30 = x+y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+y+z = 84 \\ 2y - x - z = 6 \\ 2z - x - y = -30 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z = 84 \ldots\ldots (1) \\ -x+2y-z = 6 \ldots\ldots (2) \\ -x-y+2z = -30 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Así tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, esta vez resolvamos por el método de eliminación.

Sumemos la ecuación $(1)$ y $(2)$ para eliminar la variable $x$.

$$\begin{cases} x + y + z = 84 \\ -x + 2y - z = 6 \end{cases} \Longrightarrow x - x + y + 2y + z - z = 84 + 6$$

$\Longrightarrow 3y = 90 \ldots \ldots (4)$

$\Longrightarrow y = \dfrac{30 \cdot 3}{3}$ propiedad $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, \boxed{ab = c \Longrightarrow b = \dfrac{c}{a}}$

$\Longrightarrow y = 30$ ley de simplificación $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \boxed{\dfrac{ab}{b} = a}$

Sumemos las ecuaciónes $(2)$ y $(3)$ para eliminar la variable $x$.

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 6 // (\cdot\, 2) \\ -x - y + 2z = -30 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2x + 4y - 2z = 12 \\ -x - y + 2z = -30 \end{cases}$$

$\Longrightarrow -2x - x + 4y - y - 2z + 2z = 12 - 30$

$\Longrightarrow -3x + 3y = -18 \ldots \ldots (5)$

Reemplacemos la ecuación $(4)$ en la ecuación $(5)$

$-3x + 3y = -18 \Longrightarrow -3x + 3y - 3y = -18 - 3y$

$\Longrightarrow -3x = -18 - 3y$ sumando a ambos lados de la ecuación -$3y$ cancelado

$\Longrightarrow -3x = -18 - 90$ términos semejantes reemplazando ecuación $(4)$

$\Longrightarrow -3x = -108$

$\Longrightarrow x = -\dfrac{78}{3}$ propiedad $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, \boxed{ab = c \Longrightarrow b = \dfrac{c}{a}}$

$\Longrightarrow x = \dfrac{-(36 \cdot 3)}{-3}$

$\Longrightarrow x = 36$ ley de simplificación $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \boxed{\dfrac{ab}{b} = a}$

$\Longrightarrow x = 36 \ldots \ldots (6)$

Así reemplazamos la ecuación $(4)$ y $(6)$ en la ecuación $(1)$

$x + y + z = 84 \Longrightarrow z = 84 - x - y$ despejando la variable $z$

$\Longrightarrow z = 84 - 36 - 30$

$\Longrightarrow z = 18 \ldots \ldots (7)$

Verificamos si los valores encontrados son los correctos, reemplazando en ecuación $(1)$, $(2)$ o $(3)$.
Tomemos la ecuación $(2)$.

$-x + 2y - z = 6 \Longrightarrow -36 + 2 \cdot 30 - 18 = 6$

$\Longrightarrow -36 + 60 - 18 = 6$

$\Longrightarrow 6 = 6$ cumple la ecuación

**Respuesta**
Los valores son: $x = 36$, $y = 30$, y $z = 18$

## Factorización

**130.** Jimena quiere mejorar su agilidad matemática factorizando la expresión:

$$49x^4 - 4(x^2 - 3x)^2$$

### Resolución

Es conveniente expresar todos los términos en su forma cuadrática, para así poder aplicar diferencia de cuadrados.

$$49x^4 - 4(x^2 - 3x)^2 \Longrightarrow 7^2(x^2)^2 - 2^2(x^2 - 3x)^2$$

expresamos como un cuadrado perfecto, es decir: $\forall a \in \mathbb{R}, a^2$

$$\Longrightarrow (7x^2)^2 - (2(x^2 - 3x))^2$$

propiedad exponentes, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{(ab)^c = a^c b^c}$

$$\Longrightarrow \left(7x^2 - 2(x^2 - 3x)\right)\left(7x^2 + 2(x^2 - 3x)\right)$$

diferencia de cuadrados $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\boxed{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$

$$\Longrightarrow (7x^2 - 2x^2 + 6x)(7x^2 + 2x^2 - 6x)$$

propiedad distributiva $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{a(b - c) = ab - ac}$

$$\Longrightarrow (5x^2 + 6x)(9x^2 - 6x)$$

$$\Longrightarrow 3x^2(5x + 6)(3x - 2)$$ factorizando términos semejantes

**Respuesta**
Jimena factoriza la expresión quedando: $3x^2(5x + 6)(3x - 2)$

**131.** Adrián quiere factorizar la expresión:

$$\sqrt[3]{m^2} - 6\sqrt[3]{m} + 9, \text{ donde } \forall b \in \mathbb{R}, b \geq 0$$

### Resolución

Adrián ve que es ingenioso hacer un cambio de variable, pero antes expresa el problema de la siguiente manera:

$$\sqrt[3]{m^2} - 6\sqrt[3]{m} + 9 \Longrightarrow (m^2)^{\frac{1}{3}} - 6\sqrt[3]{m} + 9$$

$$\Longrightarrow \left(m^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 6\sqrt[3]{m} + 9$$

propiedades $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$, $\boxed{\left(a^b\right)^{\frac{1}{c}} = \sqrt[c]{a^b}}$

propiedad $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{\left(a^b\right)^c = (a^c)^b}$

$$\Longrightarrow (\sqrt[3]{m})^2 - 6\sqrt[3]{m} + 9$$

propiedades $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$, $\boxed{a^{\frac{1}{c}} = \sqrt[c]{a}}$

Sea $u = \sqrt[3]{m}$ tal que:

$$(\sqrt[3]{m})^2 - 6\sqrt[3]{m} + 9 \Longrightarrow u^2 - 6u + 9$$

$$\begin{array}{lcl} u & & -3 = -3u \\ u & & -3 = -3u \end{array} \quad -6u$$

$$\Longrightarrow (u-3)(u-3)$$ factorizando

$$\Longrightarrow (u-3)^2$$

Reemplazando el valor de $u = \sqrt[3]{m}$ se tendrá:

$$(u-3)^2 \Longrightarrow (\sqrt[3]{m} - 3)^2$$

**Respuesta**

Adrián encuentra la factorización que resulta: $(\sqrt[3]{m} - 3)^2$

**132.** Factorizar la expresión dada por:

$4x^2 - 9a^2 + 49y^2 - 30ab - 25b^2 - 28xy$ para $x, y, a, b, \in \mathbb{R}$.

## Resolución

Para poder factorizar de una manera sencilla, se debe ordenar adecuadamente la expresión por sus términos semejantes, es decir:

$$4x^2 - 9a^2 + 49y^2 - 30ab - 25b^2 - 28xy$$

$$\Longrightarrow 4x^2 - 28xy + 49y^2 - 9a^2 - 30ab - 25b^2$$

$$\Longrightarrow 4x^2 - 28xy + 49y^2 - (9a^2 + 30ab + 25b^2)$$ ordenando

factorizar el signo $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{(a-b) = -(b-a)}$

Observemos que hay que factorizar dos expresiones.

$$4x^2 - 28xy + 49y^2 - (9a^2 + 30ab + 25b^2)$$

$$\begin{array}{lcl} 2x & & -7y \\ 2x & & -7y \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} 3a & & 5b \\ 3a & & 5b \end{array}$$

Se puede ver que en ambos casos, la suma de sus multiplicaciones en forma cruzada da el término que está en medio, en ambos casos, entonces:

$(2x-7y)(2x-7y)-(3a+5b)(3a+5b)$; factorizando

$(2x-7y)^2-(3a+5b)^2$

propiedad, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{a^b \cdot a^c = a^{b+c}}$

$\Longrightarrow \big(2x-7y-(3a+5b)\big)\cdot\big(2x-7y+(3a+5b)\big)$

diferencia de cuadrados, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$

$\Longrightarrow (2x-7y-3a-5b)\cdot(2x-7y+3a+5b)$

**Respuesta**

La factorización es: $(2x-7y-3a-5b)\cdot(2x-7y+3a+5b)$, para $x, y, a, b, \in \mathbb{R}$

**133.** Pamela quiere factorizar la expresión:

$$x^4-3x^3-3x^2+11x-6$$

## Resolución

Pamela resuelve el problema usando el método de Ruffini, donde tiene que ordenarlos en forma descendiente y completando con cero los valores faltantes si hubiera.

$$x^4-3x^3-3x^2+11x-6$$

Ahora tomamos solo la parte numérica.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $1x^4$ | $-3x^3$ | $-3x^2$ | $11x$ | $-6$ |
| $x=1$ | | $1$ | $-2$ | $-5$ | $6$ |
| | $1x^3$ | $-2x^2$ | $-5x$ | $6$ | $\boxed{0}$ |
| $x=-2$ | | $-2$ | $8$ | $-6$ | |
| | $1x^2$ | $-4x$ | $3$ | $\boxed{0}$ | |
| $x=3$ | | $3$ | $-3$ | | |
| | $1x$ | $-1$ | $\boxed{0}$ | | |

Como $x = 1$ se toma $x - 1 = 0$
Como $x = -2$ se toma $x + 2 = 0$
Como $x = 3$ se toma $x - 3 = 0$

Para la factorización se tiene:

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x-1)$$

**Respuesta**

La factorización es: $(x-1)^2(x+2)(x-3)$

Avanzado 03

# Inecuaciones

**134.** Lidia y Carla se ayudan para encontrar el conjunto solución en el intervalo dado por: $-7 < x + 5 \le \dfrac{1}{2}$

## Resolución

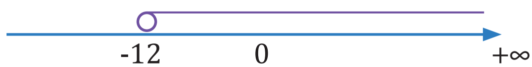
Se debe hacer un análisis en dos partes, es decir:

$$\underbrace{-7 < x + 5}_{(1)} \le \frac{1}{2} \Longrightarrow -7 < x + 5 \text{ y } x + 5 \le \frac{1}{2}$$

**Parte (1):**

$$-7 < x + 5 \Longrightarrow -7 - 5 < x + 5 - 5 \qquad \text{sumando a ambos miembros (-5)}$$
$$\Longrightarrow -7 - 5 < x$$
$$\Longrightarrow -12 < x$$

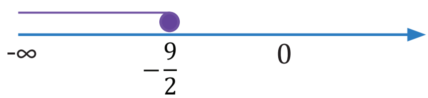
Gráficamente



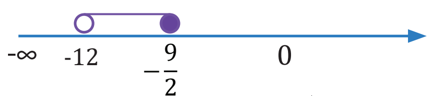

**Parte (2):**

$$x + 5 \le \frac{1}{2} \Longrightarrow x \le \frac{1}{2} - 5 \qquad \text{sumando a ambos lados (-5)}$$
$$\Longrightarrow x \le \frac{1 - 10}{2} \qquad \text{sacando el m.c.d.}$$
$$\Longrightarrow x \le -\frac{9}{2}$$

Gráficamente




Intersectando las gráficas




El conjunto solución está en el intervalo: $\left(-12, -\dfrac{9}{2}\right]$

**Respuesta**

El conjunto solución está dado por: $C_S = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ -12 < x \le -\dfrac{9}{2}\right\}$

**135.** Se simplificaron todos los términos en el sistema de inecuaciónes y nos queda como resultado:

$$\frac{x^2(x-2)^2(x-3)^5}{(1-2x)(3x+2)} \leq 0$$

donde $(1-2x)(3x+2) \neq 0$. Determinar el conjunto solución.

## Resolución

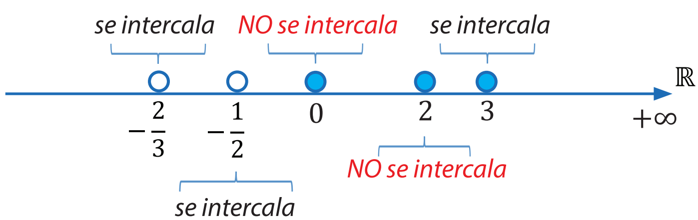
Como ya se tiene la factorización, se debe evaluar son los puntos críticos de la inecuación, para poder ver su multiplicidad y hacer el análisis en los intervalos para definir sus valores de verdad.

Determinemos los puntos críticos:

$$\frac{x^2(x-2)^2(x-3)^5}{(2x+1)(3x+2)} \leq 0 \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 & (\text{multiplicidad } \textbf{par}) \\ (x-2)^2 = 0 & (\text{multiplicidad } \textbf{par}) \\ (x-3)^5 = 0 & (\text{multiplicidad } \textbf{impar}) \\ 2x+1 = 0 & (\text{multiplicidad } \textbf{impar}) \\ 3x+2 = 0 & (\text{multiplicidad } \textbf{impar}) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-2 = 0 \\ x-3 = 0 \\ 2x+1 = 0 \\ 3x+2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ 2x = -1 \\ 3x = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{punto crítico}) \\ x = 2 & (\text{punto crítico}) \\ x = 3 & (\text{punto crítico}) \\ x = -\dfrac{1}{2} & (\text{punto crítico}) \\ x = -\dfrac{2}{3} & (\text{punto crítico}) \end{cases}$$

Ordenemos y situemos los puntos críticos en la recta real $\mathbb{R}$.



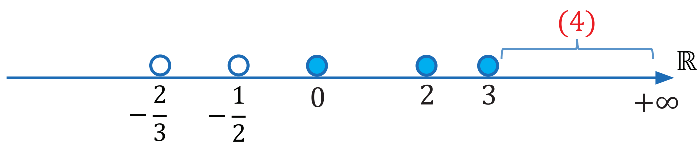
Notemos:

(1) Los puntos críticos en el denominador siempre serán puntos abiertos al situarlos en la recta real $\mathbb{R}$.

(2) Si tiene multiplicidad impar en su punto crítico entonces los valores de verdad se intercalan como ser *V, F o F, V*.

Si tiene multiplicidad par en su punto crítico entonces los valores de verdad no se intercalan como ser *V, V o F, F.*

Dicho todo esto, tomemos un valor en cualquier intervalo y determinemos su valor de verdad en ese intervalo, reemplazando el valor tomado en el intervalo en la inecuación original o factorizada.




Sea $4 \in [3, +\infty)$ tal que:

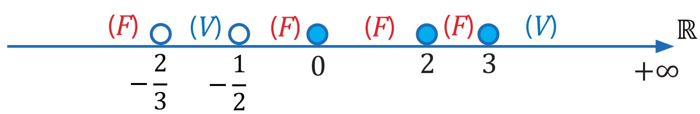
$$\frac{x^2(x-2)^2(x-3)^5}{(1-2x)(3x+2)} \leq 0 \Longrightarrow \frac{4^2(4-2)^2(4-3)^5}{(1-2\cdot 4)(3\cdot 4+2)} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \frac{4^2(4-2)^2(4-3)^5}{(1-2\cdot 4)(3\cdot 4+2)} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \frac{16(2)^2(1)^5}{(-7)(14)} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \frac{16\cdot 4\cdot 1}{(-7)\cdot(14)} \leq 0$$

$$\Longrightarrow -\frac{32}{49} \leq 0$$ afirmación es verdadera (*V*)




Solo nos interesa los intervalos donde sean verdaderas las afirmaciones: $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup [3, +\infty)$

**Respuesta**

El conjunto solución es: $C_s = \left\{x; x \in \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup [3, +\infty)\right\}$

**136.** Joel quiere determinar el conjunto solución de la inecuación:

$$|3x-4| > |x+4|$$

## Resolución

Como todo está en base al valor absoluto, podemos elevar al cuadrado ambos miembros de la inecuación, es decir:

$$|3x-4| > |x+4| \Longrightarrow |3x-4| > |x+4| \quad //(\ )^2$$

$$\Longrightarrow (|3x-4|)^2 > (|x+4|)^2$$

$$\Longrightarrow (3x-4)^2 > (x+4)^2 \qquad \text{propiedad} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \boxed{|a|^2 = a^2}$$

$$\Longrightarrow (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 > (x)^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2$$

$$\Longrightarrow 9x^2 - 24x + 16 - x^2 - 8x - 16 > 0$$

$$\Longrightarrow 8x^2 - 32x > 0 \qquad \text{cancelando términos semejantes}$$

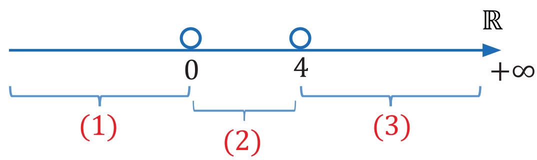
$$\Longrightarrow 8x(x-4) > 0 \qquad \text{factorizando términos semejantes}$$

Una vez factorizada la inecuación debemos hallar los puntos críticos, para así graficarlos en la recta real $\mathbb{R}$.

$$8x(x-4) > 0 \Longrightarrow \begin{cases} 8x = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Notemos que ambos puntos críticos son de multiplicidad impar, ahora grafiquemos los puntos críticos en la recta real $\mathbb{R}$.



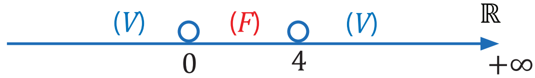

Tomemos un punto valor que pertenezca a cualquier intervalo (1),(2) o (3) y hacer el análisis para ver si el valor de verdad es cierto, es decir:
Sea $5 \in (4, +\infty)$ , en otras palabra 5 al intervalo (3). Reemplacemos en la inecuación factorizada.

$$8x(x-4) > 0 \Longrightarrow 8 \cdot 5(5-4) > 0$$

$$\Longrightarrow 40(1) > 0$$

$$\Longrightarrow 40 > 0; \quad \text{afirmación es verdadera } (V)$$

Entonces los valores de verdad se intercalan en los dos puntos críticos, es decir:




Solo nos interesa donde sean verdaderas las afirmaciones, entonces el conjunto solución estará dado por:

$$(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$$

**Respuesta**

El conjunto solución es: $C_s=\{x;x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)\}$

**137.** Determinar el conjunto solución de la inecuación dada por:

$$|x-3|+|x-4|\geq 5$$

## Resolución

Se resuelve el problema de una manera ingeniosa, haciendo un análisis en los intervalos determinados por los puntos críticos, viendo qué valor toma el valor absoluto en cada intervalo.

Primero veamos los valores del valor absoluto.

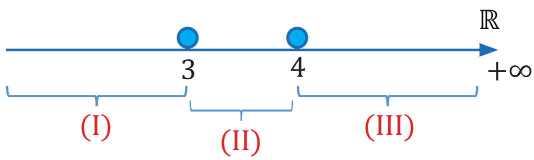
$$|x-3|=\begin{cases}x-3;x-3>0\\-(x-3);x-3\leq 0\end{cases}=\begin{cases}x-3;x>3\ \ldots\ldots(1)\\3-x;x\leq 3\ \ldots\ldots(2)\end{cases}$$

$$|x-4|=\begin{cases}x-4;x-4>0\\-(x-4);x-4\leq 0\end{cases}=\begin{cases}x-4;x>4\ \ldots\ldots(3)\\4-x;x\leq 4\ \ldots\ldots(4)\end{cases}$$

Así tenemos cuatro casos posibles, determinando los puntos críticos.

$$|x-3|+|x-4|\geq 5\Rightarrow\begin{cases}x-3=0\\x-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=4\end{cases};\quad \text{puntos críticos}$$

Situemos los puntos críticos en la recta real $\mathbb{R}$.




Tenemos 3 intervalos que serían, $(-\infty,3]$, $[3,4]$ y $[4,+\infty)$ . Veamos qué forma tiene, en cada intervalo, los términos del valor absoluto.

| **Caso (I):** | **Caso (II):** | **Caso (III):** |
|---|---|---|
| Están los valores que son: $x \leq 3$ y $x \leq 4$<br>Ecuación $(2)$ y $(4)$<br>$\lvert x-3\rvert + \lvert x-4\rvert \geq 5$<br>$3-x+4-x \geq 5$<br>$7-2x \geq 5$<br>$7-5 \geq 2x$<br>$2 \geq 2x$<br>$\frac{2}{2} \geq x$<br>$1 \geq x$<br>**Conjunto solución:**<br>(-∞, 3] | Están los valores que son: $3 < x \leq 4$<br>Ecuación $(1)$ y $(4)$<br>$\lvert x-3\rvert + \lvert x-4\rvert \geq 5$<br>$x-3+4-x \geq 5$<br>$1 \geq 5$<br>No existen valores en este intervalo para mi inecuación:<br>$\lvert x-3\rvert + \lvert x-4\rvert \geq 5$<br>**Conjunto solución:**<br>**No existe** | Están los valores que son:<br>Ecuación $(1)$ y $(3)$<br>$\lvert x-3\rvert + \lvert x-4\rvert \geq 5$<br>$x-3+x-4 \geq 5$<br>$2x-7 \geq 5$<br>$2x \geq 5+7$<br>$2x \geq 12$<br>$x \geq \frac{12}{2}$<br>$x \geq 6$<br>**Conjunto solución:**<br>[6, +∞) |

Por último, el conjunto solución será la unión de los conjuntos solución evaluado por intervalos, es decir:

$$(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$$

**Respuesta**

El conjunto solución es: $C_s = \{x; x \in (-\infty, 3] \cup [6, +\infty)\}$

## Función exponencial y logarítmica

**138.** Alison se prepara para un examen de admisión a la universidad y le plantean el siguiente ejercicio. Usar las propiedades logarítmicas y desarrollar la expresión, además determinar para que valores está bien definida.

$$\log \frac{x^2}{\sqrt[3]{x-3} \cdot (x+z)^2}$$

### Resolución

Se debe usar las propiedades de logaritmos.

$$\log \frac{x^2}{\sqrt[3]{x-3} \cdot (x+z)^2} \Longrightarrow \log x^2 - \log \sqrt[3]{x-3} \cdot (x+z)^2$$

teorema $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0,\ a \neq 0, M, N > 0,$ $\boxed{\log_a M - \log_a N = \log_a \left(\frac{M}{N}\right)}$

$$\Longrightarrow \log x^2 - \left(\log \sqrt[3]{x-3} + \log (x+z)^2\right)$$

teorema $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0,\ a \neq 0, M, N > 0,$ $\boxed{\log_a M + \log_a N = \log_a (M \cdot N)}$

$$\Longrightarrow \log x^2 - \left(\log(x-3)^{\frac{1}{3}} + \log(x+z)^2\right)$$

propiedad $\forall a,b,c \in \mathbb{N},\ \boxed{a^{\frac{1}{c}} = \sqrt[c]{a}}$

$$\Longrightarrow 2\log x - \left(\frac{1}{3}\log(x-3) + 2\log(x+z)\right)$$

teorema $\forall a, \in \mathbb{R}, a, > 1$, y $M,N > 0,\ \boxed{\log_b M^n = n\log_b M}$

$$\Longrightarrow 2\log x - \frac{1}{3}\log(x-3) - 2\log(x+z)$$ multiplicando signo

Veamos ahora para qué valores está bien definido el logaritmo.

$$\log\frac{x^2}{\sqrt[3]{x-3}\cdot(x+z)^2} \Longrightarrow \frac{x^2}{\sqrt[3]{x-3}\cdot(x+z)^2} \neq 0$$ pues no está definido, $\log 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 0 \\ \sqrt[3]{x-3}\cdot(x+z)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 0 \\ x-3>0,\ (x+z)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x>3,\ x+z \neq 0 \end{cases}$$

**Respuesta**

Desarrollando el logaritmo será: $2\log x - \frac{1}{3}\log(x-3) - 2\log(x+z)$

Y está bien definida para: $x \neq 0, x > 3$ y $x+z \neq 0$.

**139.** Determinar el valor de $x$ en la ecuación logarítmica:

para $x \neq 1.\ \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{x}+1) = 1 + \log_{\sqrt{3}}\sqrt{x-1}$

## Resolución

Agrupando a un lado de la ecuación solo términos con logaritmos para efectuar las propiedades logarítmicas.

$$\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{x}+1) = 1 + \log_{\sqrt{3}}\sqrt{x-1}$$

$$\Longrightarrow \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{x}+1) - \log_{\sqrt{3}}\sqrt{x-1} = 1$$ agrupando términos semejantes

$$\Longrightarrow \log_{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-1}}\right) = 1$$

teorema $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0,\ a \neq 0, M,N > 0,\ \boxed{\log_a M - \log_a N = \log_a\left(\frac{M}{N}\right)}$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{3}^1$$

definición $\forall x,y \in \mathbb{R}, x > 0, b > 0, b \neq 0\ \boxed{\log_b x = y \Leftrightarrow x = b^y}$

$\Longrightarrow \sqrt{x}+1=\sqrt{3}\cdot\sqrt{x-1}$ propiedad $\forall a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0,$ $\boxed{a\cdot b=c\Longrightarrow b=\frac{c}{a}}$

$\Longrightarrow \sqrt{x}+1=\sqrt{3\cdot(x-1)}$ propiedades $\forall a,b,c\in\mathbb{N},$ $\boxed{\sqrt[c]{a}\cdot\sqrt[c]{b}=\sqrt[c]{ab}}$

$\Longrightarrow \sqrt{x}+1=\sqrt{3x-3}$ distribuyendo

$\Longrightarrow (\sqrt{x}+1)^2=\left(\sqrt{3x-3}\right)^2$ elevando ambos términos al cuadrado $()^2$

$\Longrightarrow \sqrt{x}^2+2\cdot\sqrt{x}\cdot 1+1^2=\left(\sqrt{3x-3}\right)^2$

$\Longrightarrow x+2\sqrt{x}+1=3x-3$ propiedad $\forall a\in\mathbb{R}, \sqrt{a^2}=a$

$\Longrightarrow 2\sqrt{x}=3x-x-3-1$ ordenamos términos semejantes

$\Longrightarrow 2\sqrt{x}=2x-4;$

$\Longrightarrow 2\sqrt{x}=2(x-2)$ factorizando

$\Longrightarrow \sqrt{x}=x-2$ ley de simplificación $\forall a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0,$ $\boxed{\frac{ab}{b}=a}$

$\Longrightarrow (\sqrt{x})^2=(x-2)^2$ elevando ambos términos al cuadrado $()^2$

$\Longrightarrow x=x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2$ desarrollamos el cuadrado perfecto

$\Longrightarrow x=x^2-4x+4$ agrupando términos

$\Longrightarrow 0=x^2-5x+4$ factorizando

$\Longrightarrow 0=(x-1)(x-4)$

$\Longrightarrow 0=x-1$ o $0=x-4$

$\Longrightarrow 0=x-4$ pues $x\neq 1$ de hipótesis

$\Longrightarrow 4=x$

**Respuesta**

Así el valor de $x$ es 4.

**140.** La maestra de matemática deja de tarea a Julio, resolver la ecuación exponencial.

$$\frac{e^x+e^{-1}}{e^x-e^{-1}}=\frac{3}{2}$$

**Resolución**

Julio ve conveniente expresar los inversos multiplicativos como una fracción, para así sacar el m.c.d. y desarrollar el ejercicio.

$$\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{3}{2}\Longrightarrow\frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{e^x-\frac{1}{e^x}}=\frac{3}{2}$$ propiedad, $\forall a\in\mathbb{R}, \exists a^{-1},$ $\boxed{a^{-1}=\frac{1}{a}}$

$$\Longrightarrow \frac{\dfrac{(e^x)^2+1}{e^x}}{\dfrac{(e^x)^2-1}{e^x}}=\frac{3}{2} \qquad \text{sacando el m.c.d.}$$

$$\Longrightarrow \frac{\big((e^x)^2+1\big)(e^x)}{(e^x)\big((e^x)^2-1\big)}=\frac{3}{2} \qquad \text{propiedad de extremos y medios}$$

$$\Longrightarrow \frac{(e^x)^2+1}{(e^x)^2-1}=\frac{3}{2} \qquad \text{simplificando términos semejantes}$$

$$\Longrightarrow 2\big((e^x)^2+1\big)=3\big((e^x)^2-1\big)$$

propiedad $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$ con $b,d \neq 0$, $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \longrightarrow ad=bc}$

$$\Longrightarrow 2(e^x)^2+2=3(e^x)^2-3$$

$$\Longrightarrow 2+3=3(e^x)^2-2(e^x)^2$$

$$\Longrightarrow 5=(e^x)^2$$

$\Longrightarrow \pm\sqrt{5}=e^x$ propiedad $\forall a \in \mathbb{R}$, $\boxed{a^2=b \longrightarrow a=\pm\sqrt{b}}$

Como solo está definido para valores de logaritmos positivos, sólo tomamos $+\sqrt{5}$, aplicando logaritmo a ambos miembros de la ecuación.

$$\Longrightarrow \ln\sqrt{5}=\ln e^x \quad \Longrightarrow \ln\sqrt{5}=x$$

**Respuesta**

El valor de $x$ es $\ln\sqrt{5}$.

**141.** Determinar los valores de $x,y$ en el sistema logarítmico:

$$\begin{cases} 2y^2+x=75 \\ 2\log y-\log 12=\log x \end{cases}$$

## Resolución

En vez de despejar $x,y$ llevemos alguna variable a función del logaritmo para reemplazar en la otra ecuación.

$$\begin{cases} 2y^2+x=75 \;\ldots\ldots(1) \\ 2\log y-\log 12=\log x \;\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

De la ecuación $(1)$ despejemos "$x$" y apliquemos el logaritmo.

$$2y^2+x=75 \Longrightarrow x=75-2y^2 \qquad \text{despejar } x$$

$$\Longrightarrow x=75-2y^2 \qquad // \log()$$

$$\Longrightarrow \log x=\log(75-2y^2) \;\ldots\ldots(3)$$

Reemplacemos la ecuación (3) en la ecuación (2).

$$2\log y - \log 12 = \log x \Longrightarrow 2\log y - \log 12 = \log(75 - 2y^2)$$

$\Longrightarrow 2\log y - \log(75 - 2y^2) = \log 12$ ordenando términos semejantes

$\Longrightarrow \log y^2 - \log(75 - 2y^2) = \log 12$

teorema $\forall a, \in \mathbb{R}, a, > 1$, y $M, N > 0$, $\boxed{\operatorname{Log}_b M^n = n\log_b M}$

$$\Longrightarrow \log\left(\frac{y^2}{75 - 2y^2}\right) = \log 12$$

teorema $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0,\ a \neq 0, M, N > 0,$ $\boxed{\log_a M - \log_a N = \log_a\left(\frac{M}{N}\right)}$

$$\Longrightarrow \frac{y^2}{75 - 2y^2} = 12$$

propiedad $\forall a \in \mathbb{R}, a > 1$, y $M, N > 0$, $\boxed{\operatorname{Log}_a M = \log_a N \Longrightarrow M = N}$

$\Longrightarrow y^2 = 12(75 - 2y^2)$ por propiedad $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0,$ $\boxed{u = \frac{b}{a} \to au = b}$

$\Longrightarrow y^2 = 900 - 24y^2$

propiedad distributiva $\forall a, b, c \in \mathbb{R},$ $\boxed{a(b - c) = ab - ac}$

$\Longrightarrow y^2 + 24y^2 = 900$ ordenando términos semejantes

$\Longrightarrow 25y^2 = 900$

$\Longrightarrow y^2 = \dfrac{36 \cdot 25}{25}$ propiedad $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0,$ $\boxed{a \cdot b = c \Longrightarrow b = \frac{c}{a}}$

$\Longrightarrow y^2 = 36$ simplificando términos semejantes

$\Longrightarrow y = \pm\sqrt{6^2}$ propiedad $\forall a, b \in \mathbb{R},$ $\boxed{(a)^2 = b \Longrightarrow a = \pm\sqrt{b}}$

$\Longrightarrow y = \pm 6$

Notemos que y tiene que ser positivo, pues en caso contrario no estaría definido en $\log y$, ya que no hay logaritmos negativos. Entonces:

$$\Longrightarrow y = 6 \ldots\ldots (4)$$

Ahora reemplazamos la ecuación (4) en la ecuación (3):

$$x = 75 - 2y^2 \Longrightarrow x = 75 - 2 \cdot 6^2$$
$$\Longrightarrow x = 75 - 72$$
$$\Longrightarrow x = 3$$

**Respuesta**

Entonces los valores de $x$,$y$ son: $x = 3$ y $y = 6$

# Exponentes y radicales

**142.** En la prueba de matemática, el maestro les pide simplificar la expresión:

$$(2^{-n}+3^{-n}+4^{-n})^{\frac{1}{n}}\cdot(6^n+8^n+12^n)^{-\frac{1}{n}}$$

## Resolución

Llevemos los inversos multiplicativos a la forma de una fracción, para así desarrollar el problema.

$$(2^{-n}+3^{-n}+4^{-n})^{\frac{1}{n}}\cdot(6^n+8^n+12^n)^{-\frac{1}{n}}$$

$$\Longrightarrow\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{(6^n+8^n+12^n)^{\frac{1}{n}}}$$ propiedad, $\forall a\in\mathbb{R},\exists a^{-1},\boxed{a^{-1}=\frac{1}{a}}$

$$\Longrightarrow\left(\frac{3^n\cdot4^n+2^n\cdot4^n+2^n\cdot3^n}{2^n\cdot3^n\cdot4^n}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{(6^n+8^n+12^n)^{\frac{1}{n}}}$$ sacando el m.c.d.

$$\Longrightarrow\left(\frac{(3\cdot4)^n+(2\cdot4)^n+(2\cdot3)^n}{(2\cdot3\cdot4)^n}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{(6^n+8^n+12^n)^{\frac{1}{n}}}$$

propiedad de exponente, $\forall a,b,\in\mathbb{R},\forall c\in\mathbb{N},\boxed{a^cb^c=(ab)^c}$

$$\Longrightarrow\left(\frac{(12)^n+(8)^n+(6)^n}{(24)^n}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{(6^n+8^n+12^n)^{\frac{1}{n}}}$$

propiedad, $\forall a,b\in\mathbb{R},b\neq0,\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$

$$\Longrightarrow\frac{(6^n+8^n+12^n)^{\frac{1}{n}}}{(24^n)^{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{1}{(6^n+8^n+12^n)^{\frac{1}{n}}}$$

$$\Longrightarrow\frac{1}{(24^n)^{\frac{1}{n}}}$$ ley de simplificación, $\forall a,b\in\mathbb{R},b\neq0,\boxed{\frac{ab}{b}=a}$

$$\Longrightarrow\frac{1}{24^{\frac{n}{n}}}$$ propiedad, $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\boxed{\left(a^b\right)^c=a^{bc}}$

$$\Longrightarrow\frac{1}{24}$$

**Respuesta**

Simplificando la expresión da como resultado: $\frac{1}{24}$

**143.** Una vez aplicada la propiedad distributiva en:

$$(m^2n^{-2}-m^3n^{-3}+m^4n^{-4})(mn^{-1}+m^2n^{-2})$$

se encuentra un resultado de la forma:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^x+\left(\frac{m}{n}\right)^y$$

Determinar $x+y$.

## Resolución

Desarrollemos toda la expresión dada para agrupar términos semejantes.

$$(m^2n^{-2}-m^3n^{-3}+m^4n^{-4})(mn^{-1}+m^2n^{-2})$$

$$\Longrightarrow m^2n^{-2}(1-mn^{-1}+m^2n^{-2})\cdot mn^{-1}(1+mn^{-1})$$

$$\Longrightarrow m^3n^{-3}(1-mn^{-1}+m^2n^{-2})(1+mn^{-1})$$

propiedad, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, $\boxed{a^b\cdot a^c=a^{b+c}}$

$$\Longrightarrow \frac{m^3}{n^3}\left(1-\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{m}{n}\right)$$

propiedad, $\forall a\in\mathbb{R},\exists a^{-1}$, $\boxed{a^{-1}=\frac{1}{a}}$

$$\Longrightarrow \frac{m^3}{n^3}\left(1+\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\right)\left(\frac{m}{n}+1\right)$$

factorizando

$$\Longrightarrow \frac{m^3}{n^3}\left(\frac{m}{n}+1+\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}+1\right)\right)$$

propiedad distributiva

$$\Longrightarrow \frac{m^3}{n^3}\left(\frac{m}{n}+1+\frac{m}{n}\left(\frac{m^2}{n^2}-1^2\right)\right)$$

diferencia de cuadrados

$$\Longrightarrow \frac{m^3}{n^3}\left(\frac{m}{n}+1+\frac{m^3}{n^3}-\frac{m}{n}\right)$$

propiedad distributiva

$$\Longrightarrow \frac{m^3}{n^3}\left(1+\frac{m^3}{n^3}\right)$$

cancelando términos semejantes

$$\Longrightarrow \frac{m^3}{n^3}+\frac{m^6}{n^6}$$

propiedad distributiva

$$\Longrightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^3+\left(\frac{m}{n}\right)^6$$

propiedad, $\forall a,b,c\in\mathbb{R},b\neq 0$, $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^c=\frac{a^c}{b^c}}$

Por tanto, $x=3$ y $y=6$.

**Respuesta**

Así la suma de $x+y$ es 9.

**144.** Laura quiere racionalizar la expresión: $\dfrac{x^3-x-1}{\sqrt[3]{x+1}-x}$

## Resolución

Recordando la definición de diferencia de cubos:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + a^2)$$

$$\frac{x^3-x-1}{\sqrt[3]{x+1}-x} \Longrightarrow \frac{x^3-x-1}{\sqrt[3]{x+1}-x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\cdot x+x^2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\cdot x+x^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{(x^3-x-1)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\cdot x+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - x^3}$$

aplicamos la igualdad de diferencia de cubos

$$\Longrightarrow \frac{(x^3-x-1)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\cdot x+x^2\right)}{x+1-x^3}$$

$$\Longrightarrow \frac{(x^3-x-1)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\cdot x+x^2\right)}{-(x^3-x-1)}$$

factorizar el signo $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \boxed{(a-b) = -(b-a)}$

$$\Longrightarrow -\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\cdot x+x^2\right)$$

ley de simplificación $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \boxed{\frac{ab}{b} = a}$

**Respuesta**

El valor determinado es: $-\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\cdot x+x^2\right)$

**145.** Raúl tiene la tarea simplificar la expresión:

$$M = \frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}} + \frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$$

## Resolución

Determinemos el m.c.d para desarrollar el problema.

$$M = \frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}} + \frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$$

$$= \frac{\left(n+2+\sqrt{n^2-4}\right)^2 + \left(n+2-\sqrt{n^2-4}\right)^2}{\left(n+2-\sqrt{n^2-4}\right)\left(n+2+\sqrt{n^2-4}\right)} \quad \text{sacando el m.c.d.}$$

$$= \frac{(n+2)^2 + 2(n+2)\sqrt{n^2-4} + \left(\sqrt{n^2-4}\right)^2 + (n+2)^2 - 2(n+2)\sqrt{n^2-4} + \left(\sqrt{n^2-4}\right)^2}{\left((n+2)^2 - \left(\sqrt{n^2-4}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{2(n+2)^2 + 2(n^2 - 2^2)}{\left((n+2)^2 - (n^2 - 2^2)\right)}$$ simplificando

$$= \frac{2\left((n+2)^2 + (n-2)(n+2)\right)}{\left((n+2)^2 - (n-2)(n+2)\right)}$$ diferencia de cuadrados

$$= \frac{2(n+2)\left((n+2) + (n-2)\right)}{(n+2)\left((n+2) - (n-2)\right)}$$ factorizando términos semejantes

$$= \frac{2(n+2+n-2)}{(n+2-n+2)}$$ ley de simplificación $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \boxed{\frac{ab}{b} = a}$

$$= \frac{2(2n)}{4}$$

$$= n$$

**Respuesta**

La simplificación da como resultado "$n$".

## Progresión aritmética y geométrica

**146.** La suma de 50 términos en una progresión aritmética es de 2550 a una diferencia de 2. Determinar cuál es el primer y el último término de la progresión.

**Resolución**

**Datos**

$S_{50} = 2550$
$d = 2$
$a_1 = ?$
$a_{50} = ?$

Se sabe que la fórmula para hallar el primer término y la sumatoria están dados por:

$$S_{50} = \frac{50(a_1 + a_{50})}{2} \Longrightarrow \frac{2S_{50}}{50} = a_1 + a_{50} \quad (1)$$

$$a_1 = a_{50} - (n-1)d \quad (2)$$

Reemplacemos la ecuación (2) en la ecuación (1).

$$\frac{2S_{50}}{50} = a_1 + a_{50} \Longrightarrow \frac{2S_{50}}{50} = a_{50} - (n-1)d + a_{50}$$

$$\Longrightarrow \frac{2 \cdot 2550}{50} = a_{50} - (50-1)2 + a_{50}$$ reemplazando datos

$$\Longrightarrow 102 = 2a_{50} - 98$$

$$\Longrightarrow 102 + 98 = 2a_{50}$$

$$\Longrightarrow 200 = 2a_{50}$$

$$\Longrightarrow \frac{200}{2} = a_{50} \qquad \text{propiedad,} \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0, \boxed{a \cdot b = c \Longrightarrow b = \frac{c}{a}}$$

$$\Longrightarrow 100 = a_{50} \quad (3) \qquad \text{ley de simplificación} \quad \forall a,b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \boxed{\frac{ab}{b} = a}$$

Reemplazando la ecuación (3) en la ecuación (2).

$$\begin{aligned} a_1 = a_{50} - (n-1)d &\Longrightarrow a_1 = 100 - (50-1)2 \\ &\Longrightarrow a_1 = 100 - 98 \\ &\Longrightarrow a_1 = 2 \end{aligned}$$

**Respuesta**

El primer término es 2 y el último término es 100.

**147.** Determinar 3 números que formen una progresión aritmética, cuando la suma de como resultado 21 y producto 280.

**Resolución**

Llevemos los términos de la progresión aritmética en base a un solo término, es decir:

$$a_1 \underbrace{\quad}_{d} a_2 \underbrace{\quad}_{d} a_3$$

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 = 21 &\Longrightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 21 \\ &\Longrightarrow 3a_1 + 3d = 21 && \text{sumando términos semejantes} \\ &\Longrightarrow 3(a_1 + d) = 21 && \text{factorizando} \\ &\Longrightarrow a_1 + d = 7 \quad (1) && \text{simplificando} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 280 &\Longrightarrow a_1(a_1 + d)(a_1 + d + d) = 280 \\ &\Longrightarrow (7-d)(7)(7+d) = 280 && \text{reemplazando (1)} \\ &\Longrightarrow 7(7^2 - d^2) = 280 \\ &\Longrightarrow 7^2 - d^2 = 40 && \text{simplificando} \\ &\Longrightarrow 49 - 40 = d^2 \\ &\Longrightarrow 9 = d^2 && \boxed{a^2 = b \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{b}} \\ &\Longrightarrow \pm\sqrt{9} + d \\ &\Longrightarrow \pm 3 = d \end{aligned}$$

Si $d = 3$ entonces la progresión aritmética seria: 4,7 y 10

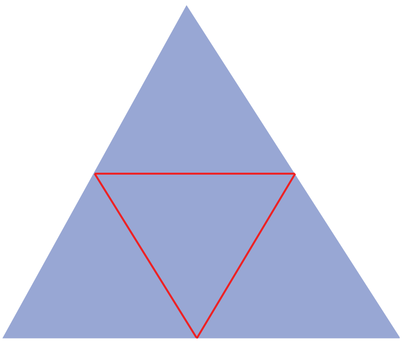
Si $d=-3$ entonces la progresión aritmética seria: $10,7$ y $4$
En ambos casos la suma es $21$ y el producto $280$.

**Respuesta**

Los números serían: $\{4,7,10\}$ o $\{10,7,4\}$

**148.** Un triángulo equilátero se divide en 4 triángulos equiláteros más pequeños de igual área, éstos a su vez se dividen en otros 4 triángulos cada uno; este procedimiento se repite para cada triángulo resultante. ¿Cuántos triángulos se tendrán en total después de realizar 6 veces esta operación?

**Resolución**



Se tiene un triángulo equilátero, si lo dividimos en 4 triángulos iguales nos quedaría la figura, saquemos datos.

$a_1=1+3$

Notemos que $a_1$ es la suma de $2$ números impares.

Si volvemos a hacer la partición tendríamos:

$a_2=1+3+5+7$

Notemos que $a_2$ es la suma de $4$ números impares.

Si volvemos a hacer la partición tendríamos:

$a_3=1+3+5+7+9+11+13+15$

Notemos que $a_3$ es la suma de $8$ números impares.

Si volvemos hacer la partición tendríamos:

$a_4=1+3+5+7+9+11+13+15+\cdots+$

Notemos que $a_4$ es la suma de $16$ números impares.

Teniendo ya un patrón del comportamiento, podemos decir que:

Notemos que $a_5$ es la suma de $32$ números impares.

Notemos que $a_6$ es la suma de $64$ números impares.

Entonces hay que sumar los primeros $64$ números impares lo que sería la cantidad de triángulos que habría en la $6$ta operación.

Recordando la fórmula para sumar $n$ números impares.

$$\sum_{i=1}^{n} 2k+1 = n^2;\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Sumando los 64 primeros números impares se tendrá:

$$\sum_{i=1}^{64} 2k+1 = 64^2 = 4096$$

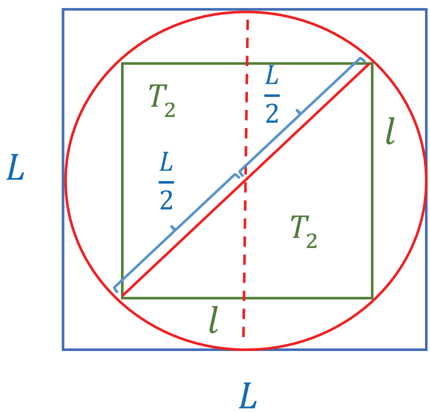
**Respuesta**

Habrán 4096 triángulos.

**149.** En un cuadrado de 100 metros de lado se inscribe un círculo, en este círculo se inscribe un cuadrado, luego un círculo y después un cuadrado, así sucesivamente. Determinar el área del cuadrado número 9.

## Resolución

Guiemos el problema haciendo una gráfica para recopilar datos.




Notemos el área del primer cuadrado (de color azul) es:

$$A_1 = L \cdot L = L^2$$

Notemos el área del segundo cuadrado (de color verde) es:

$$A_2 = l \cdot l = l^2$$

Pero determinemos su área como la suma de dos triángulos, es decir:

$$A_2 = \frac{1}{2}(l \cdot l) + \frac{1}{2}(l \cdot l)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(l^2 + l^2) \qquad \text{factorizando}$$

Por el teorema de Pitágoras, en el triángulo $T_2$ se tiene que:

$$l^2 + l^2 = \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right)^2 = L^2 \ \ldots\ldots (1)$$

Retomando:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot L^2 \qquad \text{por ecuación (1)}$$

Se puede ver que el área del segundo cuadrado es el lado del primer cuadrado elevado al cuadrado sobre 2.

Este proceso pasará para todos los cuadrados que nos tomemos dentro de los círculos del cuadrado, entonces podemos decir:

$$A_1 = L^2$$

$$A_2 = \frac{L^2}{2}$$

$$A_2 = \frac{\frac{L^2}{2}}{2} = \frac{L^2}{2^2}$$

$$A_3 = \frac{\frac{L^2}{2^2}}{2^2} = \frac{L^2}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$A_9 = \frac{L^2}{2^9}$$ es el área del cuadrado número 10

Por hipótesis se sabe que el lado del cuadrado es 100 metros, entonces:

$$A_9 = \frac{L^2}{2^9} \Longrightarrow A_9 = \frac{(100)^2}{2^9} = 19.53$$

**Respuesta**

El área del cuadrado número 9 es: $19.53\ \mathrm{m}^2$

**150.** La suma de los términos es:

$$\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \log a_4 + \log a_5 = \log\left(\frac{9}{2}\right)^5 \text{ y } a_5 + a_7 = 90$$

Determinar el valor de $a_{11}$

## Resolución

Recordemos que la forma de hallar el $n$-ésimo término es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Longrightarrow \begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_3 &= a_1 \cdot r^2 \\ a_4 &= a_1 \cdot r^3 \\ a_5 &= a_1 \cdot r^4 \\ a_6 &= a_1 \cdot r^5 \\ a_7 &= a_1 \cdot r^6 \end{aligned}$$

$$\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \log a_4 + \log a_5 = \log\left(\frac{9}{2}\right)^5$$

$$\Longrightarrow \log(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5) = \log\left(\frac{9}{2}\right)^5$$ propiedad suma de logaritmo

$$\Longrightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = \left(\frac{9}{2}\right)^5$$

propiedad, $\forall a \in \mathbb{R}, a > 1$, y $M, N > 0$, $\boxed{\mathrm{Log}_a M = \log_a N \Longrightarrow M = N}$

$$\Longrightarrow a_1 \cdot a_1 \cdot r \cdot a_1 \cdot r^2 \cdot a_1 \cdot r^3 \cdot a_1 \cdot r^4 = \left(\frac{9}{2}\right)^5$$

$$\Longrightarrow {a_1}^5 \cdot r^{10} = \left(\frac{9}{2}\right)^5$$ propiedad, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{a^b \cdot a^c = a^{b+c}}$

$$\Longrightarrow (a_1 \cdot r^2)^5 = \left(\frac{9}{2}\right)^5$$ propiedad, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c}$

$$\Longrightarrow a_1 \cdot r^2 = \frac{9}{2} \qquad (1)$$

Ahora analicemos:

$$a_5 + a_7 = 90 \Longrightarrow a_1 \cdot r^4 + a_1 \cdot r^6 = 90$$

$$\Longrightarrow a_1 \cdot r^2\,(r^2 + r^4) = 90$$ factorizando

$$\Longrightarrow \frac{9}{2}(r^2 + r^4) = 90$$ reemplazando de ecuación (1)

$$\Longrightarrow r^2 + r^4 = 20$$ simplificando términos semejantes

$$\Longrightarrow r^4 + r^2 - 20 =$$

$$\Longrightarrow (r^2 + 5)(r^2 - 4)$$ factorizando

$$\Longrightarrow r^2 = 5 \text{ o } r^2 = 4$$

$$\Longrightarrow r^2 = 4 \qquad (2)$$

Reemplazamos ecuación (2) en (1)

$$a_1 \cdot r^2 = \frac{9}{2} \Longrightarrow a_1 \cdot 4 = \frac{9}{2} \Longrightarrow a_1 = \frac{9}{8} \qquad (3)$$

Tenemos que encontrar el término $a_{11}$ entonces:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Longrightarrow a_{11} = a_1 \cdot r^{11-1}$$

$$\Longrightarrow a_{11} = a_1 \cdot r^{10}$$

$$\Longrightarrow a_{11} = a_1 \cdot (r^2)^5$$

$$\Longrightarrow a_{11} = \frac{9}{8} \cdot (4)^5$$

$$\Longrightarrow a_{11} = 1152$$

**Respuesta**

El término $a_{11}$ es 1152.

## Básico

**151.** El número 2018 tiene exactamente dos divisores que son números primos. La suma de estos es.

a) 1111 b) 2100 c) 9991 d) 1011

### Resolución

El número 2018 se puede descomponer en factores primos, es decir:

$$2018 = 2 \cdot 1009$$

De donde, 2 y 1009 son números primos, entonces la suma de estos números primos es

$$S_p = 2 + 1009 = 1011 \quad \Rightarrow \quad S_p = 1011$$

**Respuesta:** 1011

**152.** Al realizar las operaciones propuestas con las áreas sombreadas de los tres círculos de áreas que se muestran en la figura. ¿Cuál es el resultado?

a) $\frac{41}{30}$ b) $\frac{43}{30}$ c) $\frac{40}{30}$ d) $\frac{33}{30}$

### Resolución

De la figura mostrada, se deduce las operaciones de la suma de fracciones, es decir:

$$S_F = \frac{3}{5} + \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \quad \Rightarrow \quad S_F = \frac{3}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

Para sumar las fracciones no homogéneas, se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores de 5, 3 y 2.

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad MCM(2,3,5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Luego

$$S_F = \frac{3}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{6 \cdot 3 + 10 \cdot 1 + 15 \cdot 1}{30}$$

$$= \frac{18 + 10 + 15}{30} = \frac{43}{30}$$

**Respuesta:** $\frac{43}{30}$

**153.** Al determinar el mínimo común múltiplo de 5,8,10 y el máximo común divisor de 18,45,63, ¿Cuál es la suma de $MCM+MCD$?

a) 49 b) 21 c) 36 d) 16

**Resolución**

En primer lugar, se calcula mínimo común múltiplo de 5,8,10, descomponiendo en factores primos, es decir:

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 10 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad MCM(5,8,10) = 2^3 \cdot 5 = 40$$

En segundo lugar se calcula el máximo común divisor de 18,45,63.

$$\begin{array}{ccc|c} 18 & 45 & 63 & 3 \\ 6 & 15 & 21 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad MCD(18,45,63) = 3^2 = 9$$

La suma es

$$MCM + MCD = 40 + 9 = 49$$

**Respuesta:** 49

**154.** Si $a$ y $b$ son números enteros positivos, la operación $\otimes$ está definida por la siguiente expresión $a \otimes b = a^b \cdot b^a$. ¿Cuál es el valor de $3 \otimes 2$?

a) 55 b) 6 c) 72 d) 25

**Resolución**

Como $a \otimes b = a^b \cdot b^a$, entonces se identifica los valores $a$=3 y $b$=2. Luego haciendo operación

$$3 \otimes 2 = 3^2 \cdot 2^3 = 9 \cdot 8 = 72 \quad \Rightarrow \quad 3 \otimes 2 = 72$$

**Respuesta:** 72

**155.** El valor de $(-1)^{100} - (-1)^{99} + (-1)^{98} + (-1)^{97} + (-1)^{96} - (-1)^{95}$ es

a) 5 b) 6 c) 10 d) 4

**Resolución**

Se puede ver que cualquier número negativo elevado al exponente par será siempre positivo y cualquier número negativo elevado a exponente impar será siempre negativo. Por ejemplo $(-2)^2 = 4$ y $(-2)^3 = -8$

Luego

$$(-1)^{100}-(-1)^{99}+(-1)^{98}+(-1)^{97}+(-1)^{96}-(-1)^{95}$$
$$=1-(-1)+1+(-1)+1-(-1)$$
$$=1+1+1-1+1+1$$
$$=4$$

**Respuesta:** 4

**156.** En una sustracción, el minuendo es el triple de la diferencia, y la suma de todos los términos de esa sustracción es 510. ¿Cuál es la suma entre el sustraendo y diferencia?

a) 250 b) 300 c) 255 d) 170

**Resolución**

Denotamos los términos de la operación con los siguientes símbolos:

$M$: minuendo
$S$: sustraendo
$D$: diferencia

Del enunciado se sabe que $M = 3D$, reemplazando en la propiedad de la diferencia, se tiene:

$$M - S = D \Rightarrow 3D - S = D$$
$$\Rightarrow S = 2D \quad \dots (1)$$

Además, la suma de todos los términos es:

$$M + S + D = 510 \overset{(1)}{\Rightarrow} 3D + 2D + D = 510$$
$$\Rightarrow 6D = 510$$
$$\Rightarrow D = 85 \quad \dots (2)$$

Luego, (2) en (1), se obtiene:

$$S = 2 \cdot 85 = 170 \Rightarrow S = 170 \quad \dots (3)$$

$$S + D = 170 + 85 = 255 \Rightarrow S + D = 255$$

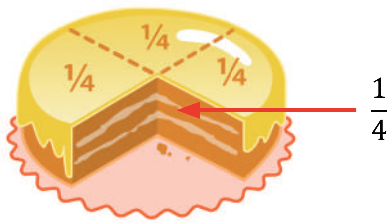
**Respuesta:** 255

**157.** José y Sara se comieron un pastel de chocolate entero. La relación entre la cantidad consumida por José y la cantidad consumida por Sara es de 3 a 1. ¿Qué porcentaje de pastel se comió Sara?

a) 50% b) 75% c) 25% d) 30%

## Resolución

La relación de cantidad es de 3 a 1.




*Fuente: Wiki2.org*

Si el pastel se dividió en 4 pedazos del mismo tamaño, entonces José se comió 3 pedazos y Sara 1 pedazo o bien Sara comió $\frac{1}{4}$ del pastel.
En porcentajes, se tendría

$$S = \frac{1}{4} \cdot 100\% = 0{,}25 \cdot 100\% = 25\% \quad \Rightarrow \quad S = 25\%$$

Es decir, Sara comió 25% de pastel.

**Respuesta:** 25%

**158.** Dado que, $x$ es 40% de 50; 30 es 20% de $y$; 15 es $z$% de 60. ¿A qué equivale $x+y+z$?

a) 195 b) 200 c) 185 d) 210

## Resolución

Del enunciado se tiene:

$$x = 40\% \cdot 50 = \frac{40}{100} \cdot 50 = 20 \quad \Rightarrow \quad x = 20$$

$$30 = 20\% \cdot y = \frac{20}{100} \cdot y \quad \Rightarrow \quad y = 150$$

$$15 = z\% \cdot 60 = \frac{z}{100} \cdot 60 \quad \Rightarrow \quad z = 25$$

Luego:

$$x + y + z = 20 + 150 + 25 = 195$$

$$\Rightarrow \quad x + y + z = 195$$

**Respuesta:** 195

**159.** Resolver la ecuación lineal:

$$-5x+6=10x-9$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

### Resolución

Agrupemos los términos adecuadamente.

$$-5x+6=10x-9 \Rightarrow 6+9=10x+5x$$
$$\Rightarrow \frac{15}{15}=x$$
$$\Rightarrow 1=x$$

**Respuesta:** 1

**160.** Determinar el valor de $x$ en la ecuación lineal:

$$\frac{5}{3}x-1=4+\frac{2}{3}x$$

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8

### Resolución

$$\frac{5}{3}x-1=4+\frac{2}{3}x \Rightarrow \frac{5}{3}x-\frac{2}{3}x=4+1$$
$$\Rightarrow \frac{5x-2x}{3}=4+1$$
$$\Rightarrow \frac{3x}{3}=5$$
$$\Rightarrow x=5$$

**Respuesta:** 5

**161.** Factorizar la expresión dada por:

$$(a+2)^2-(a+2)$$

a) $(a+2)(a-1)$ b) $(a+2)(a+1)$ c) $(a+2)(a+2)$ d) $(a+2)(a-2)$

### Resolución

$$(a+2)^2-(a+2) \Rightarrow (a+2)(a+2-1)$$
$$\Rightarrow (a+2)(a+2-1)$$
$$\Rightarrow (a+2)(a+1)$$

**Respuesta:** $(a+2)(a+1)$

**162.** Hallar el conjunto solución en la inecuación:

$$\frac{5-x}{5}+\frac{2x-1}{3}\leq 3$$

a) $(-\infty,5)$ b) $[-\infty,5]$ c) $(-\infty,5]$ d) $[-\infty,5)$

**Resolución**

$$\frac{5-x}{5}+\frac{2x-1}{3}\leq 3 \Rightarrow \frac{3(5-x)+5(2x-1)}{15}\leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{15-3x+10x-5}{15}\leq 3$$

$$\Rightarrow 10+7x\leq 3\cdot 15$$

$$\Rightarrow 7x\leq 45-10$$

$$\Rightarrow 7x\leq 35$$

$$\Rightarrow x\leq \frac{35}{7}$$

$$\Rightarrow x\leq 5$$

$$\Rightarrow C_s:(-\infty,5]$$

**Respuesta:** $C_s:(-\infty,5]$

**163.** Usando las propiedades de logaritmos, expresar como el logaritmo de un solo argumento:

$$3\log a-2\log b \quad \text{donde} \quad a,b>0$$

a) $\dfrac{\log a^3}{\log b^2}$ b) $\dfrac{3\log a}{2\log b}$ c) $\dfrac{3}{2}\log\dfrac{a}{b}$ d) $\log\dfrac{a^3}{b^2}$

**Resolución**

$$3\log a-2\log b \Rightarrow \log a^3-\log b^2$$

$$\Rightarrow \log\frac{a^3}{b^2}$$

**Respuesta:** $\log\dfrac{a^3}{b^2}$

**164.** Simplificar la expresión dada por:

$$\frac{(2x^2)^2(3x^3)}{(x^4)^3}\cdot\left(3\cdot\sqrt[100]{x^{99}}\right)^0$$

a) $12x$ b) $12x^2$ c) $12x^3$ d) $12x^4$

**Resolución**

$$\frac{(2x^2)^2(3x^3)}{(x^2)^3}\cdot\left(3\cdot\sqrt[100]{x^{99}}\right)^0 \Rightarrow \frac{4x^4\cdot 3x^3}{x^6}\cdot 1$$

$$\Rightarrow \frac{12x^7}{x^6}$$

$$\Rightarrow 12x$$

**Respuesta:** $12x$

**165.** Simplificar la expresión dada por:

$$\sqrt[4]{\frac{x^7y^{12}}{25x}}$$

a) $y^3\cdot\sqrt[2]{\frac{x}{5}}$  b) $xy^3\cdot\sqrt[2]{\frac{x}{5}}$  c) $y^3\cdot\sqrt[2]{\frac{1}{5}}$  d) $xy^4\cdot\sqrt[2]{\frac{x}{5}}$

**Resolución**

$$\sqrt[4]{\frac{x^7y^{12}}{25x}} \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{x^6(y^3)^4}{5^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{\frac{x^4x^2(y^3)^4}{5^2}}$$

$$\Rightarrow xy^3\cdot\sqrt[4]{\frac{x^2}{5^2}}$$

$$\Rightarrow xy^3\cdot\sqrt[2]{\sqrt[2]{\frac{x^2}{5^2}}}$$

$$\Rightarrow xy^3\cdot\sqrt[2]{\frac{x}{5}}$$

**Respuesta:** $xy^3\cdot\sqrt[2]{\frac{x}{5}}$

**166.** Si en una progresión aritmética se sabe que el primer término es -16, el ultimo término es 32 y la suma de los $n$ primeros términos es 200. Hallar la cantidad de términos de la progresión.

a) 20  b) 25  c) 30  d) 35

**Datos**

$a_1 = -16$
$a_2 = 32$
$S_n = 200$

**Resolución**

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_2)}{2} \Rightarrow 2S_n = n(a_1 + a_2)$$

$$\Rightarrow \frac{2S_n}{a_1 + a_2} = n$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot 200}{-16 + 32} = n$$

$$\Rightarrow \frac{400}{16} = n$$

$$\Rightarrow 25 = n$$

**Respuesta:** 25

## Intermedio

**167.** Dada la expresión

$$4 \cdot 10^m = \sqrt[3]{\frac{(0{,}004)^4 \cdot (0{,}0036)}{(120000)^2}}$$

Cuál es el valor de $m^2$+6.

a) 70 b) 80 c) 60 d) 75

**Resolución**

En la cantidad sub radical, donde aparecen los números decimales se pueden convertir en enteros, aplicando notación científica, es decir:

$0{,}004 = 4 \times 10^{-3}$, $0{,}0036 = 36 \times 10^{-4}$, $120\ 000 = 12 \times 10^4$

Luego

$$\sqrt[3]{\frac{(0{,}004)^4 \cdot (0{,}0036)}{(120\ 000)^2}} = \sqrt[3]{\frac{(4 \times 10^{-3})^4 \cdot (36 \times 10^{-4})}{(12 \times 10^4)^2}} = 4 \cdot 10^m$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{4^4 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 10^{-4}}{4^2 \cdot 3^2 \cdot 10^8}} = 4 \cdot 10^m$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{4^{4+1} \cdot 10^{-12-4} \cdot 4 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 3^2 \cdot 10^8}} = 4 \cdot 10^m$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{4^5 \cdot 10^{-16} \cdot 4^{-2} \cdot 10^{-8}} = 4 \cdot 10^m$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 10^{-8} = 4 \cdot 10^m$$

Simplificando

$$\Rightarrow 10^{-8} = 10^m$$

$$\Rightarrow m = -8 \quad \text{Propiedad de bases iguales}$$

Luego,

$$m^2 + 6 = (-8)^2 + 6 = 64 + 6 = 70$$

$$\Rightarrow m^2 + 6 = 70$$

**Respuesta:** 70

**168.** En la reunión de un barrio en una población, hay 5 hombres más que mujeres, luego llega un número de personas cuyo número era igual al de los hombres inicialmente presentes, de modo que en la reunión todos están en parejas y hay 50 hombres en total. Hallar el número de mujeres inicialmente presentes.

a) 10 b) 20 c) 30 d) 40

### Resolución

Sean:
$H_o$ y $M_o$: hombres y mujeres al inicio de la reunión.
$H_1$ y $M_1$: hombres y mujeres que se incluyen a la reunión.
Del enunciado se plantea, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} H_o = M_o + 5 & \dots (1) \\ H_1 + M_1 = H_o & \dots (2) \\ M_1 + H_o = 50 & \dots (3) \\ M_o + H_1 = 50 & \dots (4) \end{cases}$$

Sumando (3) y (4), se tiene

$$H_1 + M_1 + H_0 + M_o = 100 \quad \dots (5)$$

Luego, (1) y (2) en (5), se obtiene el número de hombres:

$$H_0 + M_0 + H_0 - 5 = 100 \Rightarrow H_0 = 35 \quad \dots (6))$$

Finalmente, (6) en (1), se obtiene el número de mujeres:

$$35 = M_o + 5 \Rightarrow M_o = 30$$

**Respuesta:** 30

**169.** Dada la expresión:

$$F = \left[\frac{3^{2-k} \cdot 2^{\frac{1}{k}+2}}{4\sqrt{3^{4-2k}}}\right]^k$$

Calcular el valor de $X = F^{-F}$.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{4}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{1}{4}$

### Resolución

$$F=\left[\frac{3^{2-k}\cdot 2^{\frac{1}{k}+2}}{4\sqrt{3^{4-2k}}}\right]^k=\left[\frac{3^{2-k}\cdot 2^{\frac{1}{k}+2}}{2^2\cdot 3^{\frac{4-2k}{2}}}\right]^k=\left[\frac{3^{2-k}\cdot 2^{\frac{1}{k}+2}}{2^2\cdot 3^{2-k}}\right]^k$$

$$=\left[3^{2-k-(2-k)}\cdot 2^{\frac{1}{k}+2-2}\right]^k=\left[3^0\cdot 2^{\frac{1}{k}}\right]^k$$

$$=\left[1\cdot 2^{\frac{1}{k}}\right]^k=2^{\frac{k}{k}}=2^1=2\Rightarrow F=2$$

Luego

$$X=F^{-F}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad X=\frac{1}{4}$$

**Respuesta:** $\frac{1}{4}$

**170.** Si el máximo común divisor de tres números enteros positivos es 480, determine la cantidad de divisores comunes de dichos números.

a) 24 b) 34 c) 14 d) 10

### Resolución

Sean los números $A$, $B$ y $C$, tales que $MCD(A;B;C)=480$, la descomposición canónica de 480 es

$$480=2^5\cdot 3\cdot 5$$

Por la propiedad de cantidad de divisores ($CD$), se tiene:

$$CD(480)=(5+1)(1+1)(1+1)=6\cdot 2\cdot 2=24$$

Calculando, la cantidad de divisores comunes de $A$, $B$ y $C$ es 24.

**Respuesta:** 24

**171.** En una prueba de matemática, Carmen respondió correctamente el 70% de las 10 preguntas de opción múltiple y el 60 % de las 20 preguntas de respuesta corta. ¿Qué porcentaje de las 30 preguntas del examen respondió correctamente?

a) 75% b) 85% c) 55% d) 63%

### Resolución

De las 10 preguntas de opción múltiple, Carmen acertó 70%, es decir:

$$70\%\cdot 10=\frac{70}{100}\cdot 10=7$$

Las $20$ preguntas de respuesta corta, Carmen acertó el $60\%$, es decir:

$$60\% \cdot 20 = \frac{60}{100} \cdot 20 = 12$$

En total

$$7 + 12 = 19$$

Carmen respondió $19$ de las $30$ preguntas correctas, luego en porcentajes, se tiene:

$$\frac{19}{30} \cdot 100\% = 0{,}63 \cdot 100\% = 63\%$$

Así que Carmen respondió $63\%$ correctamente.

**Respuesta:** $63\%$

**172.** Simplificar y racionalizar la expresión siguiente:

$$x = \sqrt{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+2}}$$

Y calcular el valor de $A = x^2 + 2$

a) $\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $5$

## Resolución

Elevando al cuadrado la expresión dada:

$$x^2 = \left(\sqrt{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \sqrt{5} + 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{x}+2}}{\sqrt{\sqrt{x}+2}} + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

Racionalizando

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}+2} \cdot \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}$$

Diferencia de cuadrados

$$= \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}-2}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}-2}{5-4}$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{5} - 2 = 2\sqrt{5} - 2$$

$$\Rightarrow x^2 = 2\sqrt{5} - 2$$

Luego

$$A = x^2 + 2 = 2\sqrt{5} - 2 + 2 = 2\sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad A = 2\sqrt{5}$$

**Respuesta:** $2\sqrt{5}$

**173.** Se tiene una mezcla de alcohol desinfectante de 240 litros, donde el volumen de agua representa el 60% del volumen de alcohol puro. ¿Cuántos litros de alcohol puro se debe agregar a la mezcla para obtener una mezcla alcohólica desinfectante de 80 %?

a) 210 b) 250 c) 96 d) 75

**Resolución**

Sean

$x$: cantidad de alcohol al principio.
$y$: litros de alcohol para agregar la mezcla.
Por el enunciado del problema:

$$V_{alcohol} + V_{agua} = 240\ Litros \quad \Longrightarrow \quad x + 60\%x = 240$$

$$\Longrightarrow \quad x + \frac{60}{100} \cdot x = 240$$

$$\Longrightarrow \quad x = 150 \qquad (1)$$

Luego

$$x + y = 80\%(240 + y) \quad \Longrightarrow \quad x + y = \frac{8}{10} \cdot (240 + y)$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad x + y = \frac{8}{10} \cdot (240 + y)$$

$$\Longrightarrow \quad y - \frac{8}{10} \cdot y = 42$$

$$\Longrightarrow \quad y\left(1 - \frac{8}{10}\right) = 42$$

$$\Longrightarrow \quad y = 210$$

Se debe agregar 210 *Litros* de alcohol puro.

**Respuesta:** 210

**174.** Simplificar la siguiente expresión:

$$M = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

Si $M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, determinar el valor de $\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}\right)^2$.

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20

**Resolución**

Note que la expresión dada es una fracción compuesta.

$$F = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \underbrace{\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}_{F-1}}}$$

Luego, la fracción se reduce a:

$$F = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + F - 1}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \boxed{\cfrac{1}{F + 1}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{3F + 3 + 1}{F + 1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{3F + 4}{F + 1}} = 1 + \frac{F + 1}{3F + 4}$$

$$= \frac{3F + 4 + F + 1}{3F + 4} = \frac{4F + 5}{3F + 4}$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{4F + 5}{3F + 4}$$

De donde:

$$F(3F + 4) = 4F + 5 \quad \Rightarrow \quad 3F^2 + 4F - 4F - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3F^2 = 5$$

$$\Rightarrow \quad F^2 = \frac{5}{3}$$

Considerando la parte positiva

$$\Rightarrow \quad F = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

Por el dato, donde se identifica $\sqrt{x} = \sqrt{5}$ y $\sqrt{y} = \sqrt{3}$, se realiza:

$$(\sqrt{x}\cdot\sqrt{y})^2 = \left(\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{5\cdot 3}\right)^2 = \left(\sqrt{15}\right)^2 = 15$$

$$\Rightarrow \quad (\sqrt{x}\cdot\sqrt{y})^2 = 15$$

**Respuesta:** 15

**175.** Hallar el valor de $x$, en la ecuación dada por:

$$\frac{2x}{x+3} + \frac{5}{x} = \frac{18}{x^2+3x} \quad \text{para} \quad x \neq \{0,-3\}.$$

a) $\left\{-3,\frac{1}{2}\right\}$ b) $-3$ c) $3$ d) $\frac{1}{2}$

## Resolución

$$\frac{2x}{x+3} + \frac{5}{x} = \frac{18}{x^2+3x} \Rightarrow \frac{2x^2+5(x+3)}{x(x+3)} = \frac{18}{x(x+3)}$$

$$\Rightarrow 2x^2+5(x+3) = 18$$

$$\Rightarrow 2x^2+5x+15 = 18$$

$$\Rightarrow 2x^2+5x-3 = 0$$

Sea $a = 2, b = 5$ y $c = -3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5+7}{4} \text{ o } x = \frac{-5-7}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{4} \text{ o } x = -\frac{12}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ o } x = -3$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$ por la condición del problema

**Respuesta:** $\frac{1}{2}$

**176.** Factorizar y simplificar la expresión dada por:

$$\frac{\frac{x}{x+2} - \frac{4}{x+2}}{x-3-\frac{6}{x+2}}$$

a) $1$ b) $\frac{1}{x-3}$ c) $3$ d) $\frac{1}{x+3}$

## Resolución

$$\frac{\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{4}{x+2}}{x-3-\dfrac{6}{x+2}} \Rightarrow \frac{\dfrac{x-4}{x+2}}{\dfrac{x(x+2)-3(x+2)-6}{x+2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{x-4}{x+2}}{\dfrac{x^2+2x-3x-6-6}{x+2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{x-4}{x+2}}{\dfrac{x^2-x-12}{x+2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{x-4}{x+2}}{\dfrac{(x-4)(x+3)}{x+2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-4)(x+2)}{(x+2)(x-4)(x+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+3}$$

**Respuesta:** $\dfrac{1}{x+3}$

**177.** Determinar el conjunto solución en la inecuación:

$$\frac{x-2}{x+3} \geq \frac{x-4}{x+5}$$

a) $[-5,-3] \cup \left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

b) $(-5,-3) \cup \left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

c) $(-5,-3] \cup \left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

d) $(-5,-3) \cup \left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

## Resolución

$$\frac{x-2}{x+3} \geq \frac{x-4}{x+5} \Rightarrow \frac{x-2}{x+3} \geq \frac{x-4}{x+5}$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x+3} - \frac{x-4}{x+5} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)(x-2)-(x+3)(x-4)}{(x+3)(x+5)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2-2x+5x-10)-(x^2-4x+3x-12)}{(x+3)(x+5)} \geq 0$$

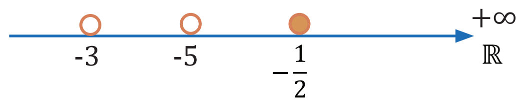
$$\Rightarrow \frac{4x+2}{(x+3)(x+5)} \geq 0$$

Determinemos los puntos críticos.

$$\frac{4x+2}{(x+3)(x+5)} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x+2=0 \\ x+3=0 \\ x+5=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=-3 \\ x=-5 \end{cases}$$

Todos los puntos críticos son de multiplicidad impar, por tanto, al ser evaluados en los intervalos, los valores de verdad se intercalan.

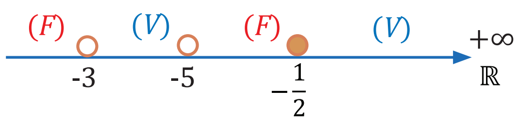



Tomamos el valor $0 \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

$$\frac{4x+2}{(x+3)(x+5)} \geq 0 \Rightarrow \frac{4\cdot 0+2}{(0+3)(0+5)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{15} \geq 0$$

Entonces los valores de verdad serán:




El conjunto solución está en los intervalos:

$$(-5,-3) \cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

**Respuesta:**
$(-5,-3) \cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Determinar el valor de $x$ en la ecuación logarítmica:

$$\frac{3}{\log_x 27}+\frac{3}{\log_{2x} 27}+\frac{3}{\log_{4x} 27}=6$$

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{6}{2}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{11}{2}$

**Resolución**

$$\frac{3}{\log_x 27}+\frac{3}{\log_{2x} 27}+\frac{3}{\log_{4x} 27}=6 \Rightarrow \frac{3}{\frac{\log 27}{\log x}}+\frac{3}{\frac{\log 27}{\log 2x}}+\frac{3}{\frac{\log 27}{\log 4x}}=6$$

$$\Longrightarrow \frac{3\log x}{\log 27}+\frac{3\log 2x}{\log 27}+\frac{3\log 4x}{\log 27}=6$$

$$\Longrightarrow \frac{3\log x}{\log 3^3}+\frac{3(\log 2+\log x)}{\log 3^3}+\frac{3(\log 4+\log x)}{\log 3^3}=6$$

$$\Longrightarrow \frac{3\log x}{3\log 3}+\frac{3(\log 2+\log x)}{3\log 3}+\frac{3(\log 2^2+\log x)}{3\log 3}=6$$

$$\Longrightarrow \frac{\log x}{\log 3}+\frac{\log 2+\log x}{\log 3}+\frac{\log 2^2+\log x}{\log 3}=6$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\log 3}(\log x+\log 2+\log x+\log 2^2+\log x)=6$$

$$\Longrightarrow \log x+\log 2+\log x+\log 2^2+\log x=6\log 3$$

$$\Longrightarrow 3\log x=6\log 3-\log 2-\log 2^2$$

$$\Longrightarrow 3\log x=6\log 3-\log 2-2\log 2$$

$$\Longrightarrow 3\log x=6\log 3-3\log 2$$

$$\Longrightarrow 3\log x=3(2\log 3-\log 2)$$

$$\Longrightarrow \log x=2\log 3-\log 2$$

$$\Longrightarrow \log x=\log 3^2-\log 2$$

$$\Longrightarrow \log x=\log\frac{3^2}{2}$$

$$\Longrightarrow x=\frac{9}{2}$$

**Respuesta:** $\frac{9}{2}$

**178.** Resolver la ecuación exponencial dada por:

$$2^{-2x}+2^{-x}=2$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

## Resolución

$$2^{-2x}+2^{-x}=2 \Rightarrow (2^{-x})^2+2^{-x}=2$$

Sea $u=2^{-x}$

$$(2^{-x})^2+2^{-x}=2 \Rightarrow u^2+u=2$$
$$\Rightarrow u^2+u-2=0$$
$$\Rightarrow (u+2)(u-1)=0$$
$$\Rightarrow u=-2 \text{ o } u=1$$

Reemplazando $u$:

$u=2^{-x} \Rightarrow -2=2^{-x}$ o $1=2^{-x}$

$\Rightarrow 2^0=2^{-x}$ pues $-2=2^{-x}$ no me da ningún dato sobre el valore de $x$ aplicando propiedades de exponenciales.

$\Rightarrow 0=-x$

$\Rightarrow 0=x$

**Respuesta:** $0$

**179.** Usar las propiedades de exponentes para simplificar la expresión:

$$\frac{\left[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{4}}\right]^4}{(x^2+y^2)^{-2}}$$

a) $x^2+y^2$ b) $(x^2+y^2)^2$ c) $(x^2+y^2)^3$ d) $(x^2+y^2)^4$

## Resolución

$$\frac{\left[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{4}}\right]^4}{(x^2+y^2)^{-2}} \Rightarrow \frac{(x^2+y^2)^{\frac{4}{2}}(x^2+y^2)^{-\frac{3\cdot4}{4}}}{(x^2+y^2)^{-2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2+y^2)^2(x^2+y^2)^{-3}}{(x^2+y^2)^{-2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2+y^2)^{2-3}}{(x^2+y^2)^{-2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2+y^2)^{-1}}{(x^2+y^2)^{-2}}$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2)^{-1-(-2)}$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2)^{-1+2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2$$

**Respuesta:** $x^2+y^2$

**180.** Racionalizar la expresión dada por: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$ b) $\dfrac{2-\sqrt{6}+\sqrt{10}}{4}$ c) $\dfrac{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$ d) $\dfrac{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{4}$

**Resolución**

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}\cdot\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}\left((\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\right)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}\sqrt{5}}{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}\sqrt{5}}{2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3-5}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}\sqrt{5}}{2\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{5}}{2(\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{4}$$

**Respuesta:** $\dfrac{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{4}$

**181.** Determinar la sucesión de 4 términos, cuyo primer y cuarto término sean 9 y $-1$, de tal manera que los tres primeros números formen una progresión geométrica y los últimos 3, una progresión aritmética.

a) $\left\{a_1=9, a_2=\frac{3}{2}, a_3=\frac{1}{4}, a_4=-1,\right\}$

b) $\{a_1=9, a_2=3, a_3=-1\}$

c) $\left\{a_1=9, a_2=\frac{3}{2}, a_3=\frac{1}{4}, a_4=-1,\right\}$ o $\{a_1=9, a_2=3, a_3=-1\}$

**Datos**

$a_1 = 9$

$a_2 = ?$

$a_3 = ?$

$a_4 = -1$

**Resolución**

Fórmula de la razón en una progresión geométrica.

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Longrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{a_2}{a_1} \\ r = \dfrac{a_3}{a_2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \quad \Longrightarrow (a_2)^2 = a_1 \cdot a_3$$

$$\Longrightarrow (a_2)^2 = 9 \cdot a_3 \qquad (1)$$

Fórmula de la diferencia en una progresión aritmética.

$$d = a_n - a_{n-1} \Longrightarrow \begin{cases} d = a_3 - a_2 \\ d = a_4 - a_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow a_3 - a_2 = a_4 - a_3$$

$$\Longrightarrow 2a_3 - a_4 = a_2$$

$$\Longrightarrow 2a_3 - (-1) = a_2$$

$$\Longrightarrow 2a_3 + 1 = a_2 \qquad (2)$$

Reemplazando la ecuación (2) en (1)

$$(a_2)^2 = 9 \cdot a_3 \Longrightarrow (2a_3 + 1)^2 = 9a_3$$

$$\Longrightarrow 4(a_3)^2 + 4a_3 + 1 = 9a_3$$

$$\Longrightarrow 4(a_3)^2 - 5a_3 + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow (4a_3 - 1)(a_3 - 1) = 0$$

$$\Longrightarrow a_3 = \frac{1}{4} \text{ o } a_3 = 1 \qquad (3)$$

Reemplazando ecuación (3) en (2)

$$2a_3 - (-1) = a_2 \Longrightarrow a_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} - (-1) \text{ o } a_2 = 2 \cdot 1 - (-1)$$

$$\Longrightarrow a_2 = \frac{3}{2} \text{ o } a_2 = 3$$

Entonces: $\left\{a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{1}{4}\right\}$ o $\{a_2 = 3, a_3 = 1\}$

Así las soluciones podrían ser:

$$\left\{a_1 = 9, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = -1,\right\} \text{ o } \{a_1 = 9, a_2 = 3, a_3 = -1\}$$

**Respuesta:** $\left\{a_1 = 9, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = -1,\right\}$ o $\{a_1 = 9, a_2 = 3, a_3 = -1\}$

## Avanzado

**182.** Sandra elige un número del 1 al 10. Benito suma 5 a este número y le designa a su resultado con $b$. Carlos resta 5 al número de Sandra y designa a su resultado con $c$. ¿Cuál es el valor de $b$- $c$ ?

a) 10 b) 15 c) 20 d) 25

### Resolución

Sean

$b$: el resultado de Benito es 5 más que el número de Sandra.

$c$: el resultado de Carlos es 5 menos que el número de Sandra.

Ahora la diferencia entre el resultado de Benito y el resultado de Carlos es $b$ - $c = 10$, es decir:

$$\begin{array}{rl} & x+5=b \\ - & x-5=c \\ \hline & 10=b-c \end{array}$$

Por ejemplo, si Sandra elige 8 entonces

$$b = 8 + 5 = 13 \text{ y } c = 8 - 5 = 3$$

Luego

$$b - c = 13 - 3 = 10 \quad \Rightarrow \quad b - c = 10$$

**Respuesta:** 10

**183.** Sea $c \cdot b = 8$, si $c > 0$, calcule $a + b + c$ de la proporción:

$$\frac{a}{b+3} = \frac{c^2}{8} = \frac{4b}{c}$$

a) 30 b) 38 c) 15 d) 16

### Resolución

Tomando las dos últimas proporciones y multiplicando por una cantidad $c$ a la última proporción, es decir:

$$\frac{c^2}{8} = \frac{4b}{c} \cdot \frac{c}{c} \Rightarrow \frac{c^2}{8} = \frac{4(c \cdot b)}{c^2}$$

Como $c \cdot b = 8$

$$\Rightarrow \frac{c^2}{8} = \frac{4 \cdot 8}{c^2} = \frac{32}{c^2}$$

$$\Rightarrow c^4 = 256 \qquad // \sqrt[4]{\ }$$

$$\Rightarrow c = \sqrt[4]{256} = 4$$

Luego, $c = 4$ en la condición, se tiene

$$c \cdot b = 8 \implies 4 \cdot b = 8 \implies b = 2$$

Por otro lado, reemplazamos $b = 2$ y $c = 4$ en las dos primeras igualdades de la proporción:

$$\frac{a}{b+3} = \frac{c^2}{8} \implies \frac{a}{2+3} = \frac{4^2}{8} \implies \frac{a}{5} = 2 \implies a = 10$$

Finalmente, la suma pedida es

$$a + b + c = 10 + 2 + 4 = 16 \implies a + b + c = 16$$

**Respuesta:** 16

**184.** Hallar el valor de:

$$H = \left[\left(\frac{1}{2^{-1}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{2(16)^{8^{-3^{-1}}}}$$

a) 16 b) 25 c) 36 d) 49

**Resolución**

Note que los exponentes se pueden escribir como:

$$3^{-1} = \frac{1}{3} \implies 8^{-3^{-1}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{1}{2}$$

Luego, la expresión queda

$$H = \left[\left(\frac{1}{2^{-1}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{2(16)^{\frac{1}{2}}} = \left[\left(\frac{1}{2^{-1}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{2\sqrt{16}} = \left[\left(\frac{1}{2^{-1}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{2^4}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2^{-1}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{16} = (2)^{\frac{16}{4}} = 2^4 = 16$$

**Respuesta:** 16

**185.** Tres personas trabajan juntos 8 horas diarias durante 12 días en la construcción de una cancha de 100 metros cuadrados de área. ¿Cuántos días necesitarán 8 personas, trabajando 6 horas diarias, para hacer una cancha de similar característica, pero con 80 metros cuadrados de área?

a) 5 b) 4 c) 6 d) 7

## Resolución

Planteando regla de tres compuesta con los datos del problema.

| **Días** | | **Horas** | | **Personas** | | **Área** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | $\longrightarrow$ | 8 | $\longrightarrow$ | 3 | $\times$ | 100 |
| $x$ | $\longrightarrow$ | 6 | $\longrightarrow$ | 8 | | 80 |

Luego,

$$x = \frac{10 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 80}{6 \cdot 8 \cdot 100} = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = 4\, Días$$

8 personas, 6 horas al día, necesitan 4 días para hacer una cancha de 80 metros de área.

**Respuesta:** 4

**186.** Determinar el menor número que debe multiplicar a 1470 para que resulte un cuadrado perfecto.

a) 15 b) 25 c) 30 d) 47

## Resolución

Sea $N$ un número menor y $k \in \mathbb{N}$, de modo que

$$1470 \cdot N = k^2 \qquad (1)$$

Descomponiendo 1470 en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 1470 & 2 \\ 735 & 3 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \overset{(DC)}{\Longrightarrow} \quad 1470 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

Luego en (1) se tiene:

$$\underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2}_{(DC)} \cdot N = k^2$$

Para generar el cuadrado de la potencia perfecta, se debe completar los exponentes de la descomposición canónica ($DC$), es decir

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot p^2 \text{, donde } p = \{1,2,3,5\}$$

Como N es mínimo, entonces $p = 1$

Luego

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 = 6 \cdot 5 = 30$$

**Respuesta:** 30

**188.** Si la función

$$f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x-2}$$

Calcular el valor de:

$$E=\frac{f(3)+2f(2)}{f(3)+f(2)+2f(1)}$$

a) 1 b) 7 c) 0 d) $-10$

## Resolución

Evaluando para $x=1,\ x=2$ y $x=3$ en la función $f(x)$, es decir:

$$x=1 \quad\rightarrow\quad f(1)=\frac{1^2+3\cdot1+2}{1^2-3\cdot1-2}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}\quad\Rightarrow\quad f(1)=-\frac{3}{2}$$

$$x=2 \quad\rightarrow\quad f(2)=\frac{2^2+3\cdot2+2}{2^2-3\cdot2-2}=\frac{12}{-4}=-3\quad\Rightarrow\quad f(2)=-3$$

$$x=3 \quad\rightarrow\quad f(3)=\frac{3^2+3\cdot3+2}{3^2-3\cdot3-2}=\frac{20}{-2}=-10\quad\Rightarrow\quad f(3)=-10$$

Luego, reemplazando los valores en la expresión dada:

$$E=\frac{-10+2\cdot(-3)}{-10+(-3)+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{-10-6}{-10-3-3}=\frac{-16}{-16}=1\quad\Rightarrow\quad E=1$$

**Respuesta:** 1

**189.** Sea $n\in\mathbb{N}$, si los números

$$20^{2n}\cdot15^{n-1}\text{ y }12^{n+3}\cdot18^2$$

Poseen 39 divisores comunes, calcular el valor de $n$.

a) $-1$ b) 3 c) 0 d) 6

## Resolución

Sean $x=20^{2n}\cdot15^{n-1}$ y $y=12^{n+3}\cdot18^2$, descomponiendo en factores primos, es decir:

$$x=20^{2n}\cdot15^{n-1}=(2^2\cdot5)^{2n}\cdot(3\cdot5)^{n-1}=2^{4n}\cdot5^{2n}\cdot3^{n-1}\cdot5^{n-1}$$
$$=2^{4n}\cdot3^{n-1}\cdot5^{3n-1}$$

$$y=12^{n+3}\cdot18^2=(2^2\cdot3)^{n+3}\cdot(2\cdot3^2)^2=2^{2(n+3)}\cdot3^{n+3}\cdot2^2\cdot3^4$$
$$=2^{2n+8}\cdot3^{n+7}$$

De donde, el máximo común divisor de $x$ e $y$ es $MCD(x, y) = 2^{4n} \cdot 3^{n-1}$. Luego, por la propiedad de cantidad de divisores y por la condición, se tiene:

$$CD(MCD) = (4n+1)(n-1+1) = 39$$
$$\Longrightarrow \quad (4n+1)n = 39$$
$$\Longrightarrow \quad 4n^2 + n - 39 = 0$$

Así:

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-39)}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 624}}{8}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{625}}{8} = \frac{-1 \pm 25}{8}$$

De donde, se obtiene dos valores:

$$n = \frac{-1+25}{8} = \frac{24}{8} = 3 \quad \wedge \quad n = \frac{-1-25}{8} = -\frac{26}{8}$$

Solo se considera el valor positivo, pues $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, entonces $n = 3$

**Respuesta:** 3

**190.** Calcular la siguiente expresión

$$B = \frac{1}{\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{728^2} + \sqrt[3]{728 \cdot 729} + \sqrt[3]{729^2}}$$

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10

## Resolución

Aplicando la propiedad de la identidad siguiente:

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Luego, el denominador de la expresión dada se puede generalizar como:

$$\left(\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a(a+1)} + \sqrt[3]{(a+1)^2}\right) = (a+1) - a = 1$$

De donde, el factor racionalizante será $\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a}$,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a(a+1)} + \sqrt[3]{(a+1)^2}} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a}\right)}{\left(\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a}\right)} = \sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a}$$

Con esta notación, la expresión a calcular se reduce:

$$B = \left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1}\right) + \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right) + \cdots + \left(\sqrt[3]{729} - \sqrt[3]{728}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} + \cdots + \sqrt[3]{729} - \sqrt[3]{728}$$

Se simplifican todos los términos semejantes

$$= \sqrt[3]{729} - \sqrt[3]{1} = 9 - 1 = 8$$

$$\Rightarrow \quad B = 8$$

**Respuesta:** 8

**191.** En la suma que se muestra, cada letra representa un dígito del 1 al 9 inclusive

$$\begin{array}{r} Q\ R \\ +\ P\ P\ P \\ P\ P\ P \\ \hline 2\,0\,2\,5 \end{array}$$

El valor de $P+Q+R$ es:

a) 11 b) 13 c) 17 d) 18

### Resolución

Supondremos que el valor de $P$ es menor que 9, entonces la suma puede tomar un valor máximo:

$$QR + PPP + PPP = 99 + 888 + 888 = 1875$$

Como la suma dada es 2025, entonces el valor de $P$ no puede ser menor que 9, pero si igual a 9, es decir:

$$\begin{aligned} P = 9 \quad &\Longrightarrow \quad QR + 999 + 999 = 2025 \\ &\Longrightarrow \quad QR + 1998 = 2025 \\ &\Longrightarrow \quad QR = 2025 - 1998 = 27 \\ &\Longrightarrow \quad Q = 2 \quad \wedge \quad R = 7 \end{aligned}$$

Luego, la suma es: $P + Q + R = 9 + 2 + 7 = 18$

**Respuesta:** 18

**192.** Determinar los valores de $x, y, z$ en el sistema de ecuaciónes dado por:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + z = 9 \\ x - 3y + 3z = 6 \end{cases}$$

a) $\boldsymbol{x} = 3, y = -2, z = -4$

b) $\boldsymbol{x} = 5, y = -\frac{23}{5}, z = -4$

c) $\boldsymbol{x} = \frac{21}{5}, y = -\frac{23}{5}, z = -4$

d) $\boldsymbol{x} = \frac{21}{5}, y = \frac{23}{5}, z = -4$

## Resolución

$$\begin{matrix} x+2y-z=-1 \\ 2x-y+z=9 \\ x-3y+3z=6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-1 & //(2) \\ 2x-y+z=9 & //(-1) \\ x-3y+3z=6 & //(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+4y-2z=-2 & (1) \\ -2x+y-z=-9 & (2) \\ 2x-6y+6z=12 & (3) \end{cases}$$

Tomemos ecuación (1) y (2)

$$\begin{cases} 2x+4y-2z=-2 \\ -2x+y-z=-9 \end{cases} \Rightarrow 5y-3z=-11 \qquad (4)$$

Tomemos ecuación (2) y (3)

$$\begin{cases} -2x+y-z=-9 \\ 2x-6y+6z=12 \end{cases} \Rightarrow -5y+5z=3 \qquad (5)$$

Tomemos ecuación (4) y (5)

$$\begin{cases} 5y-3z=-11 \\ -5y+5z=3 \end{cases} \Rightarrow 2z=-8$$

$$\Rightarrow z=-4 \qquad (6)$$

Reemplacemos ecuación (6) en (4)

$$5y-3z=-11 \Rightarrow y=\frac{3z-11}{5}$$

$$\Rightarrow y=\frac{3\cdot(-4)-11}{5}$$

$$\Rightarrow y=\frac{-12-11}{5}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{23}{5} \qquad (7)$$

Reemplacemos ecuación (6) y (7) en (1)

$$x+2y-z=-1 \Rightarrow x=-1+z-2y$$

$$\Rightarrow x=-1-4-2\left(-\frac{23}{5}\right)$$

$$\Rightarrow x=-5+\frac{46}{5}$$

$$\Rightarrow x=\frac{21}{5}$$

**Respuesta:** $x=\frac{21}{5}, y=-\frac{23}{5}, z=-4$

**193.** Determinar el valor de $k$ en la ecuación:

$$4x^2 - 8x + 2k - 1 = 0$$

Sabiendo que una de las raíces es igual al triple de la otra.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

## Resolución

$$4x^2 - 8x + 2k - 1 = 0 \Longrightarrow a = 4, b = -8 \text{ y } c = 2k - 1$$

Por la propiedad de raíces se tiene:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{(-8)}{4} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2k-1}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2k-1}{4} & (2) \end{cases}$$

Como una de las raíces es igual al triple de la otra, entonces:

$$x_1 = 3x_2 \qquad (3)$$

Reemplazando ecuación (3) en (1)

$$x_1 + x_2 = 2 \Longrightarrow 3x_2 + x_2 = 2$$
$$\Longrightarrow 4x_2 = 2$$
$$\Longrightarrow x_2 = \frac{2}{4} \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{2} \qquad (4)$$

Reemplazando ecuación (4) en (2)

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2k-1}{4} \Longrightarrow x_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2k-1}{4}$$
$$\Longrightarrow x_1 = \frac{2(2k-1)}{4}$$
$$\Longrightarrow x_1 = \frac{2k-1}{2} \qquad (5)$$

Reemplazando ecuación (4) y (5) en (1)

$$x_1 + x_2 = 2 \Longrightarrow \frac{2k-1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$
$$\Longrightarrow \frac{2k-1+1}{2} = 2$$
$$\Longrightarrow k = 2$$

**Respuesta:** $k = 2$

**194.** Factorizar la expresión dada por: $A = m^4 - 5(m-1)^2 - 10(m-1) - 1$

a) $(m-2)(m+1)(m-1)(m+2)$ b) $(m-1)(m+2)(m-2)(m+1)$

c) $(m-1)(m+1)(m-4)(m+4)$ d) $(m-1)(m+1)(m-2)(m+2)$

**Resolución**

$A = m^4 - 5(m-1)^2 - 10(m-1) - 1$

$\Longrightarrow A = m^4 - 1^4 - 5(m-1)^2 - 10(m-1)$

$\Longrightarrow A = (m^2 - 1^2)(m^2 + 1^2) - 5(m-1)^2 - 10(m-1)$

$\Longrightarrow A = (m-1)(m+1)(m^2+1) - 5(m-1)^2 - 10(m-1)$

$\Longrightarrow A = (m-1)\big((m+1)(m^2+1) - 5(m-1) - 10\big)$

$\Longrightarrow A = (m-1)\big((m+1)(m^2+1) - 5m + 5 - 10\big)$

$\Longrightarrow A = (m-1)\big((m+1)(m^2+1) - 5m - 5\big)$

$\Longrightarrow A = (m-1)\big((m+1)(m^2+1) - 5(m+1)\big)$

$\Longrightarrow A = (m-1)(m+1)(m^2+1-5)$

$\Longrightarrow A = (m-1)(m+1)(m^2-2^2)$

$\Longrightarrow A = (m-1)(m+1)(m-2)(m+2)$

**Respuesta:** $(m-1)(m+1)(m-2)(m+2)$

**195.** Determinar el conjunto solución en la inecuación dada por:

$$|x-2| + |x-3| \geq 4$$

a) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$ b) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$

c) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$ d) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$

**Resolución**

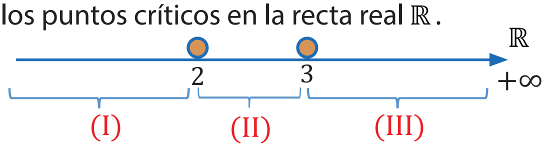
$$|x-2| = \begin{cases} x-2; x-2>0 \\ -(x-2); x-2 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2; x>2 & (1) \\ 2-x; x \leq 2 & (2) \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3; x-3>0 \\ -(x-3); x-3 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3; x>3 & (3) \\ 3-x; x \leq 3 & (4) \end{cases}$$

Determinando puntos críticos.

$$|x-2| + |x-3| \geq 4 \Longrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}; \text{ puntos críticos}$$

Situando los puntos críticos en la recta real $\mathbb{R}$.



Tenemos 3 intervalos, (-∞,2], [2,3] y [3,+∞). Veamos que forma tiene en cada intervalo los términos del valor absoluto.

| **Caso (I):** | **Caso (II):** | **Caso (III):** |
|---|---|---|
| Están los valores que son: $x \leq 2$ y $x \leq 3$<br>Ecuación (2) y (4)<br>$\|x-2\|+\|x-3\| \geq 4$<br>$2-x+3-x \geq 4$<br>$5-2x \geq 4$<br>$5-4 \geq 2x$<br>$1 \geq 2x$<br>$\frac{1}{2} \geq x$<br>**Conjunto solución:**<br>$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ | Están los valores que son: $2 < x \leq 3$<br>Ecuación (1) y (4)<br>$\|x-2\|+\|x-3\| \geq 4$<br>$x-2+3-x \geq 4$<br>$1 \geq 4$<br>**Conjunto solución:**<br>No existe | Están los valores que son: $x > 2$ y $x > 3$<br>Ecuación (1) y (3)<br>$\|x-2\|+\|x-3\| \geq 4$<br>$x-2+x-3 \geq 4$<br>$2x-5 \geq 4$<br>$2x \geq 4+5$<br>$2x \geq 9$<br>$x \geq \frac{9}{2}$<br>**Conjunto solución:**<br>$\left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$ |

El conjunto solución será:

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$$

**Respuesta:** $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$

**196.** Resolver la ecuación con logaritmos, dado por:

$$\log 2 + \log(4^{x-2}+9) = 1 + \log(2^{x-2}+1)$$

a) $x = 2, x = 4$ b) $x = 4, x = 6$ c) $x = 2, x = 6$ d) $x = 1$

## Resolución

$$\log 2 + \log(4^{x-2}+9) = 1 + \log(2^{x-2}+1)$$

$$\Longrightarrow \log 2 + \log(4^{x-2}+9) - \log(2^{x-2}+1) = 1$$

$$\Longrightarrow \log\left(2(4^{x-2}+9)\right) - \log(2^{x-2}+1) = 1$$

$$\Longrightarrow \log\frac{2(4^{x-2}+9)}{2^{x-2}+1} = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{2(4^{x-2}+9)}{2^{x-2}+1} = 10$$

$\Longrightarrow 2(4^{x-2}+9)=10(2^{x-2}+1)$

$\Longrightarrow (4^{x}\cdot 4^{-2}+9)=5(2^{x}\cdot 2^{-2}+1)$

$\Longrightarrow \dfrac{4^x}{16}+9=\dfrac{5\cdot 2^x}{4}+5$

$\Longrightarrow \dfrac{4^x}{16}-\dfrac{5\cdot 2^x}{4}+4=0$

$\Longrightarrow \dfrac{4^x-20\cdot 2^x+64}{16}=0$

$\Longrightarrow 4^x-20\cdot 2^x+64=0$

$\Longrightarrow (2^2)^x-20\cdot 2^x+64=0$

$\Longrightarrow (2^x)^2-20\cdot 2^x+64=0$

$\Longrightarrow (2^x-16)(2^x-4)=0$

$\Longrightarrow 2^x-16=0$ o $2^x-4=0$

$\Longrightarrow 2^x=2^4$ o $2^x=2^2$

$\Longrightarrow x=4$ o $x=2$

**Respuesta:**
$x=4$ ; $x=2$

**197.** Determinar el valor de la siguiente expresión dada por:

$$E=\left\{\left[\left(\frac{20^{a^2+1}}{2^{2a^2+4}+2^{2a^2+2}}\right)^{\frac{1}{2a^2}}\right]^2\right\}^{2^0}$$

a) $E=5^{\frac{1}{2}}$ b) $E=2^{2a}5^2$ c) $E=2^{2a}5$ d) $E=5$

**Resolución**

$20^{a^2+1}=20^{a^2}\cdot 20$

$=(5\cdot 4)^{a^2}\cdot 5\cdot 4$

$=5^{a^2}\cdot 4^{a^2}\cdot 5\cdot 4$

$=5^{a^2}\cdot (2^2)^{a^2}\cdot 5\cdot 2^2$

$5^{a^2}\cdot 2^{2a^2}\cdot 5\cdot 2^2$

$2^{2a^2+4}+2^{2a^2+2}=2^{2a^2}\cdot 2^4+2^{2a^2}\cdot 2^2$

$=2^{2a^2}\cdot 2^2\cdot 2^2+2^{2a^2}\cdot 2^2$

$=2^{2a^2}\cdot 2^2(2^2+1)$

$=2^{2a^2}\cdot 2^2\cdot 5$

Reemplazando:

$$E=\left\{\left[\left(\frac{20^{a^2+1}}{2^{2a^2+4}+2^{2a^2+2}}\right)^{\frac{1}{2a^2}}\right]^2\right\}^{2^0} \Rightarrow E=\left\{\left[\left(\frac{5^{a^2}\cdot 2^{2a^2}\cdot 5\cdot 2^2}{2^{2a^2}\cdot 2^2\cdot 5}\right)^{\frac{1}{2a^2}}\right]^2\right\}^1$$

$$\Rightarrow E=\left[\left(5^{a^2}\right)^{\frac{1}{2a^2}}\right]^2$$

$$\Rightarrow E=\left[5^{\frac{a^2}{2a^2}}\right]^2$$

$$\Rightarrow E=\left[5^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$\Rightarrow E=5^{\frac{2}{2}}$$

$$\Rightarrow E=5$$

**Respuesta:** 5

**198.** Simplificar la expresión:

$$M=\left[\left(\sqrt[2a]{\frac{1}{a^2}}\right)^{8a}\cdot\sqrt[8^{-1}]{\left(\sqrt[8b]{a^{2a}}\right)^{\frac{4b}{a}}+\left(\sqrt[8b]{a^{4a}}\right)^{\frac{2b}{a}}}\right]^{2\left(2^{-3^3}\right)^{3^{-3}}}$$

a) $Ninguno$ b) $2^6$ c) $2^7$ d) $2^8$

## Resolución

$$M=\left[\left(\sqrt[2a]{\frac{1}{a^2}}\right)^{8a}\cdot\sqrt[8^{-1}]{\left(\sqrt[8b]{a^{2a}}\right)^{\frac{4b}{a}}+\left(\sqrt[8b]{a^{4a}}\right)^{\frac{2b}{a}}}\right]^{2\left(2^{-3^3}\right)^{3^{-3}}}$$

$$\Rightarrow M=\left[\left(\sqrt[2a]{a^{-2}}\right)^{8a}\cdot\sqrt[8^{-1}]{\left(a^{\frac{2a}{8b}}\right)^{\frac{4b}{a}}+\left(a^{\frac{4a}{8b}}\right)^{\frac{2b}{a}}}\right]^{2\left(2^{-3^3\cdot 3^{-3}}\right)}$$

$$\Rightarrow M=\left[\left(a^{\frac{-2}{2a}}\right)^{8a}\cdot\sqrt[8^{-1}]{\left(a^{\frac{2a}{8b}}\right)^{\frac{4b}{a}}+\left(a^{\frac{4a}{8b}}\right)^{\frac{2b}{a}}}\right]^{2\left(2^{-3^{3-3}}\right)}$$

$$\Rightarrow M=\left[a^{\frac{-2\cdot 8a}{2a}}\cdot\sqrt[8^{-1}]{a^{\frac{2a}{8b}\cdot\frac{4b}{a}}+a^{\frac{4a}{8b}\cdot\frac{2b}{a}}}\right]^{2\left(2^{-3^0}\right)}$$

$$\Rightarrow M=\left[a^{-8}\cdot\sqrt[8^{-1}]{a+a}\right]^{2\cdot 2^{-1}}$$

$$\Rightarrow M = \left[a^{-8} \cdot \sqrt[8^{-1}]{2a}\right]^{2^{1-1}}$$

$$\Rightarrow M = \left[a^{-8} \cdot (2a)^{\frac{1}{8^{-1}}}\right]^{2^0}$$

$$\Rightarrow M = [a^{-8} \cdot 2^8 \cdot a^8]^1$$

$$\Rightarrow M = a^{8-8} \cdot 2^8$$

$$\Rightarrow M = 2^8$$

**Respuesta:** $2^8$

**199.** Racionalizar la expresión:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}}$$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{12} - 2\sqrt[3]{2}}{7}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{12} + 2\sqrt[3]{2}}{7}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{12} + 2\sqrt[3]{2}}{7}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{12} - 2\sqrt[3]{2}}{7}$

**Resolución**

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - (\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}) + (\sqrt[3]{4})^2}{(\sqrt[3]{3})^2 - (\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}) + (\sqrt[3]{4})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{3^2} - (\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}) + \sqrt[3]{4^2}}{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3^2} - (\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}) + \sqrt[3]{4^2})}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{3^2} - (\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}) + \sqrt[3]{16}}{(\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{4})^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{4 \cdot 3} + \sqrt[3]{2 \cdot 2^3}}{3 + 4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{12} + 2\sqrt[3]{2}}{7}$$

**Respuesta:** $\dfrac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{12} + 2\sqrt[3]{2}}{7}$

**200.** Se tiene un cuadrado de área $1012.5\ \text{cm}^2$ y se inscribe otro cuadrado, de tal manera que los vértices extremos coincidan con los puntos medios del primero, y así sucesivamente. Si ya se conoce que el área de un cuadrado es el doble del que se inscribe, determinar la suma de las áreas de todos los cuadrados que se pueden inscribir de esa manera.

a) 2020 b) 2022 c) 2024 d) 2025

## Resolución

$$A_1 = 2A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{A_1}{2}$$

$$A_2 = 2A_3 \Rightarrow A_3 = \frac{A_2}{2} \Rightarrow A_3 = \frac{\frac{A_1}{2}}{2} \Rightarrow A_3 = \frac{A_1}{2^2}$$

$$A_3 = 2A_4 \Rightarrow A_4 = \frac{A_3}{2} \Rightarrow A_4 = \frac{\frac{A_1}{2^2}}{2} \Rightarrow A_4 = \frac{A_1}{2^3}$$

$$A_4 = 2A_5 \Rightarrow A_5 = \frac{A_4}{2} \Rightarrow A_5 = \frac{\frac{A_1}{2^3}}{2} \Rightarrow A_5 = \frac{A_1}{2^4}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{A_1}{2^{n-1}}$$

Se debe determinar la suma de las áreas de todos los cuadrados que se pueden inscribir de esa manera.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \ldots + \cdots$$

$$\Rightarrow A = A_1 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_1}{2^2} + \frac{A_1}{2^3} + \frac{A_1}{2^4} + \cdots + \cdots$$

$$\Rightarrow A = A_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow A = A_1\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + \cdots\right)$$

Para la suma de una progresión geométrica infinita utilizaremos la siguiente fórmula:

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{a}{1-r}$, $a$: primer término y $r$ : razón común

Luego:

$$\Rightarrow A = A_1\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow A = 1012.5\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow A = 1012.5 \cdot 2$$

$$\Rightarrow A = 2025$$

**Respuesta:** 2025

## Aritmética - Básico

**201.** Carol llega a su escuela habiendo resuelto 4 ejercicios de matemáticas, cada uno de ellos contiene 3 secciones y cada sección contiene 4 incisos. Si contamos a cada inciso como un problema de matemáticas, ¿cuántos problemas ha resuelto Carol en total?

a) 48 b) 12 c) 52 d) 48

**Respuesta:** .........

**202.** Una tienda otorgará un incentivo de Bs 200 al empleado que obtuvo la mayor ganan en ventas del mes, monto que deberá ser múltiplo de 11. Pablo, Vanesa y Lorena lograron las ventas más altas en el mes, tales ventas fueron Bs 101, Bs 900 y Bs 1222 respectivamente, ¿a cuál de ellos se otorgará el bono?

a) Pablo b) Vanesa c) Lorena d) Ninguno

**Respuesta:** .........

**203.** Dayana necesita hallar los exponentes en la descomposición en factores primos del número 17 787 y multiplicarlos para formar un número que es parte del código para recuperar la contraseña de su celular:

a) 4 b) 5 c) 2 d) 8

**Respuesta:** .........

**204.** Empleando definiciones de exponentes, ¿cuál es el resultado al simplificar la siguiente expresión?

$$B = (2^{-3} \cdot 2^{5})^{2} \cdot (4^{3} \cdot 4^{-5} \cdot 7)^{3}$$

a) $B = \frac{7^3}{2^8}$ b) $B = 2^{-8} \cdot 7^3$ c) $B = \frac{343}{256}$ d) Todas las anteriores

**Respuesta:** .........

**205.** La siguiente expresión que involucra radicales:

$$\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{\sqrt{29 + \sqrt{144}} - 2}}$$

Simplificar

a) $\sqrt{5}$ b) 0 c) 29 d) -1

**Respuesta:** .........

**206.** El peso de Juan es de 65,7 kilogramos. Las prendas que lleva encima hacen un total de 5,6 kilogramos (botas, chamarra, pantalones y otros). Terminando su clase, se cuelga la mochila que pesa 8,7 kilogramos, ¿cuál es el peso total que carga Juan al regresar caminando a su casa?

a) 80 kg b) 74,4 kg c) 71,3 kg d) 14,3 kg

**Respuesta: .........**

**207.** Un grupo de estudiantes debe aplicar notación científica para encontrar expresiones cortas de las cifras: 31 415 000 000 y 0,000 000 271.

a) $2,71\times10^{-8}$ y $3,1415\times10^{10}$ b) $2,71\times10^{10}$ y $= 3,1415\times10^{-8}$
c) $2,71\times10^{-10}$ y $= 3,1415\times10^{-8}$ d) $2,71\times10^{8}$ y $= 3,1415\times10^{10}$

**Respuesta: .........**

**208.** El profesor de matemáticas de Irma, mostró en clases que $\sqrt{7}$ es un número irracional. Sabiendo esto, ella debe decidir si la siguiente expresión también es un número irracional:

$$E = \sqrt{112} - \sqrt{1008} + \sqrt{343}$$

a) $E =$ -7, racional b) $E = 7$, racional c) $E = -\sqrt{7}$, irracional
d) $E = \sqrt{7}$, irracional

**Respuesta: .........**

**209.** Una caja registradora contiene billetes de 20 bolivianos y 50 bolivianos que están en proporción 3:2, ¿cuál es la cantidad de dinero en cortes de 20 bolivianos, si hay en total 200 billetes en la caja?

a) 1 400 Bs b) 2 400 Bs c) 3 400 Bs d) 4 400 Bs

**Respuesta: .........**

## Aritmética - Intermedio

**210.** Kevin tiene que hallar el valor de:

$$6 \cdot [(7m - m) + 1 - 5 \cdot n] \div 3(m + n)$$

sabiendo que $m$=10 y $n$ =11.

a) -252 b) 252 c) 232 d) Ninguno

**Respuesta: .........**

**211.** El mínimo común múltiplo de 6, 8 y 10 es 120. Utilizar este dato para calcular:

$$E=\frac{31}{6}+\frac{53}{8}+\frac{73}{10}$$

a) $E=\frac{2291}{120}$ b) $E=\frac{79}{15}$ c) $E=\frac{29}{24}$ d) Ninguno

**Respuesta:** .........

**212.** La siguiente expresión que involucra exponentes y radicales:

$$F=\frac{3^{n+2}\cdot\sqrt[n]{3^{n^2}}}{\sqrt[n]{3^{2n^2}}}$$

Desarrolla $F$:

a) 1 b) 3 c) $n$ d) 9

**Respuesta:** .........

**213.** Horacio necesita resolver el siguiente ejercicio para poder presentar su práctica de matemáticas a tiempo:

$$\frac{2,71\times10^{-8}\times3,63\times10^{-4}}{3,14\times10^{10}\times3,63\times10^{6}}$$

a) $3,14\times10^{-28}$ b) $3,12\times10^{-28}$ c) $3,12\times10^{28}$ d) Ninguno

**Respuesta:** .........

**214.** Ana debe investigar si la siguiente expresión es un número irracional, utilizando un método de racionalización:

$$E=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

a) $E=5-2\cdot\sqrt{6}$, b) $E=-4-\sqrt{15}$,
c) $=4+\sqrt{15}$, d) $E=5+2\cdot\sqrt{6}$,

**Respuesta:** .........

**215.** ¿Cuál es la expresión más simple para el siguiente radical?

$$R=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}}}$$

a) $R=2$ b) $R=4$ c) $R=\sqrt[4]{2}$ d) $R=\sqrt{\sqrt{2}}$

**Respuesta:** .........

**216.** Si el tiempo que Verónica ocupa practicando un instrumento es 2 horas al día, ¿cuántos días deben pasar para alcanzar las 10 000 horas de práctica?

a) 208 días b) 205 días c) 210 días d) 220 días

**Respuesta:** .........

**217.** En circuitos eléctricos, la Ley de Ohm establece que:

$$I = \frac{V}{R}$$

donde $V$ representa a la magnitud voltaje y se mide en voltios ($V$), $I$ representa a la magnitud intensidad de corriente y se mide en amperios ($A$) y $R$ representa a la magnitud resistencia y se mide en ohmios ($\Omega$), ¿qué ocurre con la intensidad de corriente cuando la resistencia toma valores muy pequeños?

a) $V = I$ b) $I = 0$ c) $I$ es muy grande d) Ninguno

**Respuesta:** .........

## Aritmética - Avanzado

**218.** La pregunta final de la prueba de matemáticas de Paola es la siguiente: El máximo común divisor de dos números es 15 y su mínimo común múltiplo es 1 260, ¿cuál es el producto de estos números?

a) 18 900 b) 19 000 c) 18 950 d) 19 800

**Respuesta:** .......

**219.** Simplificar la siguiente fracción compuesta

$$H = \frac{\frac{5}{\frac{1}{3}}}{3 \cdot \frac{5}{-1 \cdot \frac{-3}{-3 \cdot \frac{-5}{3 + \frac{2}{\frac{1}{2}}}}}}$$

a) $H = \frac{5}{7}$ b) $H = \frac{7}{5}$ c) $H = \frac{5}{3}$ d) Ninguno

**Respuesta:** .......

**220.** Mario está jugando con palitos de helado, agrupándolos en montones de 7, 8 y 9 unidades sin dejar alguno de lado, ¿cuál es la cantidad total de palitos de helado?

a) 504 b) 503 c) 505 d) 506

**Respuesta:** .......

**221.** La siguiente expresión que involucra radicales:

$$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

reescribir el número:

a) $\sqrt{(3\ )}$ b) 9 c) 3 d) -3

**Respuesta:** .......

**222.** Ana acaba de aprender a sumar los primeros $n$ números naturales, de modo que si se le pide simplificar la siguiente expresión:

$$3{\cdot}3^2{\cdot}3^3{\cdot}\cdots{\cdot}3^{2024}.$$

ella obtendrá el siguiente resultado:

a) $3^{2049300}$ b) $3^{2048288}$ c) $3^{2024^{2023^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}$ d) $3^{204930}$

**Respuesta:** .......

**223.** Considere el siguiente número decimal periódico:

$$7{,}11235\ldots$$

Encuentre su representación racional (en forma de fracción).

(Ayuda: Haga $x = 7{,}11235\ldots$ y multiplique a la igualdad alguna potencia de 10, con el fin de eliminar la parte periódica).

a) $\frac{711228}{99999}$ b) $\frac{711235}{9999}$ c) $\frac{711229}{9999}$ d) Ninguno

**Respuesta:** .......

**224.** Sara se pregunta cuáles serían los resultados al calcular $8\,|\,B$ y $A\,|\,A$, donde la barra vertical es una nueva operación definida como:

$$p\,|\,q = \frac{p^2}{4}(2q-3p)$$

para $p$, $q$ números reales cuales quiera.

a) $-\frac{A^3}{4}$ y $32B-384$ b) $-\frac{4^3}{A}$ y $32B$ c) $A^3$y $32B$

**Respuesta:** .......

**225.** En una determinada población del país surgió una epidemia. El personal del Ministerio de Salud necesita averiguar el porcentaje de población que gozaba de buena salud, si hace dos meses el 10% de la población estaba enferma y un 90% gozaba de buena salud, hace un mes 10% de las personas que enfermaron se curaron y el 10% de las que estaban sanas, enfermaron. Hasta ese momento, ¿qué porcentaje de la población goza de buena salud?

a) 89% b) 90% c) 91% d) Ninguno

**Respuesta: .......**

## Álgebra - Básico

**226.** Pablo y sus compañeros estudiaron en clase la siguiente ecuación

$$-5x + 2[a - 3(b - x)] = c$$

donde *a*, *b* y *c* son constantes, ¿qué valor encontraron para $x$?

a) $x = 6b + 2a + c$ b) $x = 6b + 2a - c$ c) $x = 6b - 2a - c$ d) $x = 6b - 2a + c$

**Respuesta: .........**

**227.** Se pide encontrar los valores de $s$ y $t$ del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 8s + 5t = -3 \\ -3s - 5t = -12 \end{cases}$$

a) $s = 3$ y $t = -\frac{3}{2}$ b) $s = -3$ y $t = -\frac{3}{2}$ c) $s = -3$ y $t = \frac{3}{2}$ d) $s = 3$ y $t = \frac{3}{2}$

**Respuesta: .........**

**228.** Se pide factorizar el siguiente trinomio por cualquier método:

$$x^2 + 54x + 648$$

a) $(x + 36)(x + 18)$ b) $(x - 36)(x - 18)$ c) $(x + 36)(x - 18)$ d) $(x - 36)(x + 18)$

**Respuesta: .........**

**229.** Factorizar la siguiente expresión algebraica:

$$A = (a-2)a-3$$

a) $(a+3)(a+1)$ b) $(a-3)(a-1)$ c) $(a+3)(a-1)$ d) $(a-3)(a+1)$

**Respuesta:** .........

**230.** Josefina necesita encontrar el valor de $k$ en la siguiente inecuación:

$$2x-3<x-k$$

que tenga como conjunto solución: $[2,+\infty)$.

a) $k=1$ b) $k=6$ c) $k=5$ d) $k=3$

**Respuesta:** .........

**231.** La siguiente expresión se utiliza para hallar la intensidad acústica del sonido:

$$V = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde $I_0$ es el valor especial de $I$ acordado como el sonido más débil que puede ser detectado por el oído humano. Un nivel de intensidad de sonido de 140 decibeles produce dolor en el oído, ¿cuánto debe valer $I$ para que $V$ alcance este nivel?

a) $I = 7^{10} \cdot I_0$ b) $I = 7^{14} \cdot I_0$ c) $I = 10^{14} \cdot I_0$ d) $I = 10^{7} \cdot I_0$

**Respuesta:** .........

**232.** Se pide simplificar la siguiente expresión:

$$Z = \sqrt[m]{\frac{x^{-m}+y^{-m}}{x^m+y^m}}$$

a) $Z = xy$ b) $Z = \frac{1}{xy}$ c) $Z = x+y$ d) $Z = \frac{1}{x+y}$

**Respuesta:** .........

**233.** La siguiente expresión algebraica:

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{y^5\sqrt{y}}}$$

reducir:

a) $y^{-\frac{9}{8}}$ b) $y^{\frac{9}{8}}$ c) $y^{-\frac{8}{9}}$ d) $y^{\frac{8}{9}}$

**Respuesta:** .........

**234.** La siguiente progresión geométrica $\{a_n\}$ tiene como primer término $a_1 = 3$ y razón $r = 2$.
Se pide encontrar los primeros 5 términos de la progresión.

a) 3, 4, 16, 27, 72 b) 3, 6, 12, 24, 48 c) 3, 5, 7, 9, 11 d) 3, 13, 33, 303, 3003

**Respuesta:** .........

## Álgebra - Intermedio

**235.** ¿Cúal es el valor de $x$ en la siguiente ecuación?

$$\frac{4+13x}{x+4} = \frac{4}{3}$$

a) $\frac{4}{53}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{4}{35}$ d) 4

**Respuesta:** .........

**236.** En un día de clase de matemáticas, el profesor pidió a los estudiantes expresar el siguiente número:

$$R = 29 - 12\sqrt{5}$$

a) $(6+\sqrt{5})^2 - 12$ b) $(6-\sqrt{5})^2 - 12$ c) $(5+\sqrt{6})^2 - 12$
d) $(6+\sqrt{5})^2 - 12$

**Respuesta:** .........

**237.** Manuel tiene que encontrar el factor (o los factores) que acompañan al término (o los términos) lineal(es), después de factorizar el siguiente polinomio, utilizando el método de Ruffini:

$$z^6 - 1.$$

a) $(z^2+z+1)$ y $(z^2-z+1)$ b) $(z^2+z+1)$ c) $(z^2-z+1)$ d) Ninguno

**Respuesta:** .........

**238.** La temperatura promedio de una persona sana es de 35 °C a 37,5 °C, Sabiendo que la conversión de grados Celsius a Kelvin viene dada por:

$$°C = K - 273.5$$

¿Cuál es el intervalo de temperatura para una persona sana en la escala Kelvin?

a) de 300 K a 311 K  b) de 308,5 K a 373 K  c) de 308,5 K a 311 K
d) de 273 K a 303 K

**Respuesta:** .........

**239.** Susana está viendo el tema logaritmos y en clase le piden encontrar el argumento $N$ para que se cumpla la siguiente igualdad: $\log_{64} N = \frac{4}{3}$.

a) $8^2$  b) $2^8$  c) $\frac{8}{2}$  d) 64

**Respuesta:** .........

**240.** Gina se presenta a una entrevista de trabajo por un mes (31 días) y le ofrecen las siguientes formas de pago al llegar el final del contrato:

**1.** Un millón de bolivianos.
**2.** Dos millones de bolivianos.
**3.** 2 centavos el primer día, luego 4 centavos el segundo día, 8 centavos el tercer día; es decir, al *m-ésimo* día, recibirá $2^m$ centavos.

¿Cuál opción le conviene a Gina?:

a) Opción 1  b) Opción 2  c) Opción 3  d) Dejar la entrevista

**Respuesta:** .........

**241.** Antonia quiere saber la cantidad $m$ de términos de la siguiente progresión geométrica: -2, -6, ... , -162.

a) $m = 3$  b) $m = 2$  c) $m = 5$  d) Ninguno

**Respuesta:** .........

**242.** Jacinta al hacer su tarea de matemáticas, ve que le piden encontrar la suma de los primeros 10 términos de la siguiente progresión aritmética:

1,7,13,... .

a) 500  b) 99  c) 450  d) 50

**Respuesta:** .........

## Álgebra - Avanzado

**243.** Se contabilizaron alrededor de 600 visitantes; entre adultos y niños, a una presentación musical. Las entradas para los adultos costaron 9 bolivianos y 6 bolivianos para los niños. Si los recibos de la taquilla totalizaron 12 000 bolivianos, ¿cuántos adultos y cuantos niños asistieron a la presentación?

a) 550 adultos y 50 niños.
b) 400 adultos y 200 niños.
c) 150 adultos y 450 niños.
d) 200 adultos y 400 niños.

**Respuesta: ......**

**244.** En el aula de Brian la maestra de matemáticas propuso factorizar lo siguiente:

$$P = (10x^2 + 13xy - 29x - 3y^2 + 16y - 21) \cdot [9(x-y)^2 + 12(x-y)^2 + 4(x+y)^2]$$

a) $(5x - y + 3) \cdot (2x + 3y - 7) \cdot (5x - y)^2$

b) $(5x + y - 3) \cdot (2x - 3y + 7) \cdot (5x + y)^2$

c) $(5x - y + 3) \cdot (2x - 3y + 7) \cdot (5x - y)^2$

d) Ninguno

**Respuesta: ......**

**245.** La siguiente desigualdad de números reales figuraba en la lista de ejercicios de aula de Adrián:

$$|1 - y| > 0$$

Encuentre su conjunto solución.

a) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
b) $(-\infty, 1)$
c) $(1, +\infty)$
d) $y = 0$

**Respuesta: ......**

**246.** Martin debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \ln a - \ln b = 5 \\ \ln a - \ln \sqrt[3]{b} = 3 \end{cases}$$

a) $a = e^2, b = e^3$ b) $a = e^3, b = e^2$ c) $a = e^2 = b$

d) No existen soluciones

**Respuesta:** ......

**247.** Simplificar la siguiente expresión que involucra radicales:

$$R = \frac{\sqrt{y + \sqrt[6]{y}} + \sqrt{y - \sqrt[6]{y}}}{\sqrt{y + \sqrt{y^2 - \sqrt[3]{3}}}}$$

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $2^{\sqrt{2}}$

**Respuesta:** ......

**248.** Sara se pregunta cuáles serían los resultados al calcular $8 \mid B$ y $A \mid A$, donde la barra vertical es una nueva operación definida como:

$$p \mid q = \frac{p^2}{4}(2q - 3p)$$

Para cualquier, $p, q$ números reales

a) $-\frac{A^3}{4}$ y $32B - 384$ b) $-\frac{4^3}{A}$ y $32B$ c) $A^3$y $32B$ d) 1 y 2

**Respuesta:** ......

**249.** Considere los siguientes números:

$$\pi, \pi^5, \pi^9, \ldots, \pi^{401}$$

Hallar el producto de todos ellos.

a) $\pi^{18\,999}$ b) $\pi^{19\,899}$ c) $\pi^{19\,998}$ d) Ninguno

**Respuesta: ......**

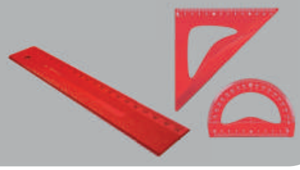
**250.** Es conocido que la frecuencia (medida en Hz o ciclos por segundo) de la nota LA en música, es 440 Hz. Por tanto, su "octava más alta" medirá 880 Hz. ¿Cuál es la frecuencia de la nota LA que está a seis octavas por debajo de la nota LA con frecuencia de 440 Hz?

a) $\frac{55}{32}$ b) $\frac{55}{16}$ c) $\frac{55}{8}$ d) $\frac{55}{4}$

**Respuesta: ......**

# GEOMETRÍA

**Rectas, segmentos, ángulos y triángulos**



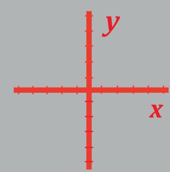
1

Se definen los segmentos, ángulos y triángulos. Además, se hacen las operaciones para hacer mediciones de los objetos, etc.
El estudio de la geometría, comienza a partir de los términos no definidos como el punto, la recta y el plano.

El plano cartesiano es un diagrama que permite localizar los puntos específicamente dentro de un sistema de coordenadas y además permite calcular las distancias entre dos puntos, etc. Fue creado por el filósofo francés Rene Descartes, en el campo de la Geometría Analítica.

2

**Plano cartesiano**




**Perímetros y áreas**

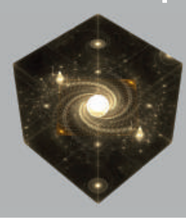
3

Perímetro es la totalidad de longitud en un contorno de la figura geométrica, lo más simple son el cuadrado y el rectángulo. Área es la región plana limitada por la figura geométrica, a partir de ellos se definen conceptos y propiedades para figuras de cualquier polígono, círculos y circunferencias.

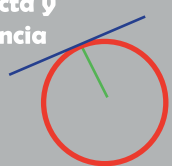
El espacio tridimensional es también llamado espacio $\mathbb{R}^3$, donde se ven objetos en el espacio desde un punto de referencia, además permite las mediciones de volúmenes de objetos geométricos. Del espacio $\mathbb{R}^3$ se puede bajar al espacio $\mathbb{R}^2$ (plano), es llamada la "proyección" y del plano también se sube al espacio tridimensional.

4

**Geometría del espacio**



**La línea recta y circunferencia**



5

La línea recta es un concepto no definido, pero con ello y junto con circunferencia, permiten definir otros conceptos útiles que se aplican en cálculos geométricos de longitudes y distancias.

La parábola es una función cuadrática de la forma:

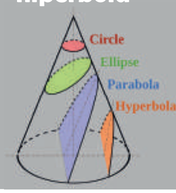
$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Mientras que la elipse e hipérbola son funciones cuadráticas en dos variables, es decir:

$$f(x,y) = 0 \;\leftrightarrow\; \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

6

**La parábola, elipse e hipérbola**



## Usos y aplicaciones en la vida cotidiana

Los segmentos, ángulos y triángulos son muy usados en la vida diaria, basta observar a nuestro entorno para identificar las formas que se presentan en diferentes aplicaciones como en ingeniería y arquitectura, etc.

*Fuente: PEDELTA, puentes trillizos La Paz*

*Fuente: Bolivia mapa*

El plano cartesiano facilita el uso de los mapas cartográficos, por ejemplo, el INE ubica ciudades y provincias en un sistema cartesiano.

El uso de perímetros y áreas o superficies se presentan en la cotidianidad, por ejemplo, el cálculo de áreas de terrenos, compra y venta, longitud de carreteras, máquinas industriales que tienen formas circulares, etc.

*Fuente: Bolivia Emprende*


*Fuente: Bolivia mapa*

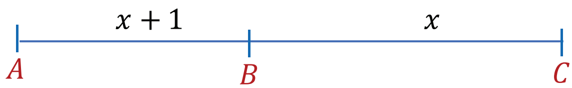
El uso del espacio tridimensional se presenta en los cálculos de volúmenes de formas geométricas, por ejemplo, envases de forma cilíndrica que contienen los alimentos líquidos y secos, como leches, mermeladas, etc.

Las rectas, circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas se usan en diferentes construcciones de ingeniería, desde antenas satelitales y radiotelescopios para concentrar las señales, en rayos de luces, etc.

*Fuente: Agencia Boliviana Espacial*

## Geometría plana

**251.** Determinar el valor de "$x$" en el segmento dado $AC=13$.




### Resolución

De la figura se identifica los segmentos:

$$AC = 13, \qquad AB = x+1 \quad \wedge \quad BC = x \qquad (1)$$

Por adición de segmentos, tenemos

$$AB + BC = AC \overset{(1)}{\Longrightarrow} (x+1) + x = 13$$
$$\Longrightarrow (x+1) + x = 13$$
$$\Longrightarrow 2x = 12$$
$$\Longrightarrow x = 6$$

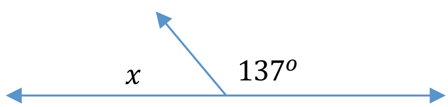
**Respuesta**

El valor de $x$ es 6.

**252.** Determinar el suplemento del ángulo 137°.

### Resolución

Representación gráfica




Por la propiedad de suplemento de ángulos:

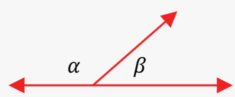
$$x + 137^o = 180^o \Longrightarrow x = 180^o - 137^o$$
$$\Longrightarrow x = 43^o$$

**Respuesta**

El valor de $x$ es 43°.

**Saber más...**

**Ángulos suplementarios**




$\alpha + \beta = 180^o$

**253.** Si los puntos $A,B,C$ y $D$ en la gráfica, son colineales. Si $AC=7$ y $AB \cong CD$. Calcular la longitud del segmento $BD$.

**Resolución**

Representación grafica


Por la suma e igualdad de segmentos:

$$AB + BD = AC + CD \qquad (1)$$

Como

$$AB \cong CD \quad \Rightarrow \quad AB = CD$$

Sustituyendo en la ecuación $(1)$, se tiene:

$$CD + BD = AC + CD \qquad \text{por cancelación}$$

$$\Rightarrow \; AC = BD$$

Por dato, como $AC = 7$, entonces $BD = 7$

**Respuesta**

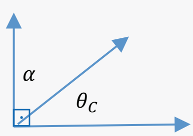
La longitud del segmento $BD$ es 7.

**254.** Pamela, en la tarea de geometría, hace la diferencia entre el complemento y suplemento de un ángulo, el cual es $4$ veces la medida del ángulo. Determinar el ángulo suplemento.

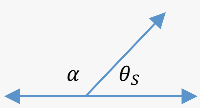
**Saber más...**

**Ángulos:**

Complemento




Suplemento




**Resolución**

Sea $\alpha$ la mediada del ángulo. Por la propiedad de ángulos complementarios:

$$\theta_C + \alpha = 90^o \quad \Rightarrow \quad \theta_C = 90^o - \alpha \qquad (1)$$

Por ángulos suplementarios:

$$\theta_S + \alpha = 180^o \quad \Rightarrow \quad \theta_S = 180^o - \alpha \qquad (2)$$

Del enunciado, restando $(2)$ y $(1)$, se tiene

$$\theta_S - \theta_C = 4\alpha \;\Rightarrow\; 180^o - \alpha - 90^o + \alpha = 4\alpha$$

$$\Rightarrow 90^o = 4\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = 22{,}5^o$$

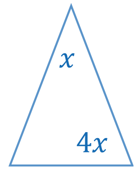
Luego:

$$\theta_S = 180^o - 22{,}5^o = 157{,}5^o \;\Rightarrow\; \theta_S = 157{,}5^o$$

**Respuesta**

El ángulo suplemento es 157,5°.

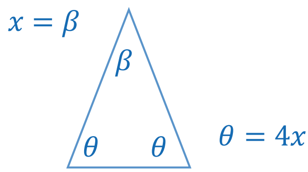
**255.** En un triángulo isósceles, un ángulo de la base es el cuádruplo del ángulo diferente. ¿Cuánto mide cada ángulo del triángulo?




### Resolución

Si el triángulo es isósceles, dos de sus ángulos son iguales.

Aplicando, la propiedad de suma de ángulos internos de un triángulo, se tiene:




$$4x + 4x + x = 180^o \quad \Longrightarrow \quad 9x = 180^o \quad \Longrightarrow \quad x = 20^o$$

Luego, por la condición del problema, se tiene

$$\theta = 4x \quad \Rightarrow \quad \theta = 4 \cdot 20^o = 80^o \quad \Rightarrow \quad \theta = 80^o \quad \wedge \quad \beta = 20^o$$

**Respuesta**

Los ángulos son 80°, 80° y 20°.

**256.** Santos se pone a calcular la distancia del segmento $AC$ en el gráfico dado, si $AB$=5, $BD$=12 y "$C$" es punto medio de $BD$.


**Datos**

$AB = 5$
$BD = 12$
$AC = ?$

**Resolución**

Del gráfico, como "$C$" es punto medio de $BD$,

$$BC = CD \quad (1)$$

Y por la adición de segmentos:

$$BD = BC + CD \overset{(1)}{\Longrightarrow} BD = BC + BC$$
$$\Longrightarrow BD = BC + BC$$
$$\Longrightarrow 12 = 2BC \quad \text{por dato}$$
$$\Longrightarrow BC = 6 \quad (2)$$

Luego, del gráfico

$$AC = AB + BC$$
$$= 5 + 6$$
$$\Longrightarrow AC = 11$$

**Respuesta**

La distancia del segmento $AC$ es 11 unidades.

**257.** Carla localiza los puntos $A$,$B$,$C$ y $D$ que son colineales y consecutivos. Si $AC = 3CD$, $AB = 10$ y $BD = 6$. Determinar el valor del segmento $BC$.

**Datos**

$AC = 3CD$
$AB = 10$
$BD = 6$
$BC = ?$

**Resolución**

Graficando el segmento


Por la adición y resta de segmentos, se tiene:

$$AC = AB + BC \quad \wedge \quad CD = BD - BC \quad (1)$$

De la condición del problema

$$AC = 3CD \overset{(1)}{\Longrightarrow} AB + BC = 3(BD - BC)$$

$\Longrightarrow$ $10 + BC = 3(6 - BC)$ por dato

$\Longrightarrow$ $10 + BC = 18 - 3BC$

Operaciones de segmentos

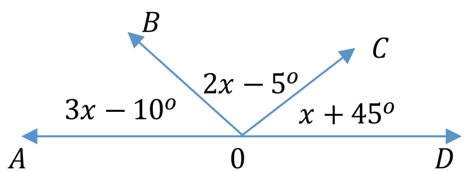
$\Longrightarrow$ $4BC = 8$

$\Longrightarrow$ $BC = 2$

**Respuesta**

El valor del segmento $BC$ es 2.

**258.** Determinar el valor de "$x$" que se muestra en la figura:




**Resolución**

De la figura, los ángulos $\angle DOC = x + 45^o$, $\angle COB = 2x - 5^o$ y $\angle BOA = 3x - 10^o$ son suplementarios, entonces:

$$\angle DOC + \angle COB + \angle BOA = 180^o$$

$\Longrightarrow (x + 45^o) + (2x - 5^o) + (3x - 10^o) = 180^o$

$\Longrightarrow 6x = 180^o - 30^o = 150^o$

$\Longrightarrow x = \dfrac{150^o}{6} = 25^o$

$\Longrightarrow x = 25^o$

**Respuesta**

El valor de $x$ es 25°.

## Plano cartesiano (espacio bidimensional)

**259.** David localiza las coordenadas en el plano cartesiano los puntos, luego traza segmentos. ¿Qué figuras encuentra?

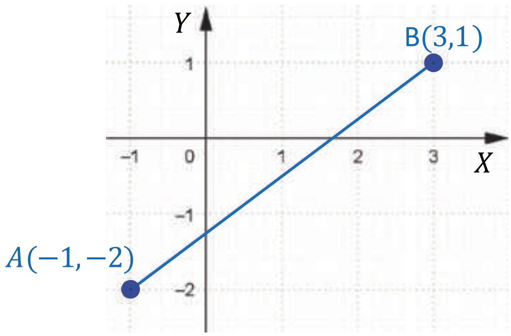
a) $A(-1,-2)$, $B(3,1)$

b) $A(1,2)$, $B(-2,1)$, $C(2.-2)$, $D(4,1)$.

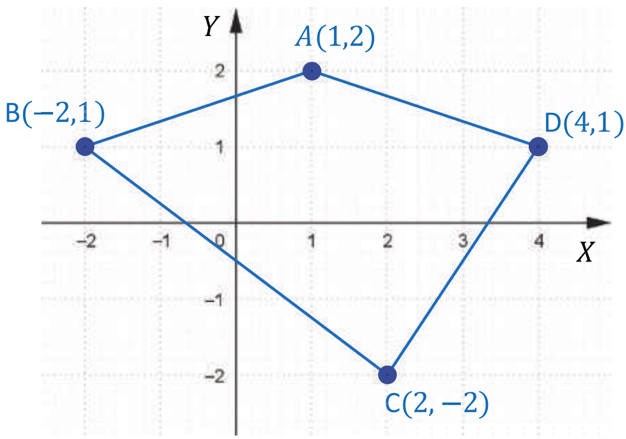
### Resolución

Representado los puntos en el plano cartesiano:

a) $A(-1,-2)$, $B(3,1)$




b) $A(1,2)$, $B(-2,1)$, $C(2.-2)$, $D(4,1)$



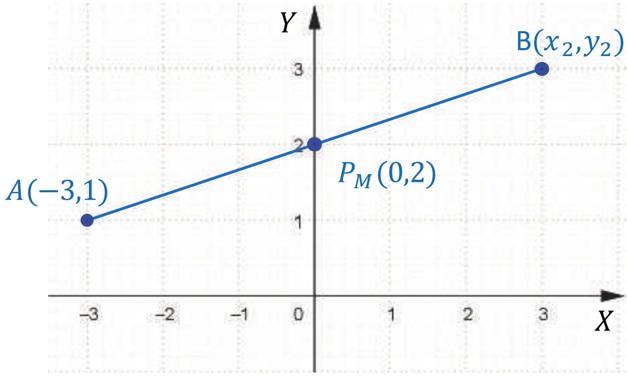

### Respuesta

Segmento unido por dos puntos y un polígono.

**260.** Si un extremo de un segmento es el punto $A(-3,1)$ y el punto medio es $P_M(0,2)$. Calcular las coordenadas del otro extremo $B(x_2,y_2)$.

## Resolución

Geométricamente:




Aplicando la fórmula del punto medio, es decir, el punto $P_M(0,2)$ se puede escribir como:

$$P_M(0,2) = P_M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \Rightarrow (0,2) = \left(\frac{-3+x_2}{2}, \frac{1+y_2}{2}\right)$$

Por igualdad de coordenadas

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-3+x_2}{2} = 0 \\ \dfrac{1+y_2}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3+x_2 = 0 \\ 1+y_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

De donde, el otro extremo del segmento es: $B(x_2,y_2) = B(3,3)$

**Respuesta**

Las coordenadas del otro extremo es $B(3,3)$.

**261.** Encuentre la distancia entre los pares de puntos cuyas coordenadas son:

$$A\left(3\sqrt{6}, -2\sqrt{10}\right),\ B\left(5\sqrt{6}, -4\sqrt{10}\right)$$

## Resolución

Identificando las coordenadas de puntos dados, es decir:

$$A\left(3\sqrt{6}, -2\sqrt{10}\right) = A(x_1,y_1) \longrightarrow x_1 = 3\sqrt{6}, \quad y_1 = -2\sqrt{10}$$

$$B\left(5\sqrt{6}, -4\sqrt{10}\right) = B(x_2,y_2) \longrightarrow x_2 = 5\sqrt{6}, \quad y_2 = -4\sqrt{10}$$

Luego, aplicando la fórmula de la distancia:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{\left(5\sqrt{6}-3\sqrt{6}\right)^2+\left(-4\sqrt{10}-\left(-2\sqrt{10}\right)\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(2\sqrt{6}\right)^2+\left(-2\sqrt{10}\right)^2}=\sqrt{4\cdot 6+4\cdot 10}$$
$$=\sqrt{64}=8$$
$$\Rightarrow\ d=8$$

**Respuesta**

El resultado de la distancia es 8 unidades.

**262.** Determine la razón "*r*" en que el punto $P(-5,3)$ divide al segmento de recta de extremos $P_1(3,5), P_2(-1,4)$.

**Resolución**

Para determinar la razón, se identifica las primeras coordenadas de los puntos $P(-5,3)$, $P_1(3,5)$ y $P_2(-1,4)$, es decir:

$$x=-5,\qquad x_1=3,\qquad x_2=-1$$

Luego, reemplazando en la fórmula:

$$r=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{x_1-x}{x-x_2}=\frac{3-(-5)}{-5-(-1)}=\frac{8}{-4}=-2$$
$$\Rightarrow\ r=-2$$

**Respuesta**

La razón es -2.

**Dato Importante..**

**Razón de un segmento**

Sean los puntos:

$P_1(x_1,y_1)$ y $P(x,y)$

$P(x,y)$ divide a razón:

$$r=\frac{P_1P}{PP_2}$$

Son
$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$
$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

$r\neq -1$

**263.** Dado los puntos $P_1(5,-6)$, $P_2(1,0)$ y la razón $r=\frac{1}{3}$ encuentre las coordenadas del punto de división $P$ del segmento $P_1, P_2$.

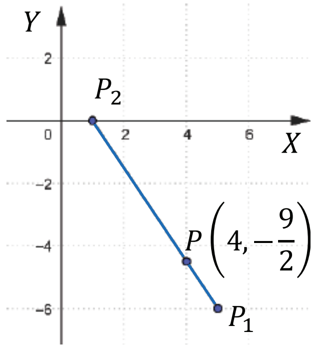
**Resolución**

Identificando las coordenadas de los puntos dados, es decir:

$$P_1(5,-6)=P_1(x_1,y_1)\ \longrightarrow\ x_1=5,\qquad y_1=-6$$
$$P_2(1,0)=P_2(x_2,y_2)\ \longrightarrow\ x_2=1,\qquad y_2=0$$

Luego, por división de un segmento en una razón dada:

**Gráfica:**




$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r} \Rightarrow x=\frac{5+\frac{1}{3}\cdot 1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{16}{4}=4$$

$$\Rightarrow x=4$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r} \Rightarrow y=\frac{-6+\frac{1}{3}\cdot 0}{1+\frac{1}{3}}=\frac{-6}{\frac{4}{3}}=-\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{9}{2}$$

De donde, se tiene las coordenadas del punto de división.

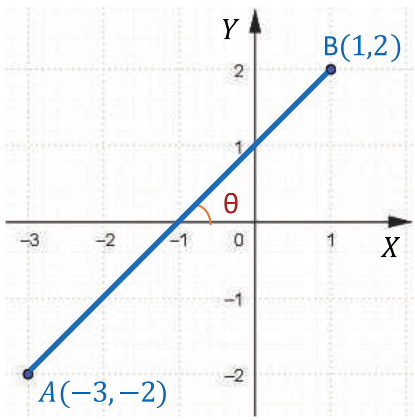
**Respuesta**

El punto de división es $\left(4,-\frac{9}{2}\right)$.

**264.** Determinar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $A(-3,-2)$ y $B(1,2)$.

**Resolución**

Aplicando la fórmula de la pendiente que pasa por dos puntos:




Denotamos la pendiente por $m_{AB}$, luego:

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Como

$A(-3,-2) \longrightarrow x_1=-3,\ y_1=-2$

$B(1,2) \longrightarrow x_2=1,\ y_2=2$

Entonces

$$m_{AB}=\frac{2+2}{1+3}=\frac{4}{4}=1$$

$$\Rightarrow m_{AB}=1$$

La pendiente es el ángulo de inclinación, entonces

$$\tan\theta=m_{AB} \Rightarrow \theta=\tan^{-1}(m_{AB})=\tan^{-1}(1)=45$$

$$\Rightarrow \theta=45^o$$

**Respuesta**

La pendiente y el ángulo de inclinación son 1 y 45°.

**265.** La pendiente entre los puntos es 5. Determinar la ordenada del segundo punto cuando la abscisa es 4 y el primer punto es $A$(-3,-2).

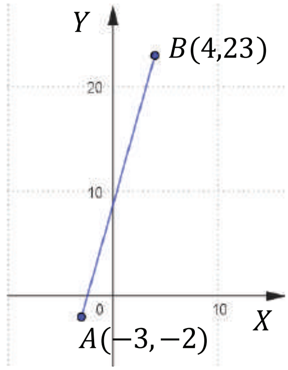
**Resolución**

Como la pendiente entre los puntos es 5, es decir, $m = 5$. Además, se sabe que $A$(-3,-2) y $B(4, y_2)$, donde

$$A(-3,-2) \longrightarrow x_1 = -3,\ y_1 = -2$$

$$B(4, y_2), \longrightarrow x_2 = 2,\ y_2 = ?$$

**Gráfica:**




Aplicando la fórmula de la pendiente:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow 5 = \frac{y_2 + 2}{2 + 3}$$

$$\Rightarrow 5 = \frac{y_2 + 2}{5}$$

$$\Rightarrow 25 = y_2 + 2$$

$$\Rightarrow y_2 = 23$$

De donde, se obtiene el otro punto $B$(4,23).

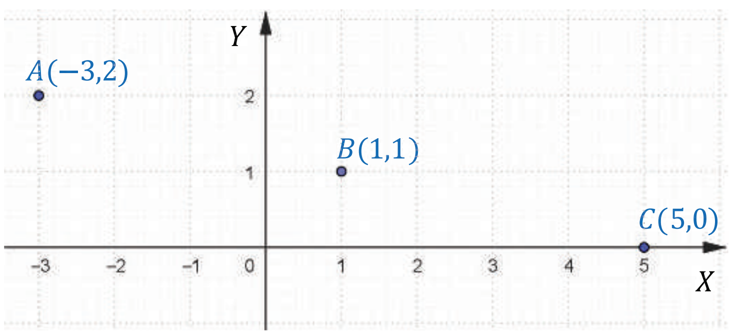
**Respuesta**

La ordenada del segundo punto es 23.

**266.** Mediante la fórmula de la distancia, verifique que los puntos $A$(-3, 2), $B$(1, 1) y $C$(5, 0) son colineales.

**Resolución**

Representando los puntos en plano cartesiano:




Basta verificar, que se cumpla:

$$d_{AC} = d_{AB} + d_{BC} \qquad (1)$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distancia entre $A(-3, 2)$ y $C(5, 0)$ donde $x_1 = -3, \quad y_1 = 2, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = 0$

$$d_{AC} = \sqrt{(5+3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$\Longrightarrow d_{AC} = 2\sqrt{17}$$

Distancia entre $A(-3, 2)$ y $B(1, 1)$ donde $x_1 = -3, \quad y_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 1$

$$d_{AB} = \sqrt{(1+3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$\Longrightarrow d_{AB} = \sqrt{17}$$

Distancia entre $B(1, 1)$ y $C(5, 0)$ donde $x_1 = 1, \quad y_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = 0$

$$d_{BC} = \sqrt{(5-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$\Longrightarrow d_{BC} = \sqrt{17}$$

Luego, reemplazando en la ecuación (1), se tiene:

$$d_{AC} = d_{AB} + d_{BC} \quad \Longrightarrow \quad 2\sqrt{17} = \sqrt{17} + \sqrt{17}$$

$$\Longrightarrow \quad 2\sqrt{17} = 2\sqrt{17}$$

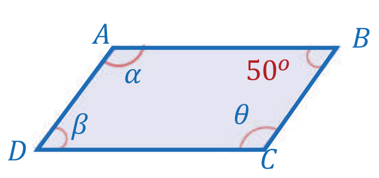
Resulta una identidad, así que los puntos son colineales.

**Respuesta**

Los puntos dados son colineales.

## Perímetros y áreas (cuadriláteros, polígonos y círculos)

**267.** Javier ve un paralelogramo que tiene un ángulo de 50° y calcula los ángulos $\alpha$, $\beta$ y $\theta$, como se ve en la figura:




**Resolución**

Se sabe que $\angle ABC = 50^o$. Aplicando la propiedad del paralelogramo en la figura: los ángulos opuestos son iguales, es decir:

$$\angle ABC = \angle ADC \quad \Longrightarrow \quad \angle ADC = 50^o \quad \Longrightarrow \quad \beta = 50^o \quad (1)$$

En el paralelogramo, los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios, es decir:

$$\alpha + \beta = 180^o \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \alpha + 50^o = 180^o$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = 180^o - 50^o = 130^o$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = 130^o \qquad (2)$$

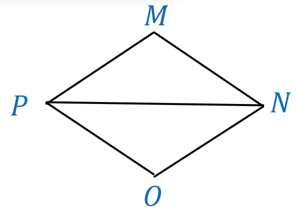
Luego de nuevo, por la propiedad de ángulos opuestos, se tiene:

$$\theta = \alpha \quad \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad \theta = 130^o$$

**Respuesta**

Los ángulos buscados son 130°, 50° y 130°.

**268.** Determinar el ángulo $\angle NPO$, si $\angle PON = 142°$, además $PN \parallel ON$ y $NP$ es bisectriz del ángulo $\angle MPO$.




**Resolución**

Como NP es bisectriz del ángulo $\angle MPO$ y $\angle MNO$ como en la figura, entonces

$$\angle MPN = \angle OPN = \alpha$$

Además $\angle PON = 142^o$

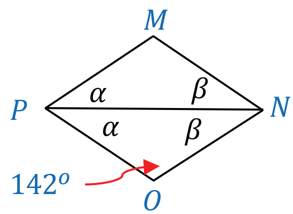
Por la propiedad de ángulos adyacentes, se tiene:

$$2\alpha + 142^o = 180^o \Rightarrow 2\alpha = 180^o - 142^o = 38^o$$

$$\Rightarrow \alpha = 19^o$$

Es decir, $\angle NPO = 19^o$

**Figura:**



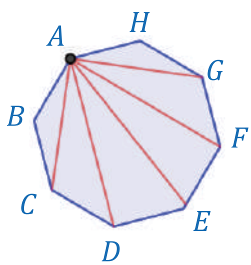

**Respuesta**

El ángulo buscado es 19°.

**269.** Determinar el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice en un octágono.

**Resolución**

Dado un octágono:




Con vértices $A, B, C, D, E, F, G$ y $H$

**Dato Importante..**

**Número de diagonales**

$$d = n - 3$$

Donde:

$d$: diagonales trazadas desde un solo vértice.
$n$: número de lados.

El octágono tiene 8 lados, $n=8$, luego el número de diagonales trazadas desde un mismo vértice es

$$\begin{aligned} d &= n - 3 \qquad \text{fórmula del número de diagonales} \\ &= 8 - 3 = 5 \\ &\Rightarrow d = 5 \end{aligned}$$

**Respuesta**

Número de diagonales es 5.

**270.** Determina cuál es el polígono en el que se pueden trazar 5 diagonales desde un vértice.

**Resolución**

Como dato se tiene el número de diagonales 5, es decir, $d=5$. Luego, aplicando la fórmula del número de diagonales trazadas desde un mismo vértice:

$$\begin{aligned} d = n - 3 \;&\Rightarrow\; n = d + 3 \qquad \text{por dato } d=5 \\ &\Rightarrow\; n = 5 + 3 = 8 \\ &\Rightarrow\; n = 8 \end{aligned}$$

Lo cual, es un octágono, ver ejemplo anterior.

**Respuesta**

El polígono es un octágono.

**271.** Fidel averigua la pregunta de su maestra de matemática: ¿cuál es el polígono regular cuyos ángulos interiores suman 1080°?

**Dato...**

Suma de ángulos interiores de cualquier polígono

$$S_i = 180^o(n-2)$$

**Resolución**

Del enunciado del problema, se tiene, la suma de los ángulos interiores del polígono es $S_i = 1080^o$, entonces:

$$S_i = 180^o(n-2) \;\Rightarrow\; 1080^o = 180^o(n-2)$$

Dividiendo por 180°

$$\Rightarrow 6 = n - 2$$

$$\Rightarrow n = 8$$

**Respuesta**

El polígono tiene 8 lados, entonces es octágono.

**272.** Carlos, se pone a calcular el perímetro y área de la región rectangular de un estadio de 105 por 68 metros.

*Fuente: Los tiempos, Estadio Félix Capriles - Cbba*

**Resolución**

**Datos:**

$a = 105$ m: largo
$b = 68$ m: ancho
$P$ : perímetro
$A$ : área

Calculo del perímetro: El perímetro es la suma de los lados del estadio, entonces:

$$P = 105 + 68 + 105 + 68 = 346\,\text{m}$$

$$\Longrightarrow P = 346\,\text{m}$$

Calculo de área: con la fórmula del área del rectángulo y sustituyendo datos, se tiene:

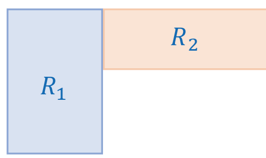
$$A = a \cdot b \Longrightarrow A = 105 \cdot 68 = 7140\,\text{m}^2$$

$$\Longrightarrow A = 7140\,\text{m}^2$$

**Respuesta**

El perímetro y área son 346 m y 7140 $\text{m}^2$.

**273.** En la figura dada a continuación, si las regiones son $R_1 = 40\,\text{cm}^2$ $R_2 = 15\,\text{cm}^2$.
Calcular el área A que une con $R_1$ y $R_2$.




**Resolución**

**Datos:**

$R_1 = 40\ \text{cm}^2$ : área de la primera región

$R_2 = 15\ \text{cm}^2$ : área de la segunda región

$A$: área total

Por la adición de áreas, se tiene:

$$A = R_1 + R_2$$

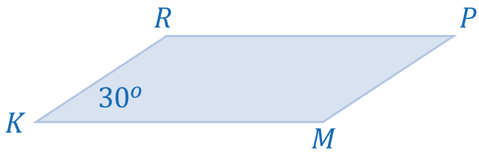
$$= 40\ \text{m}^2 + 15\ \text{m}^2 = 55\ \text{m}^2 \quad \text{por datos}$$

$$\Longrightarrow A = 55\ \text{m}^2$$

**Respuesta**

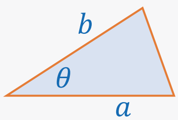
El área pedida es 55 $\text{m}^2$.

**274.** En la figura dada a continuación, $KMPR$ es un paralelogramo. Dado que $m\angle RKM = 30°$, $KM = 11$ y $KR = 8$, calcular el área del paralelogramo.




**Dato Importante..**

Área en términos de un ángulo y sus lados adyacentes




$$A = \frac{1}{2}ab \cdot sin\theta$$

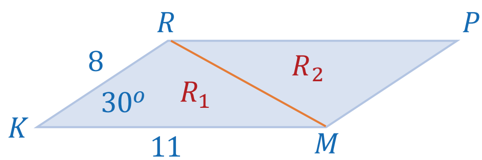
**Resolución**

**Datos:**

$a = KM = 11$

$b = KR = 8$

Son lados adyacentes al ángulo $\theta = 30°$. Observe que el paralelogramo se divide en dos regiones iguales:




Basta calcular el área de la región $R_1$, pues $A(R_1)=A(R_2)$, aplicando la fórmula de área siguiente:

$$A(R_1) = \frac{1}{2}ab \cdot sin\theta \quad \Rightarrow \quad A(R_1) = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot sin30^o$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 22$$

$$\Rightarrow \quad A(R_1) = 22\, u^2$$

Por la adición de áreas, se tiene:

$$A = A(R_1) + A(R_2)$$

$$= 2A(R_1) = 2 \cdot 22 = 44\, u^2$$

$$\Rightarrow A = 44\, u^2$$

**Respuesta**

El área del paralelogramo es 44 $u^2$.

## Geometría del espacio

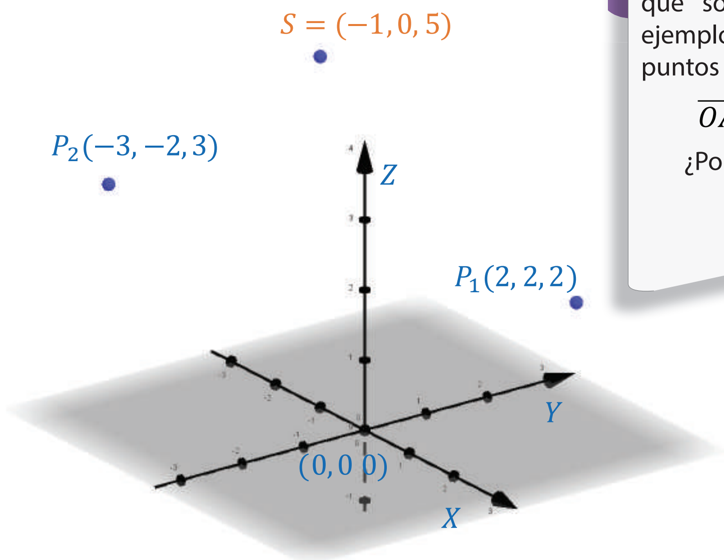
**275.** Samuel se pone a sumar los siguientes puntos $P_1$ (2,2,2) y $P_2$ (-3,-2,3) en el espacio, ¿cuál es la suma de dichos puntos?

**Resolución**

Los puntos en el espacio se suman coordenada a coordenada, es decir:

$$S = P_1 + P_2 = (2,2,2) + (-3,-2,3)$$
$$= (2 + (-3), 2 + (-2), 2 + 3)$$
$$= (-1,0,5)$$
$$\Rightarrow \quad S = (-1,0,5)$$

Representación de los puntos en el espacio:




**Saber más..**

Los puntos en el espacio a veces son llamados vectores que son semirrectas, por ejemplo, si tenemos dos puntos A y B, entonces:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = A$$

¿Por qué se cumple?

**Respuesta**

La suma entre los puntos es (-1,0,5).

**276.** Sandra se pone a restar los siguientes puntos $P_1$ (2,2,2) y $P_2$ (-3,-2,3) en el espacio, ¿cuál es la diferencia de dichos puntos?

**Resolución**

Los puntos en el espacio se restan coordenada a coordenada, es decir:

$$R = P_1 - P_2 = (2,2,2) - (-3,-2,3)$$
$$= (2 - (-3), 2 - (-2), 2 - 3)$$
$$= (2 + 3,\ 2 + 2, -1)$$
$$= (5,\ 4, -1)$$
$$\Rightarrow \quad R = (5,4,-1)$$

Estos puntos se representan en el espacio como en el ejemplo anterior.

**Respuesta**

La diferencia entre los puntos es (5, 4, -1).

**277.** Ángel se pone multiplicar los siguientes puntos $P_1$ (2,2,2) y $P_2$ (-3,-2,3) en el espacio. ¿Cuál es producto de dichos puntos? ¿Sera que el resultado sea un punto de coordenadas?

**Resolución**

Los puntos en el espacio se multiplican coordenada a coordenada del siguiente modo:

$$\begin{aligned} P = P_1 \cdot P_2 &= (2,2,2)\cdot(-3,-2,3) \\ &= 2\cdot(-3) + 2\cdot(-2) + 2\cdot 3 \\ &= -6 - 4 + 5 \\ &= -10 + 5 = -5 \\ &\Rightarrow \ P = -5 \end{aligned}$$

Los puntos en el espacio no se pueden dividir.

El resultado del producto no es un punto de coordenadas, el producto será un número real.

**Respuesta**

El producto entre los puntos es -5.

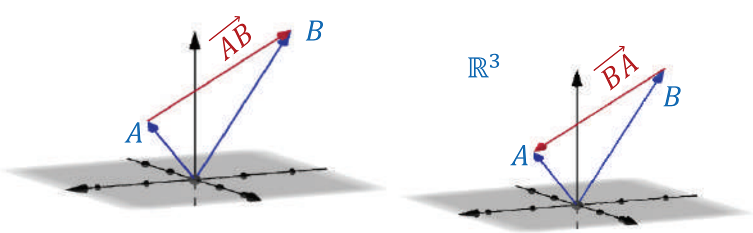
**278.** Dados los puntos $A(2,2,2)$ y $B(-3,-2,3)$. Determinar los componentes de las semirrectas (vectores) $(\overrightarrow{AB})$ y $(\overrightarrow{BA})$, luego muestre el gráfico en el espacio.

**Resolución**

La semirrecta o vector se calcula, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A = (-3,-2,3) - (2,2,2) \\ &= (-3-2, -2-2, 3-2) = (-5,-4,1) \ \Rightarrow \ \overrightarrow{AB} = (-5,-4,1) \\ \overrightarrow{BA} &= A - B = (2,2,2) - (-3,-2,3) \\ &= (2+3, 2+2, 2-3) = (5,4,-1) \ \Rightarrow \ \overrightarrow{BA} = (5,4,-1) \end{aligned}$$

**Gráfica:**



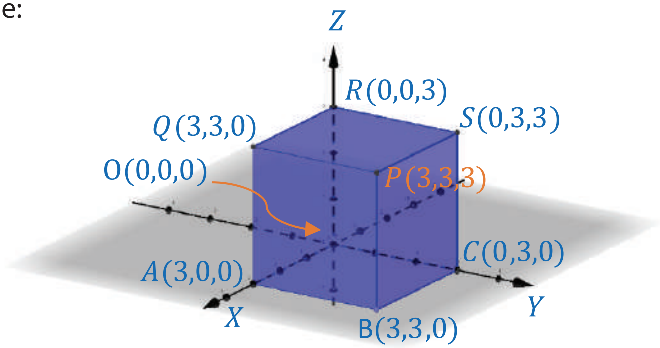

**Respuesta**

Los componentes de las semirrectas son (-5, -4, 1) y (5, 4, -1).

**279.** Dados los puntos $(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(3,3,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,3)$, $(3,0,3)$, $(3,3,3)$ y $(0,3,3)$. Juan y Amalia se pone a representar los puntos, uniéndolos con segmentos en un espacio tridimensional. ¿Qué tipo de cuerpo geométrico será?

**Resolución**

Denotamos los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(3, 3, 0)$, $C(0, 3, 0)$ en el plano y $R(0, 0, 3)$, $Q(3, 0, 3)$, $P(3, 3, 3)$ y $S(0, 3, 3)$ en el espacio. Luego, se tiene:




**Respuesta**

El cuerpo geométrico es un cubo.

**280.** Carla sabe que el área total de un cubo es $12\ \text{cm}^2$. Calcular el volumen del cubo.

**Resolución**

El área total del cubo es $A_T = 12\ \text{cm}^2$

El cubo tiene 6 caras, entonces el área de cada cara del cubo será:

$$A_C = \frac{A_T}{6} = \frac{12}{6} = 2 \quad \Rightarrow \quad A_C = 2\text{cm}^2$$

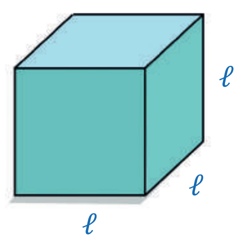
De donde, se obtiene el lado del cubo:

$$A_C = \ell^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \ell = \sqrt{2}\,\text{cm}$$

Luego, el volumen del cubo es:

$$V_{cubo} = \ell \cdot \ell \cdot \ell = \ell^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \quad V_{cubo} = 2\sqrt{2}\,\text{cm}^3$$

**Cubo**



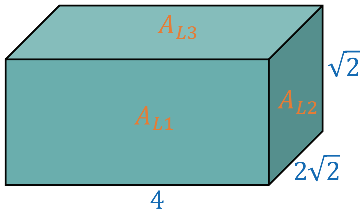

**Respuesta**

El volumen del cubo es $2\sqrt{2}\ \text{cm}^3$.

**281.** Dado el paralelepípedo de dimensiones $\sqrt{2}$, 4 y $2\sqrt{2}$. Calcular el área total y su volumen.

**Resolución**

**Paralelepípedo**




**Calculo de área lateral:**

$$A_{L1} = 4 \cdot \sqrt{2}$$
$$A_{L2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$$
$$A_{L3} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

Así: $A_{L1} = 4\sqrt{2}\text{cm}^2$, $\quad A_{L2} = 4\text{ cm}^2 \quad \wedge \quad A_{L3} = 8\sqrt{2}\text{ cm}^2$

Área total:

$$A_T = 2(A_{L1} + A_{L2} + A_{L3}) = 2\left(4\sqrt{2} + 4 + 8\sqrt{2}\right) = 24\sqrt{2} + 8$$
$$\Rightarrow \quad A_T = \left(24\sqrt{2} + 8\right)\text{ cm}^2$$

Volumen del paralelepípedo:

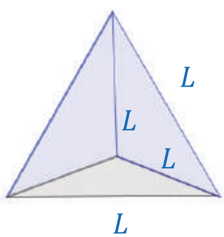
$$V_p = 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 16 \quad \Rightarrow \quad V_P = 16\text{ cm}^3$$

**Respuesta**
El volumen del paralelepípedo es 16 $\text{cm}^3$.

**282.** Si el área total del tetraedro es $27\sqrt{3}\text{ cm}^2$. Calcular su volumen.

**Resolución**

**Tetraedro**




Como el área total es

$$A_T = 27\sqrt{3}\text{ cm}^2 \qquad (1)$$

El área total, viene dado por:

$$A_T = \sqrt{3}L^2 \qquad (2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene:

$$L^2 = 27 \quad \rightarrow \quad L = \sqrt{27} \qquad (3)$$

Volumen del tetraedro:

$$V_T = \frac{\sqrt{2}}{12}L^3 \Rightarrow V_T = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\sqrt{27}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(3\sqrt{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 3 \cdot 3^2\sqrt{3^3}$$
$$= \frac{9\sqrt{2}}{4} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{27}{4}\sqrt{6} \Rightarrow V_T = \frac{27}{4}\sqrt{6}\text{cm}^3$$

**Respuesta**
El volumen del tetraedro es $\frac{27}{4}\sqrt{6}\text{ cm}^3$.

# La línea recta y circunferencia

**283.** Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(0{,}2)$ y tiene pendiente 3.

**Datos**

$$A(0{,}2)$$
$$\downarrow$$
$$x_0 = 0, y_0 = 2$$

Pendiente:

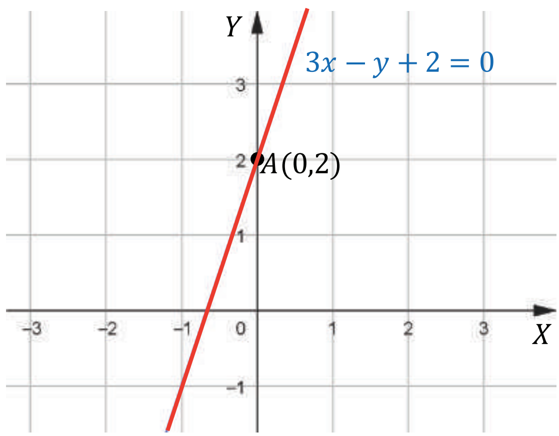
$$m = 3$$

**Resolución**

Reemplazando los datos en la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 3(x - 0)$$
$$\Rightarrow y - 2 = 3x$$
$$\Rightarrow 3x - y + 2 = 0$$

Gráfica de la ecuación general:




**Respuesta**

La ecuación general es $3x - y + 2 = 0$.

**284.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(0{,}1)$ y $B\left(\frac{4}{3}, -1\right)$.

**Datos**

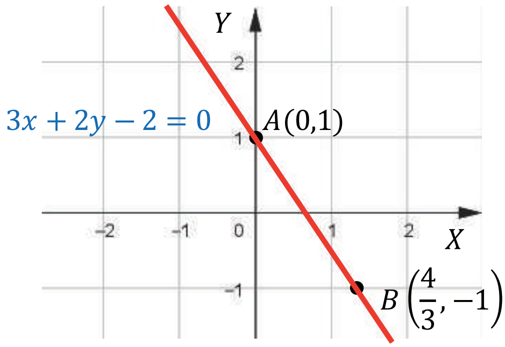
$$A(0{,}1)$$
$$\downarrow$$
$$x_1 = 0, y_1 = 1$$
$$B\left(\frac{4}{3}, -1\right)$$
$$\downarrow$$
$$x_2 = \frac{4}{3}, y_2 = -1$$

**Resolución**

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-1 - 1}{\frac{4}{3} - 0}(x - 0) \Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{\frac{4}{3}}x$$

$$\Rightarrow y - 1 = -\frac{6}{4}x$$




**Gráfica:**

$$\Rightarrow\quad 2y-2=-3x$$

$$\Rightarrow\quad y-1=-\frac{3}{2}x$$

$$\Rightarrow\quad 3x+2y-2=0$$

**Respuesta**

La ecuación de la recta es $3x+2y-2=0$.

**285.** Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es $\frac{1}{3}$ y la intersección con el eje "$Y$" es -2.

**Datos**

$m=\frac{1}{3}$: pendiente

$b=-2$: ordenada

**Resolución**

Por la ecuación pendiente-ordenada en el origen:

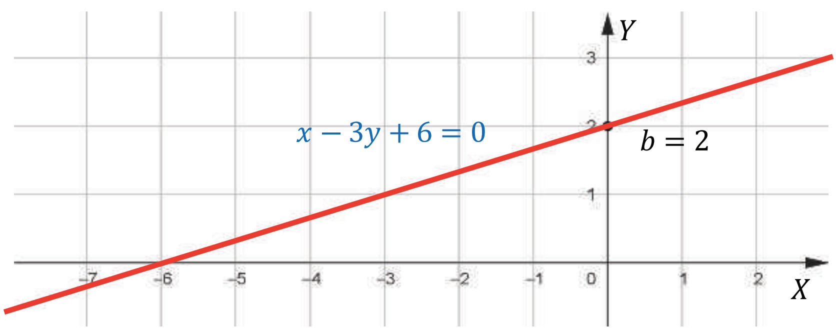
$$y=mx+b$$

$$y=\frac{1}{3}x+(-2)\quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{3}x-2$$

$$\Rightarrow\quad 3\,y=x-6$$

$$\Rightarrow\quad x-3y+6=0$$

**Gráfica:**




**Respuesta**

La ecuación de la recta es $x-3y+6=0$.

**286.** Una recta pasa por los puntos $A(-3,-1)$ y $B(2,-6)$. Encuentre su ecuación en forma simétrica.

**Datos**

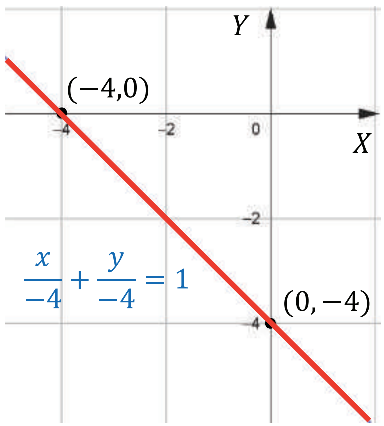
$A(-3,-1)$

$x_1=-3, y_1=-1$

$B(2,-6)$

$x_2=2, y_2=-6$

**Gráfica:**




**Resolución**

Por la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-(-1)=\frac{-6-(-1)}{2-(-3)}(x-(-3))$$

$$\Rightarrow\ y+1=\frac{-5}{5}(x+3)$$

$$\Rightarrow\ y+1=-x-3$$

$$\Rightarrow\ x+y=-4$$

Dividiendo cada término entre -4, se obtiene:

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{-4}=1$$

**Respuesta**

La ecuación simétrica de la recta es $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-4}=1$

**287.** Una recta pasa por el punto $A(-1,5)$ y es paralela a la recta con ecuación $5x$-$3y$+$7$=$0$, hallar su ecuación.

**Datos**

$A(-1,5)$

$x_0=-1, y_0=5$

Sean $\ell_1$ y $\ell_2$ rectas

$\ell_1 \parallel \ell_2 \ \Leftrightarrow\ m_1=m_2$

**Resolución**

$$5x-3y+7=0\ \Rightarrow\ 3y=5x+7$$

$$\Rightarrow\ y=\boxed{\frac{5}{3}}x+\frac{7}{3}$$

La pendiente de la recta es: $m=\frac{5}{3}$

Por la condición del paralelismo, la recta que pasa por (-1,5) tendrá por pendiente $m=\frac{5}{3}$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 5 = \frac{5}{3}\big(x - (-1)\big)$$
$$\Rightarrow y - 5 = \frac{5}{3}(x + 1)$$
$$\Rightarrow 3y - 15 = 5x + 5$$
$$\Rightarrow 5x - 3y + 20 = 0$$

**Respuesta**

La ecuación de la recta es $5x - 3y + 20 = 0$.

**288.** Hallar la ecuación general de la circunferencia de centro en el punto $C$(2,-1) y radio de 2 unidades.

**Datos**

Centro: $C$(2,-1)

$\downarrow$

$h = 2, k = -1$

Radio: $r$=2

**Resolución**

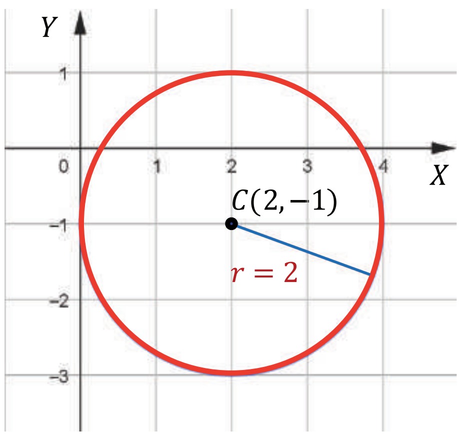
Aplicando la ecuación ordinaria de la circunferencia:

$$(x - h)^2 + (y - h)^2 = r^2$$

Sustituyendo centro y radio, se tiene:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$

**Gráfica:**




**Respuesta**

La ecuación general de la circunferencia es:

$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

**289.** Hallar la ecuación general de la circunferencia de centro en el punto $C$(-2,1) y que pasa por el punto $P$(-3,-1).

**Datos**

Centro: C(-2,1)

$h=-2, k=1$

Punto: P (-3,-1)

$x_2=-3, y_2=-1$

**Resolución**

Aplicando la distancia entre dos puntos $C$(-2,1) y $P$(-3,-1), lo cual será el radio de la circunferencia:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Luego

$$r=\sqrt{(-3+2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}$$
$$=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow\quad r=\sqrt{5}$$

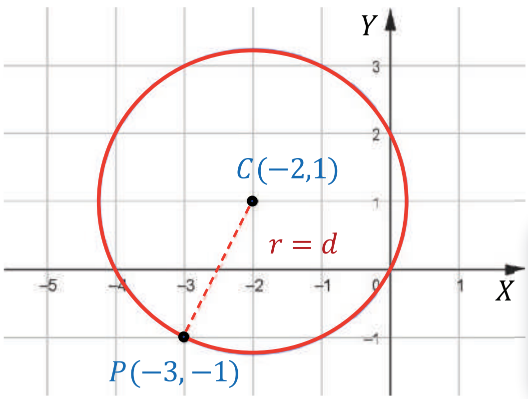
Sustituyendo el centro y radio en la ecuación ordinaria, se tiene:

$$(x-h)^2+(y-h)^2=r^2$$

Luego

$$(x+2)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow x^2+4x+4+y^2-2y+1=5$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+4x-2y=0$$

**Gráfica:**




**Respuesta**
La ecuación general de la circunferencia es $x^2+y^2+4x-2y=0$.

**290.** Hallar la ecuación de la circunferencia de diámetro en el segmento formado por los puntos $A$(-3, 0) y $B$(1, -2).

**Resolución**

En primer lugar, se determina el centro $C(h,k)$, por la fórmula del punto medio entre los puntos $A$(-3,0) y $B$(1,-2), se tiene:

$$C=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad C=\left(\frac{-3+1}{2},\frac{0-2}{2}\right)=(-1,-1)$$
$$\Rightarrow\quad C(-1,-1)$$

Básico 01

Aplicando la distancia entre dos puntos $C(-2, 1)$ y $B(1, -2)$, lo cual será el radio de la circunferencia:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

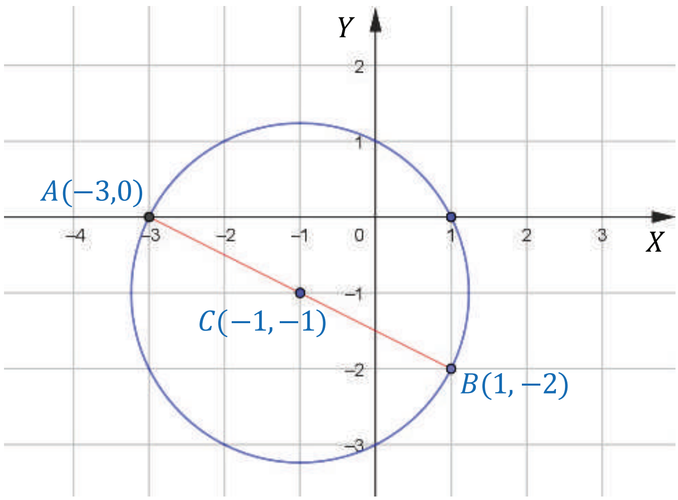
Luego

$$r = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt{5}$$

Sustituyendo el centro $C(-1,-1)$ y radio $r = \sqrt{5}$ en la ecuación ordinaria, se tiene:

$$(x-h)^2 + (y-h)^2 = r^2 \;\Longrightarrow\; (x+1)^2 + (y+1)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$\Longrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 5$$
$$\Longrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$$

**Gráfica:**




**Respuesta**

La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$.

**291.** Hallar la ecuación general de la circunferencia que tiene centro en $C(2,-1)$ y que pasa por el origen.

**Resolución**

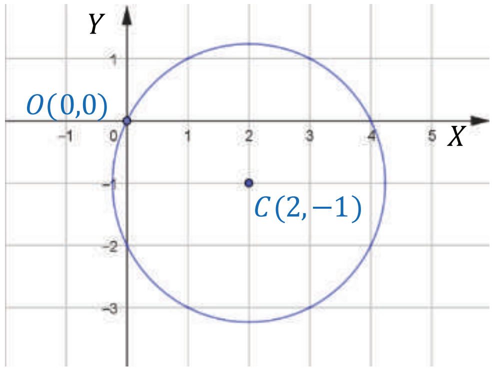
Como se conoce el centro $C(2,-1)$ y el origen $O(0,0)$, el radio será la distancia entre dichos puntos, es decir:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \;\Longrightarrow\; r = \sqrt{(0-2)^2 + (0+1)^2}$$
$$= \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt{5}$$

Sustituyendo el centro $C(2,-1)$ y radio $r = \sqrt{5}$ en la ecuación ordinaria, se tiene:

$$(x-h)^2+(y-h)^2=r^2 \implies (x-2)^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$\implies x^2-4x+4+y^2+2y+1=5$$
$$\implies x^2+y^2-4x+2y=0$$

**Gráfica:**




**Respuesta**
La ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2-4x+2y=0.$

## La parábola, elipse e hipérbola

**292.** Grafica y determina las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y la ecuación del eje de la siguiente parábola: $2x^2-8y=0$

**Resolución**

Escribiendo en su forma canónica, es decir:

$$2x^2-8y=0 \quad\longrightarrow\quad 2x^2=8y \quad\Rightarrow\quad x^2=4y$$

Donde:

$$4p=4 \quad\longrightarrow\quad p=1$$

Como $p=1>0$ entonces la parábola se abre hacia arriba, al sustituir en las fórmulas se determinan sus elementos y luego se grafica.

Foco: $F(0,p) \longrightarrow F(0,1)$

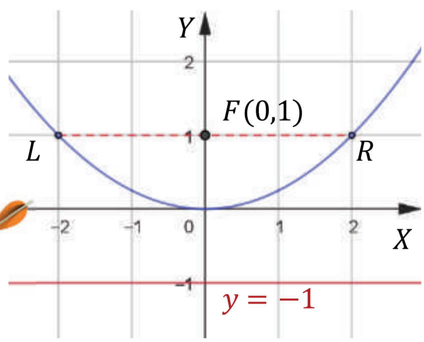
Directriz: $y=-p \longrightarrow y=-1$

Lado recto: $LR=|4p|=|4\cdot 1|=4$

$\longrightarrow LR=4$

Eje: $x=0$

**Grafica:**




**Respuesta**
Foco: $F(0,1)$, Directriz: $y=-1$,
$LR=4$, Eje: $x=0$.

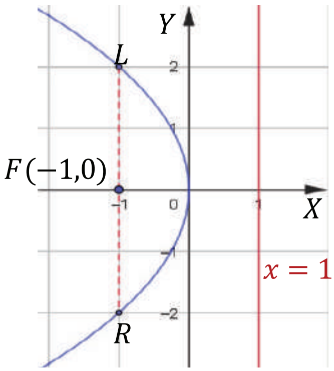
**293.** Grafica y determina las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y la ecuación del eje de la siguiente parábola: $3y^2 + 12x = 0$.

**Resolución**

Escribiendo en su forma canónica, es decir:

$$3y^2 + 12x = 0 \quad \longrightarrow \quad 3y^2 = -12x \quad \Rightarrow \quad y^2 = -4x$$

**Gráfica:**




Donde: $4p = -4 \quad \longrightarrow \quad p = -1$
Como $p = -1 < 0$ entonces la parábola se abre hacia izquierda, al sustituir en las fórmulas se determinan sus elementos y luego se grafica.

**Foco:** $F(p, 0) \longrightarrow F(-1,0)$
**Directriz:** $x = -p \longrightarrow x = 1$
**Lado recto:** $LR = |4p|$
$LR = |4 \cdot (-1)| = |-4| = 4$
**Eje:** $y = 0$

**Respuesta**
Foco: $F(-1,0)$, Directriz: $x = 1$, $LR = 4$, Eje: $y = 0$.

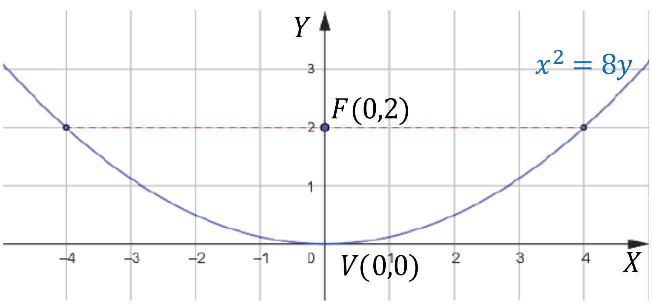
**294.** Hallar la ecuación de la parábola de vértice en $V(0,0)$ y foco $F(0,2)$.

**Resolución**

Como $F(0,2)$, se identifica el parámetro $p = 2 > 0$ y la parábola se abre hacia arriba, así:

$$x^2 = 4py \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \cdot 2y = 8y \quad \Rightarrow \quad x^2 = 8y$$

**Gráfica:**




**Respuesta**
$x^2 = 8y$.

**295.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuyas sumas de distancias a los puntos fijos (2,0) y (-2,0) es igual a 6 unidades.

## Resolución

Sean $P(x,y)$, $F_1(2{,}0)$ y $F_2(-2{,}0)$, con:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Por la definición: $F_2P+PF_1=2a$, con $2a=6$, luego

$$\sqrt{(x-(-2))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=6$$
$$\Rightarrow\ \sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=6$$
$$\Rightarrow\ \sqrt{(x+2)^2+y^2}=6-\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow\ (x+2)^2+y^2=\left(6-\sqrt{(x-2)^2+y^2}\right)^2$$
$$\Rightarrow\ x^2+4x+4+y^2=36-12\sqrt{(x-2)^2+y^2}+(x-2)^2+y^2$$
$$\Rightarrow\ x^2+4x+4+y^2=36-12\sqrt{(x-2)^2+y^2}+x^2-4x+4+y^2$$
$$\Rightarrow\ 12\sqrt{(x-2)^2+y^2}=36-8x$$

$$\Rightarrow\ \left(12\sqrt{(x-2)^2+y^2}\right)^2=(36-8x)^2$$
$$\Rightarrow\ 144(x^2-4x+4+y^2)=1296-576x+64x^2$$
$$\Rightarrow\ 144x^2-576x+576+144y^2=1296-576x+64x^2$$
$$\Rightarrow\ 80x^2+144y^2-720=0$$
$$\Rightarrow\ 5x^2+9y^2-45=0$$

**Respuesta**
La ecuación del lugar geométrico es $5x^2+9y^2-45=0$, por definición corresponde una elipse.

**296.** Determinar los elementos y graficar la elipse cuya ecuación es:

$$9x^2+25y^2=225$$

## Resolución

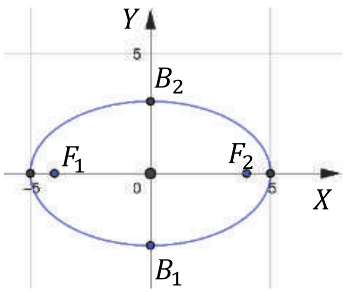
Transformando la ecuación a su forma ordinaria:

$$9x^2+25y^2=225\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\qquad(1)$$

Como el denominador mayor se encuentre bajo la variable $x$, corresponde a una elipse horizontal, luego de (1), se tiene:

$$a^2 = 25, \qquad b^2 = 9 \quad \rightarrow \quad a = 5, b = 3$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \quad \rightarrow \quad c = 4$$

**Grafica:**




**Elementos de la elipse horizontal**

**Vértices:** $V(\pm a, 0) \rightarrow V_1\ (-5{,}0),\ V_2(5{,}0)$

**Focos:** $F(\pm c, 0) \rightarrow F_1(-4{,}0),\ F_2(4{,}0)$

**Extremos del eje menor:**

$B(0, \pm b) \rightarrow B_1(0,-3),\ B_2(0{,}3)$

**Lado recto:** $LR = \dfrac{2b^2}{a} \rightarrow LR = \dfrac{18}{5}$

**Excentricidad:** $e = \dfrac{c}{a}\ (e < 1) \rightarrow e = \dfrac{4}{5}$

**Respuesta**

$F_1(-4{,}0),\ F_2(4{,}0);\ B_1(0,-3),\ B_2(0{,}3);\ e = \frac{4}{5}$

**297.** Determinar los elementos y graficar la elipse cuya ecuación es:

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

**Resolución**

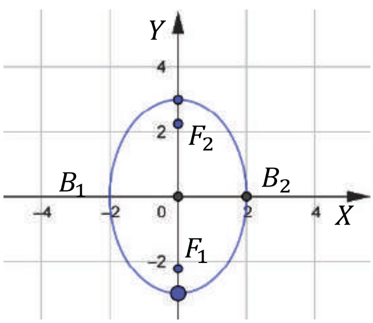
Transformando la ecuación a su forma ordinaria:

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad (1)$$

Como el denominador menor se encuentre bajo la variable $x$, corresponde a una elipse vertical, luego de (1), se tiene:

$$b^2 = 4, \qquad a^2 = 9 \quad \rightarrow \quad b = 2, a = 3$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{5}$$

**Gráfica:**




**Elementos de elipse horizontal**

**Vértices:** $V(0, \pm a) \rightarrow V_1\ (0,-3),\ V_2(0{,}3)$

**Focos:** $F(0, \pm c) \rightarrow F_1\left(0,-\sqrt{5}\right),\ F_2\left(0,\sqrt{5}\right)$

**Extremos del eje menor:**

$B(\pm b, 0) \rightarrow B_1(-2{,}0),\ B_2(2{,}0)$

**Lado recto:** $LR = \dfrac{2b^2}{a} \rightarrow LR = \dfrac{8}{3}$

**Excentricidad:** $e = \dfrac{c}{a}\ (e < 1) \rightarrow e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

**Respuesta**

$F_1\left(0,-\sqrt{5}\right),\ F_2\left(0,\sqrt{5}\right);\ B_1\ (0,-3),\ B_2(0{,}3);\ e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

**298.** Hallar la ecuación del lugar geométrico (hipérbola) de los puntos cuya diferencia de distancias a los dos puntos fijos (0,2) y (0,-2) es igual a 6 unidades.

**Resolución**

Sean $P(x,y)$, $F_1(0,2)$ y $F_2(0,-2)$ por la distancia entre dos puntos:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Por la definición: $F_2P+PF_1=2a$, con $2a=6$, luego

$$\sqrt{(x-(-2))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=6$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=6$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{(x+2)^2+y^2}=6-\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow\ (x+2)^2+y^2=\left(6-\sqrt{(x-2)^2+y^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2+4y+4=36+12\sqrt{x^2+(y-2)^2}+x^2+(y-2)^2$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2+4y+4=36+12\sqrt{x^2+(y-2)^2}+x^2+y^2-4y+4$$

$$\Rightarrow\ 12\sqrt{x^2+(y-2)^2}=-8y-36$$

$$\Rightarrow\ \left(12\sqrt{x^2+(y-2)^2}\right)^2=\left(-4(2y+9)\right)^2$$

$$\Rightarrow\ 144(x^2+y^2-4y+4)=16(4y^2+36y+81)$$

$$\Rightarrow\ 9x^2+9y^2-36y+36=4y^2+36y+81$$

$$\Rightarrow\ 9x^2+5y^2-72y-45=0$$

**Respuesta**

La ecuación del lugar geométrico es $9x^2+5y^2-72y-45=0$.

**299.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuyo producto de las pendientes de las rectas que los unen con los puntos fijos (-2,1) y (3,2) es igual a 4, representa una hipérbola.

**Resolución**

Sean $P(x,y)$, $F_1(-2,1)$, $F_2(3,2)$ y $d=4$. Por la condición del problema se tiene pendientes:

$$m_{PF_1}=\frac{y-1}{x-(-2)}=\frac{y-1}{x+2}\quad\wedge\quad m_{PF_2}=\frac{y-3}{x-2}$$

Luego

$$m_{PF_1} \cdot m_{PF_2} = 4 \;\Rightarrow\; \left(\frac{y-1}{x+2}\right)\cdot\left(\frac{y-3}{x-2}\right) = 4$$

$$\Rightarrow\; \frac{y^2-4y+3}{x^2-4} = 4$$

**Respuesta**

La ecuación del lugar geométrico es $4x^2 - y^2 + 4y - 19 = 0.$

**300.** Determina la ecuación de hipérbola que tiene su centro en el origen, con su eje transversal a lo largo del eje "$Y$" que pasa por los puntos $(4{,}6)$ y $(1{,}\text{-}3)$.

**Resolución**

El eje focal está sobre el eje "$Y$" y por la ecuación de la hipérbola con centro en el origen:

$$\mathcal{H}:\quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Luego

$$(4{,}6) \in \mathcal{H} \;\longrightarrow\; \frac{6^2}{a^2} - \frac{4^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

$$(1,-3) \in \mathcal{H} \;\longrightarrow\; \frac{(-3)^2}{a^2} - \frac{1^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2), se tiene:

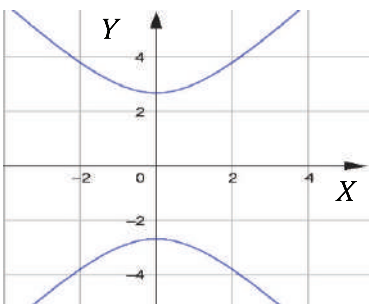
$$\frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = \frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} \;\Rightarrow\; \frac{27}{a^2} = \frac{15}{b^2} \;\Rightarrow\; a^2 = \frac{9}{5}b^2 \qquad (3)$$

Luego, (3) en (2) :

$$\frac{9}{\frac{9}{5}b^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; b^2 = 4$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow}\; a^2 = \frac{36}{5}$$

**Gráfica:**




Ahora, sustituyendo en la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$:

$$\frac{y^2}{\frac{36}{5}} - \frac{x^2}{4} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{5y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow\; 5y^2 - 9x^2 - 36 = 0$$

**Respuesta**

La ecuación de la hipérbola es $5y^2 - 9x^2 - 36 = 0.$

# Geometría plana

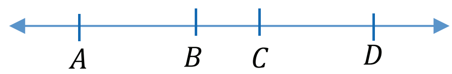
**301.** Sobre una recta se ponen los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ de manera consecutiva. Entre $B$ y $D$ se toma el punto $C$, tal que $AC = \dfrac{CD}{4}$. Determinar el segmento $BC$ sabiendo que: $BD - 4AB = 20$.

**Datos**

$$AC = \frac{CD}{4}$$

$$BD - 4AB = 20$$

**Resolución**




Aplicando la resta de segmentos, en la gráfica:

$$BC = AC - AB$$

$$\Rightarrow \quad BC = \frac{CD}{4} - AB \qquad (1)$$

Además del gráfico, se tiene $CD = BD - BC$, reemplazando en (1):

$$BC = \frac{BD - BC - 4AB}{4} \quad \Rightarrow \quad 4BC = BD - BC - 4AB$$

$$\Rightarrow \quad 5BC = \underbrace{BD - 4AB}_{20}$$

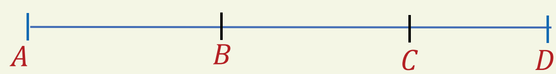
$$\Rightarrow \quad 5BC = 20$$

$$\Rightarrow \quad BC = 4$$

**Respuesta**

El valor del segmento $BC$ es 4.

**302.** En la gráfica, los puntos $A,B,C$ y $D$ son colineales, se cumple que $AB = 4$, $AD = 12$ y $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Calcular el segmento $AC$.




**Datos**

$AB = 4$
$AD = 12$
$AB \cdot CD = AD \cdot BC$
$AC = ?$

**Resolución**

Empleando adición de segmentos, de la gráfica se tiene:

$$AD = AB + BC + CD$$

$$\Rightarrow 12 = 4 + BC + CD$$

$$\Rightarrow BC + CD = 8 \qquad (1)$$

Por otro lado, como

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC \Rightarrow 4CD = 12BC$$

$$\Rightarrow CD = 3BC \qquad (2)$$

Ahora reemplazando (2) en (1):

$$BC + 3BC = 8 \Rightarrow 4\,BC = 8 \Rightarrow BC = 2 \qquad (3)$$

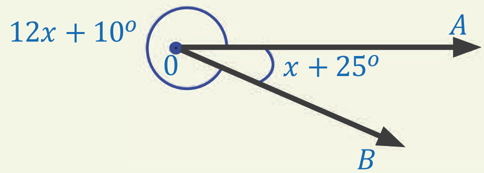
Luego, de la gráfica y por dato, se tiene:

$$AC = AB + BC = 4 + 2 = 6 \Rightarrow AC = 6$$

**Respuesta**

El resultado es 6.

**303.** Juana determina el valor del ángulo exterior $\angle AOB$ y el ángulo interior $\angle BOA$, de la figura:




## Resolución

Se identifica de la figura, los ángulos $\angle AOB = 12x + 10°$ y $\angle BOA = x + 25°$ son conjugados, entonces:

$$\angle AOB + \angle BOA = 360° \Rightarrow 12x + 10° + x + 25° = 360°$$
$$\Rightarrow 13x = 360° - 35°$$
$$\Rightarrow x = 25°$$

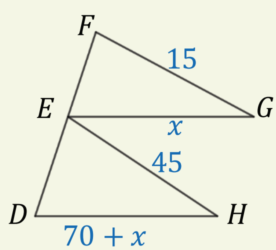
Luego los ángulos buscados son:

$$\angle AOB = 12 \cdot 25° + 10° = 310° \longrightarrow \angle AOB = 310°$$
$$\angle BOA = 25° + 10° = 50° \longrightarrow \angle BOA = 50°$$

**Respuesta**

Los ángulos son 310° y 50°.

**304.** Calcule el valor de $x$, si $EG \parallel DH$ en la siguiente figura:



## Resolución

Por el Teorema de Tales, como $EG \parallel DH$, entonces

$$\Delta DEH \sim \Delta EGF$$

Por semejanza de triángulos, la proporcionalidad se establece como:

$$\frac{70+x}{x} = \frac{45}{15} \implies \frac{70+x}{x} = 3$$
$$\implies 70 + x = 3x$$
$$\implies 2x = 70$$
$$\implies x = 35$$

**Respuesta**

El resultado es 35.

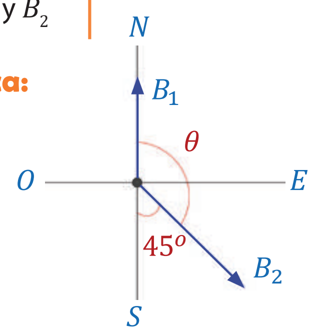
**305.** En el Lago Titicaca, un bote sale de un puerto con dirección norte y otro sale del mismo puerto con dirección sur a este de 45°. Determine el ángulo que forman las direcciones de los dos botes.

## Resolución

### Datos

$B_1$: primer bote
$B_2$: segundo bote
$\theta$: angulo entre $B_1$ y $B_2$

### Gráfica:




*Fuente: Lago Titicaca Puerto Chaguaya*

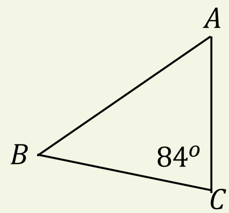
La dirección del norte con el sur forman un ángulo de 180°, entonces son ángulos suplementarios, es decir:

$$\theta + 45^o = 180^o \implies \theta = 180^o - 45^o = 135^o$$
$$\implies \theta = 135^o$$

**Respuesta**

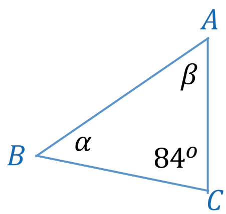
El ángulo que forman entre las dos botes es 135°.

**306.** Uno de los ángulos interiores de un triángulo mide 84° y la diferencia de los otros dos es 18°. ¿Cuánto miden los ángulos restantes?




## Resolución

Considerando el triangulo $\Delta ABC$.




La diferencia de otros dos ángulos:

$$\alpha - \beta = 18° \qquad (1)$$

Luego, por la suma de ángulos interiores del triangulo $\Delta ABC$, se tiene:

$$\alpha + \beta + 84 = 180° \qquad (2)$$

De donde, sumando (1) de (2), se obtiene:

$$2\alpha + 84 = 198 \implies 2\alpha = 114 \implies \alpha = 57°$$

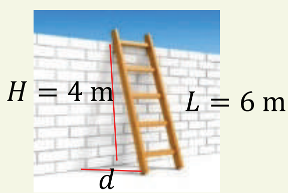
Ahora $\alpha = 57°$ en (1), se tiene

$$\beta = \alpha - 18° = 57° - 18° = 39° \implies \beta = 39°$$

**Respuesta**

Los ángulos restantes son 57° y 39°.

**307.** Miguel, con una escalera de 6 m desea subir al extremo de un muro de 4 m de altura. ¿A qué distancia se necesita colocar la base de la escalera para que el otro extremo coincida con el extremo a del muro?




## Datos

$H = 4$ m (altura del muro)
$L = 6$ m (longitud de la escalera)

## Resolución

En la figura, aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$L^2 = H^2 + d^2 \implies d = \sqrt{L^2 - H^2} \quad \text{reemplazando datos}$$

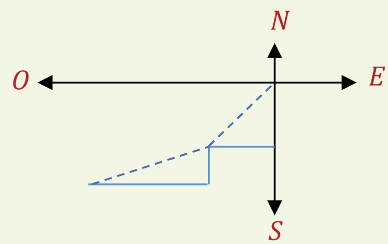
$$\implies d = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} \approx 4{,}5$$

$$\implies d = 4{,}5 \text{ m}$$

**Respuesta**

La respuesta es 4,5 metros.

**308.** Ana camina 4 km hacia el sur, 3 hacia el oeste, 2 hacia el sur y 4 más hacia el oeste. ¿Cuál es la distancia entre el punto de partida y su destino?




## Resolución

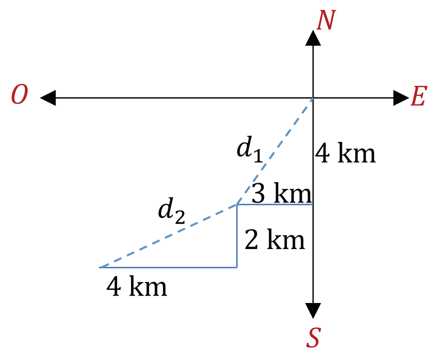
Considerando la figura y calculando las distancias, aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$d_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$$

$$\Longrightarrow d_1 = 5$$

$$d_2 = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

$$\Longrightarrow d_2 = 2\sqrt{5}$$




Luego, la distancia del punto de partida hasta su destino es:

$$d = d_1 + d_2 = 5 + 2\sqrt{5} \approx 9{,}5 \quad \Longrightarrow \quad d = 9{,}5 \text{ km}$$

**Respuesta**

La distancia entre el punto de partida y su destino es 9,5 kilometros.

# Plano cartesiano (espacio bidimensional)

**309.** Determinar un punto en el eje "$X$" que sea equidistante de los puntos $A(0{,}3)$ y $B(2{,}\text{-}3)$.

## Resolución

Sea $E(x,\ 0)$ el punto equidistante de los puntos $A(0,\ 3)$ y $B(2,\ \text{-}3)$, luego aplicando la fórmula de la distancia

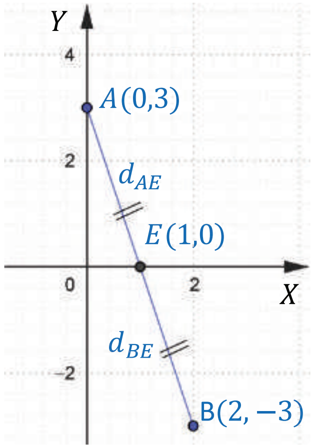
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se tiene:

$$d_{AE} = d_{BE}$$

Entonces

$$\sqrt{(x-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + \left(0-(-3)\right)^2}$$




Elevando al cuadrado

$$\Rightarrow x^2 + 9 = (x-2)^2 + 9$$

$$\Rightarrow x^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x = 1$$

De donde, se obtiene el punto $E(1,0)$ lo que es equidistante de los puntos $A$ y $B$.

**Respuesta**

Por consiguiente, un punto en el eje "$X$" es 1.

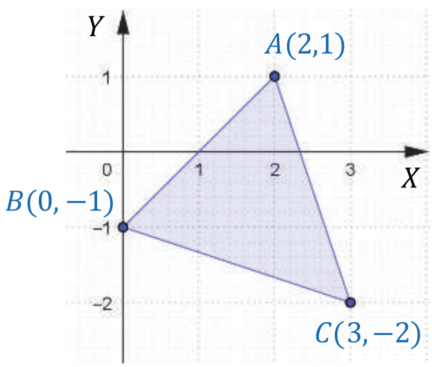
**310.** Pedro verifica que los puntos $A(2,1)$, $B(0,-1)$ y $C(3,-2)$, son los vértices de un triángulo isósceles.

## Resolución

Un triángulo es isósceles si dos de sus lados son iguales, para el cual, basta determinar dos lados iguales, por la fórmula de la distancia

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

## Gráfica:




De la gráfica, se tiene:

$$d_{AC} = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-1)^2}$$

$$= \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow d_{AC} = \sqrt{10}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(3-0)^2 + (-2+1)^2}$$

$$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow d_{BC} = \sqrt{10}$$

De donde, se obtiene que

$$d_{AC} = d_{BC}$$

**Respuesta**

El triángulo dado, es isósceles.

**311.** Dado un segmento que tiene una longitud de 5u, cuya pendiente es igual a $m = \dfrac{4}{3}$, con extremos en $A(2, 1)$ y $B(x, y)$. Determinar las coordenadas del punto $B$.

**Datos**

$$d_{AB} = 5\text{u}$$
$$m = \frac{4}{3}$$

**Resolución**

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Luego

$$5 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \quad \text{elevando al cuadrado}$$
$$\Rightarrow 25 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y - 20 = 0 \qquad (1)$$

Pendiente

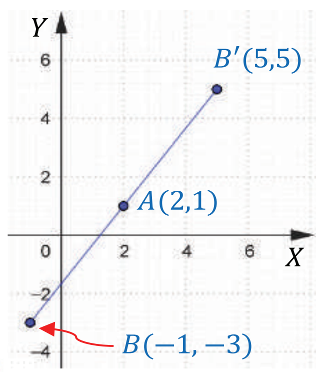
$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{y-1}{x-2} \Rightarrow 4x - 8 = 3y - 3$$
$$\Rightarrow 4x - 8 = 3y - 3$$
$$\Rightarrow x = \frac{5 + 3y}{4} \qquad (2)$$

Luego, (2) en (1):

$$\left(\frac{5+3y}{4}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{5+3y}{4}\right) + y^2 - 2y - 20 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{25 + 30y + 9y^2}{16} - 5 - 3y + y^2 - 2y - 20 = 0$$
$$\Rightarrow 25y^2 - 50y - 375 = 0 \quad \text{multiplicando por } 1/25$$
$$\Rightarrow y^2 - 2y - 15 = 0$$
$$\Rightarrow (y-5)(y+3) = 0$$
$$\Rightarrow y = 5, y = -3$$

Luego

$$y = 5 \xrightarrow{(2)} x = \frac{5 + 3 \cdot 5}{4} = 5$$
$$\Rightarrow x = 5, y = 5$$
$$y = -3 \xrightarrow{(2)} x = \frac{5 + 3 \cdot (-3)}{4} = -1$$
$$\Rightarrow x = -1, y = -3$$



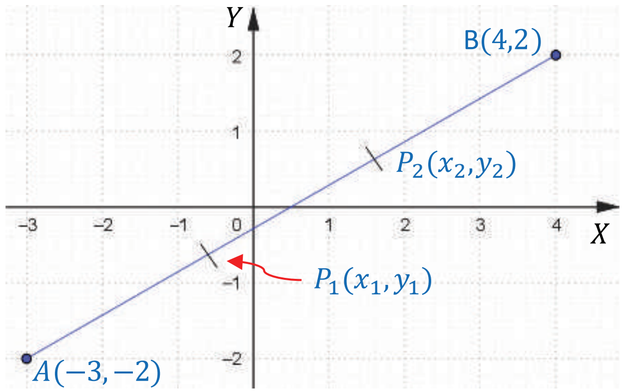

Los extremos son: $B'(5, 5)$ y $B(-1, -3)$.

**Respuesta**

Las coordenadas son $B'(5,5)$ y $B(-1,-3)$.

**312.** Hallar los puntos que dividen en tres partes iguales a la recta determinada por los puntos $A(-3,-2)$ y $B(4,2)$.

**Resolución Gráfica:**




Sean $P_1$ y $P_2$ los puntos de división. Determinemos el punto $P_1$ $(x_1,y_1)$ entre $A(-3,-2)$ y $B(4,2)$, donde la razón es

$$r=\frac{AP_1}{P_1B}=\frac{AP_1}{2AP_1}=\frac{1}{2}$$

$$x_1=\frac{x_0+rx_3}{1+r}=\frac{-3+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}\qquad\Rightarrow\quad x_1=-\frac{2}{3}$$

$$y_1=\frac{y_0+ry_3}{1+r}=\frac{-2+\frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}\qquad\Rightarrow\quad y_1=-\frac{2}{3}$$

Donde, el punto es $P_1\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$

El punto $P_2(x_2,y_2)$ entre $A(-3,-2)$ y $B(4,2)$, donde la razón es

$$r=\frac{AP_2}{P_2B}=\frac{2P_2B}{P_2B}=2$$

$$x_2=\frac{x_0+rx_3}{1+r}=\frac{-3+2\cdot 4}{1+2}=\frac{5}{3}\qquad\Rightarrow\quad x_1=\frac{5}{3}$$

$$y_2=\frac{y_0+ry_3}{1+r}=\frac{-2+2\cdot 2}{1+2}=\frac{2}{3}\qquad\Rightarrow\quad y_1=\frac{2}{3}$$ Y el punto es $P_2\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$

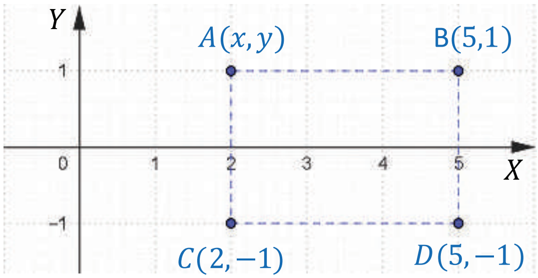
**Respuesta**

Los puntos son $\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$.

**313.** Los vértices de un rectángulo son (5, 3),(6, 1),(2, -1) y $(x, y)$. Determinar las coordenadas del cuarto vértice.

**Resolución**

Denotemos los vértices por $A$(x,y), $B$(5,1), $C$(2,-1) y $D$(5,-1).
Gráficamente, es fácil obtener el cuarto vértice.




Analíticamente, las pendientes en todo rectángulo son

$$m_{AB} = m_{CD} \quad \wedge \quad m_{AC} = m_{BD} \qquad (1)$$

Además, los lados del rectángulo se cumplen:

$$AB = CD \quad \wedge \quad AC = BD \qquad (2)$$

Luego, desarrollando la distancia de (2) se tiene:

$$AC = BD \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(5-5)^2 + (-1-1)^2}$$

Elevando al cuadrado

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 = 0 \qquad (3)$$

Observe que la pendiente de la recta que pasa entre los puntos $C$ y $D$ es cero, lo mismo cuando pasa por $A$(x,y) y $B$(5, 1), entonces

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow 0 = \frac{1-y}{5-x} \Rightarrow y = 1$$

Reemplazando en la ecuación (3) se tiene:

$$x^2 - 4x + 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, x = 2$$

De donde, se obtiene $x = 2$, $y = 1$, entonces $A(2, 1)$.

**Respuesta**

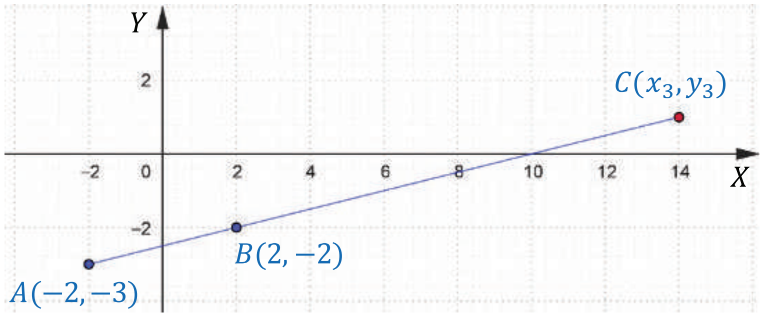
Por consiguiente, el cuarto vértice es (2, 1).

**314.** Dado el segmento $AC$ que une $A$(-2, -3) con $B$(2, -2) se prolonga hasta el punto $C$, sabiendo que $BC = 3AB$. Determinar las coordenadas de $C$.

**Intermedio 02**

## Resolución

**Gráfica:**




Como $BC = 3AB$, entonces la razón es $r = \dfrac{1}{3}$ , luego con respecto al punto $B$(2,-2), se tiene:

$$x_2 = \frac{x_1 + rx_3}{1+r} = \frac{-2+\frac{1}{3}\cdot x_3}{1+\frac{1}{3}} = \frac{-6+x_3}{4} \quad \Rightarrow \; 2 = \frac{-6+x_3}{4}$$

$$\Rightarrow \; 8 = -6 + x_3$$

$$\Rightarrow \; x_3 = 14$$

$$y_2 = \frac{y_1 + ry_3}{1+r} = \frac{-3+\frac{1}{3}\cdot y_3}{1+\frac{1}{3}} = \frac{-9+y_3}{4} \quad \Rightarrow \; -2 = \frac{-9+y_3}{4}$$

$$\Rightarrow \; -8 = -9 + y_3$$

$$\Rightarrow \; y_3 = 1$$

Así, se obtiene el punto $C(14{,}1)$.

**Respuesta**

Por consiguiente, las coordenadas de $C$ son 14 y 1.

**315.** El segmento de extremos $A(2,\, 3)$ y $B(8,\, 12)$ es dividido por el punto $P(a,\, b)$, tal que $AP = 3PB$. Calcular $a + b$.

## Resolución

Como $AP = 3PB$, entonces la razón es $r = 3$ y considerando los puntos $A(2,\, 3)$ y $B(8,\, 12)$ se obtiene las coordenadas de $P$(a, b), es decir:

$$a = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{2+3\cdot 8}{1+3} = \frac{26}{4} \quad \Rightarrow \; a = \frac{26}{4}$$

$$b = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{3+3\cdot 12}{1+3} = \frac{39}{4} \quad \Rightarrow \; b = \frac{39}{4}$$

Luego

$$a+b=\frac{26}{4}+\frac{39}{4}=\frac{65}{4} \quad \Longrightarrow \quad a+b=\frac{65}{4}$$

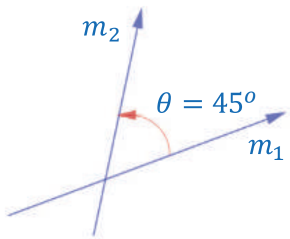
**Respuesta**

El resultado es $\frac{65}{4}$.

**316.** Determinar la pendiente de una recta que forma un ángulo de 45° con la recta que pasa por los puntos de coordenadas (2, -1) y (5, 3).

**Resolución**

**Gráfica:**




**Angulo entre dos rectas**

$$\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_2\cdot m_1}$$

Donde:
$m_1$ y $m_2$ son pendientes de la recta.

La pendiente de la recta que pasa por (2, -1) y (5, 3) es

$$m_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3+1}{5-2}=\frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad m_1=\frac{4}{3}$$

Aplicando, la fórmula del ángulo entre dos rectas, de la gráfica:

$$\tan 45^o=\frac{m_2-m_1}{1+m_2\cdot m_1} \Longrightarrow 1=\frac{m_2-\frac{4}{3}}{1+m_2\cdot\frac{4}{3}} \Longrightarrow 1=\frac{3m_2-4}{3+m_2\cdot 4}$$

$$\Longrightarrow 3+4m_2=3m_2-4$$

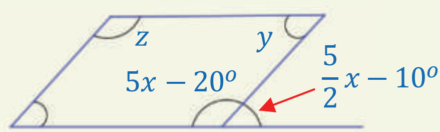
$$\Longrightarrow m_2=-7$$

**Respuesta**

La pendiente de la recta pedida es -7.

## Perímetros y áreas (cuadriláteros, polígonos y círculos)

**317.** El maestro de matemática da tarea a Rosa, que debe calcular el valor de $x$, $\angle y$ y $\angle z$ en la siguiente figura geométrica:



## Resolución

En la figura dada, aplicando la suma de ángulos suplementarios, se tiene.

$$(5x - 20^o) + \left(\frac{5}{2}x - 10^o\right) = 180^o \;\Rightarrow\; 5x - 20 + \frac{5}{2}x - 10 = 180$$

$$\Rightarrow\; 5x + \frac{5}{2}x = 180 + 30$$

$$\Rightarrow\; \frac{15}{2}x = 210$$

$$\Rightarrow\; x = 28$$

Como $x = 28$ entonces

$$\frac{5}{2}x - 10^o = \frac{5}{2} \cdot 28^o - 10^o = 60^o \qquad (1)$$

Como las bases del paralelogramo son paralelas, entonces por la propiedad de ángulos alternos e internos, se tiene:

$$\angle y = \frac{5}{2}x - 10^o \;\overset{(1)}{\Longrightarrow}\; \angle y = 60^o \qquad (2)$$

Aplicando la propiedad de los ángulos adyacentes en el paralelogramo, se obtiene:

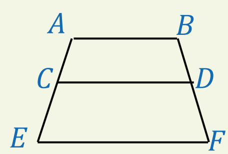
$$\angle z + \angle y = 180^o \;\overset{(2)}{\Longrightarrow}\; \angle z + 60^o = 180^o$$

$$\angle z = 120^o$$

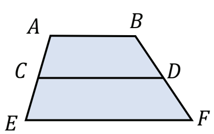
**Respuesta**

Los valores obtenidos son 28, 60° y 120°.

**318.** En la figura dada, a continuación, $C$ y $D$ son puntos medios de $AE$ y $BF$. Calcular el valor de $AB$, si $AB = x + 2$, $CD = x + 3$ y $EF = 15$ cm.




**Paralela media de un trapecio**




$$CD = \frac{1}{2}(AB + EF)$$

## Resolución

### Datos

$AB = x + 2$, $CD = x + 3$ y $EF = 15$ cm

Aplicando, la propiedad de paralela media de un trapecio se tiene:

$$CD = \frac{1}{2}(AB + EF)$$

Reemplazando datos:

$$x + 3 = \frac{1}{2}(x + 2 + 15)$$

Resolviendo para $x$, multiplicando por 2 en la ecuación, se obtiene

$$2x + 6 = x + 2 + 15 \implies x = 17 - 6 = 11$$
$$\implies x = 11 \qquad (1)$$

Luego

$$AB = x + 2 \overset{(1)}{\implies} AB = 11 + 2 = 13$$
$$AB = 13\,\text{cm}$$

**Respuesta**

El valor obtenido es 13 cm.

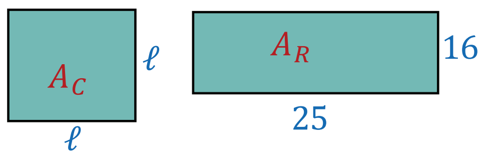
**319.** Un cuadrado y un rectángulo tiene áreas iguales. Si el rectángulo mide 25 cm por 16 cm, ¿Cuál es la longitud de un lado del cuadrado?

### Resolución

### Datos

25 cm: largo del rectángulo
16 cm: ancho del rectángulo
$A_C$: área del cuadrado
$A_R$: área del rectángulo
$\ell$: lado del cuadrado

**Gráfica:**




Por la condición del problema se tiene:

$$A_C = A_R \implies A_C = 25 \cdot 16 = 400 = 20^2$$
$$\implies A_C = \ell^2 = 20^2 \quad \text{Tomando la raíz positiva}$$
$$\implies \ell = 20\,\text{cm}$$

**Respuesta**

El lado del cuadrado es 20 cm.

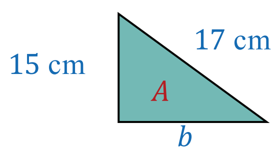
**320.** La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 17 cm y la de uno de los catetos es 15 cm. Calcular el área del triángulo.

### Resolución

### Datos

$c$=17 cm: hipotenusa
$h$=15 cm: cateto
$A$: área del cuadrado

**Gráfica:**




Aplicando Teorema de Pitágoras $c^2 = b^2 + h^2$

Reemplazando datos, se tiene:

$$17^2 = b^2 + 15^2 \Rightarrow b^2 = 17^2 - 15^2 = 64\ \text{cm} \quad \text{Tomando la raíz positiva}$$

$$\Rightarrow \quad b = \sqrt{64} = 8$$

Luego, el área de triangulo es

$$A = b \cdot h \quad \Rightarrow \quad A = 8 \cdot 15 = 120$$

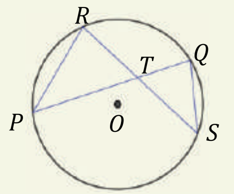
$$\Rightarrow \quad A = 120 \text{ cm}^2$$

**Respuesta**

El área del triángulo es 120 cm$^2$.

**321.** Dada la figura a continuación:

$a$) Calcular $PT$ si $TQ = 5$, $RT = 9$ y $TS = 6$.
$b$) Calcular $TS$ si $PT = 11$, $RT = 7$ y $TQ = 5$.
$c$) Calcular $TR$ si $PQ = 22$, $TQ = 5$ y $TS = 9$.




**Resolución**

**a) Datos**

$TQ = 5$
$RT = 9$
$TS = 6$
$PT = ?$

Por la propiedad, si dos cuerdas se intersecan dentro de un círculo, entonces se cumple que:

$$RT \cdot TS = QT \cdot PT \qquad (1)$$

Reemplazando datos, se tiene:

$$RT \cdot TS = QT \cdot TP \overset{(1)}{\Rightarrow} 9 \cdot 6 = 5 \cdot PT$$

$$\Rightarrow PT = \frac{54}{5} = 10{,}8 \Rightarrow PT = 10{,}8$$

**b) Datos**

$PT = 11$
$RT = 7$
$TQ = 5$
$TS = ?$

De la parte $a$), basta despejar $TS$ de la ecuación $(1)$, es decir:

$$TS = \frac{QT \cdot PT}{RT} = \frac{5 \cdot 11}{7} = \frac{55}{7} = 7{,}8 \quad \Rightarrow \quad TS = 7{,}8$$

**c) Datos**

$PQ = 11$
$TQ = 7$
$TS = 5$
$TR = ?$

Cálculo del segmento $PQ$, de la figura, se tiene:

$$PQ = PT + TQ \quad \Rightarrow \quad PT = PQ - TQ = 22 - 5$$

$$\Rightarrow \quad PT = 17$$

De la ecuación $(1)$, se obtiene:

$$TR = \frac{QT \cdot TP}{TS} = \frac{5 \cdot 17}{9} = \frac{85}{9} = 9{,}4 \quad \Rightarrow \quad TR = 9{,}4$$

**Respuesta**

Lo resultados son 10,8; 7,8 y 9,4.

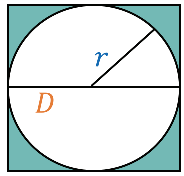
**322.** Karen propone encontrar el área de un cuadrado si el radio del círculo inscrito es de 5 cm.

**Resolución**

**Datos**

$r = 5$ cm: radio del círculo
$A$: área del cuadrado

**Gráfica:**




Como el radio del círculo es 5 cm, entonces el diámetro es:

$$D = 2r = 2 \cdot 5 = 10 \quad \Rightarrow \quad D = 10 \text{ cm}$$

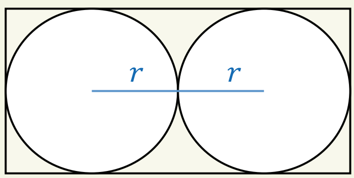
En la gráfica, el lado del cuadrado es $\ell = D = 10 \text{ cm}$, entonces el área del cuadrado es:

$$A = \ell \cdot \ell = \ell^2 \Rightarrow A = 10^2 = 100 \text{ m}^2$$
$$\Rightarrow A = 100 \text{ m}^2$$

**Respuesta**

El área del cuadrado es $100 \text{ cm}^2$.

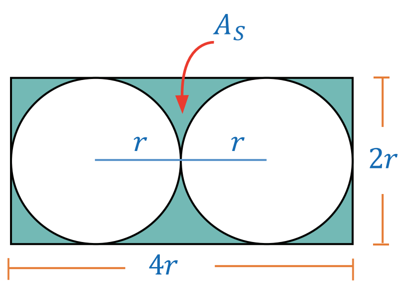
**323.** En la figura dada, se inscriben dos circunferencias de radio $r$ en un rectángulo, encontrar la fórmula del área sombreada.




Si $r = 3$, calcular el área sombreada.

**Resolución**

Considerando la figura:




Observe que, en la figura, las circunferencias son simétricas, entonces el área de ambas es:

$$A_\circ = 2\pi r^2$$

Por otro lado, de la figura, el área del rectángulo es:

$$A_{\blacksquare} = 4r \cdot 2r = 8r$$

El área de la región sombreada, será la diferencia entre área del circulo y del rectángulo, es decir:

$$A_S = A_{\blacksquare} - A_\circ \Rightarrow A_S = 8r - 2\pi r^2 = 2r^2(4 - \pi) \Rightarrow A_S = 2r^2(4 - \pi)$$

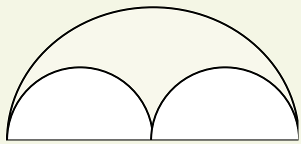
Si $r = 3$, entonces

$$A_S = 2 \cdot 3^2\,(4 - \pi) = 18(4 - \pi) \Rightarrow A_S = 18(4 - \pi)\, u^2$$

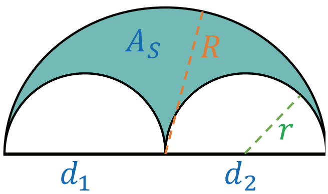
**Respuesta**

El área de la región sombreada es $18(4 - \pi)$ $u^2$.

**324.** En la figura dada, el diámetro de cada semicircunferencia pequeña es igual al radio de la semicircunferencia grande. Si el radio de la semicircunferencia grande es 4, ¿cuál es el área de la región sombreada?



Considerando la figura:




## Resolución

### Datos

$R = 4$: radio de la semicircunferencia grande

$d_1 = d_2 = R = 4$: diámetro de cada semicircunferencia pequeña

$A_S$: área de la región sombreada

Como el diámetro de la semicircunferencia pequeña es $d_2 = 4$, entonces el radio es $r = 2$. Luego, calculando las áreas de semicircunferencias.

Área de la semicircunferencia grande:

$$A_G = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4^2\pi}{2} = 8\pi \implies A_G = 8\pi$$

Las semicircunferencias pequeñas es nada más que forman una circunferencia, entonces su área es:

$$A_P = \pi r^2 = 2^2\pi = 4\pi \implies A_P = 4\pi$$

$$A_S = A_G - A_P \implies A_S = 8\pi - 4\pi = 4\pi$$

$$\implies A_S = 4\pi$$

**Respuesta**

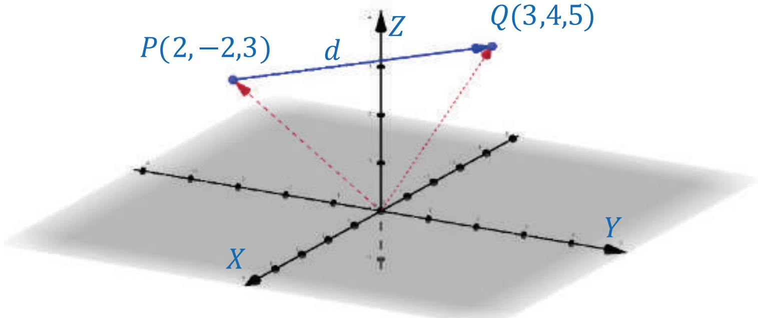
El área de la región sombreada es $4\pi$ $u^2$.

## Geometría del espacio

**325.** Pablo representa los puntos $P$(2,-2,5) y $Q$(3,5,7) en el espacio tridimensional. Calcular la distancia entre dichos puntos.

### Resolución

Representando los puntos en el espacio $\mathbb{R}^3$:




La distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es dado por

$$d(P_1, P_2) = P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Luego, la distancia entre los puntos $P(2,-2{,}5)$ y $Q(3{,}5{,}7)$ es

$$d(P,Q) = PQ = \sqrt{(3-2)^2 + (5+2)^2 + (7-5)^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 49 + 4} = \sqrt{54} \approx 7{,}35$$

$$\Longrightarrow d = 7{,}35 \text{ u}$$

**Respuesta**

La distancia entre dos puntos es 7,35 unidades.

**326.** Dado los puntos (-4, -2, -6) y (2, 1, 3) en el espacio tridimensional. ¿Son paralelos los vectores $A$(-4, -2, -6) y $B$(2, 1, 3)?

### Resolución

Aplicando la propiedad de vectores paralelos:

$$\vec{A} = (-4,-2,-6) = \underbrace{-2}_{k}\,\underbrace{(2{,}1{,}3)}_{\vec{B}}$$

$$\Longrightarrow \vec{A} = k\vec{B}$$

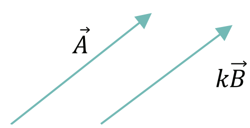
Los vectores son paralelos

**Respuesta**

Los vectores dados son paralelos.

Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos en el espacio, es decir:

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \iff \exists\, k \in \mathbb{R} : \vec{A} = k\vec{B}$$



Intermedio 02

**327.** Zulma construye un octaedro de altura 3 cm y su área total es $4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, calcule su volumen.

**Datos**

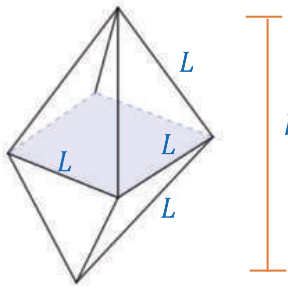
$h = 3\ \text{cm}$
$A_T = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$
$V_T = ?$

Área total del octaedro es:

$$A_T = 2\sqrt{3}\,L^2$$

**Resolución**

De acuerdo del enunciado, se traza la figura de octaedro:




Por el dato y la fórmula de área total de octaedro, se tiene:

$$2\sqrt{3}\,L^2 = 4\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad L^2 = 2$$

Luego, el volumen del octaedro es:

$$V_T = \frac{1}{3}L^2 h \quad \Rightarrow \quad V_T = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3 = 2 \quad \Rightarrow \quad V_T = 2\ \text{cm}^3$$

**Respuesta**

El volumen del octaedro es $2\ \text{cm}^3$.

**328.** Eva construye una prisma cuadrangular, si el área de la base es $16\ \text{cm}^2$ y la altura es 8 cm. Calcular el área lateral, total y volumen.

**Datos**

$A_b = 16\ \text{cm}^2$
$h = 8\ \text{cm}$

Área de la base

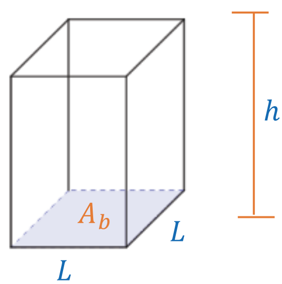
$A_b = L^2$

Área lateral

$A_L = 2(L + L)h$

**Resolución**

Se traza la figura de acuerdo al enunciado:




***i) Área lateral:*** calculando lado de la base, se obtiene de su área base, es decir:

$$A_b = L^2 = 16 \quad \Longrightarrow \quad L = 4\ \text{cm} \qquad (1)$$

Luego, área lateral es:

$$A_L = 2(L + L)h \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad A_L = 2\cdot 8\cdot 8 = 128$$
$$\Longrightarrow \quad A_L = 128\ \text{cm}^2$$

***ii)* Área total:**

$$A_T = A_L + 2A_b = 128 + 2 \cdot 16 = 160 \quad \Longrightarrow \quad A_T = 160\ \text{cm}^2$$

***iii)* Volumen:**

$$V_T = A_b \cdot h = 16 \cdot 8 = 128 \quad \Longrightarrow \quad V_T = 128\ \text{cm}^3$$

**Respuesta**

Los resultados son $128\ \text{cm}^2$, $160\ \text{cm}^2$ y $128\ \text{cm}^3$.

**329.** Dada un prisma hexagonal regular si el perímetro de la base es de 60 cm y la altura es el doble que el lado de la base. Calcular el área lateral y volumen.

**Datos**

$P_b = 60\ \text{cm}$

$h = 2L_b$

Área de la base

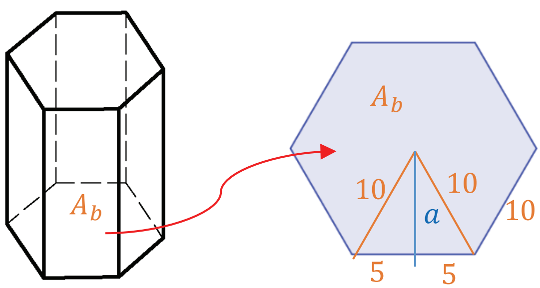
$A_b = \dfrac{1}{2}P_b \cdot a$

Volumen

$V_T = A_b h$

**Resolución**

Se traza la figura de acuerdo al enunciado:




***i)* Área lateral:** de la figura se obtiene $h = 2 \cdot 10 = 20\ \text{cm}$, el área lateral es:

$$A_L = 6L_b h = 6 \cdot 10 \cdot 20 = 1200 \quad \Longrightarrow \quad A_L = 1200\ \text{cm}^2$$

***ii)* Volumen:** calculando apotema $a$, de la figura, es decir:

$$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad a = 5\sqrt{3}$$

Área de la base es:

$$A_b = \frac{1}{2}P_b \cdot a \quad \Longrightarrow \quad A_b = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 5\sqrt{3} = 150\sqrt{3}$$

Luego

$$V_T = A_b \cdot h = 150\sqrt{3} \cdot 20 = 3000 \quad \Longrightarrow \quad V_T = 3000\ \text{cm}^3$$

**Respuesta**

Los resultados son $1200\ \text{cm}^2$ y $3000\ \text{cm}^3$.

**330.** Andrea sabe que el diámetro de la esfera es $6\sqrt{5}$ cm. Calcular el volumen de la esfera.

**Intermedio** 02

## Datos

$D = 6\sqrt{5}cm$

$r = \frac{D}{2} = \frac{6\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5}$

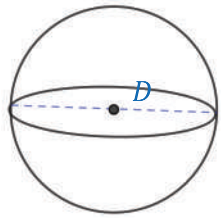
Volumen

$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3$

El volumen de la esfera es:

## Resolución

Se traza la figura de acuerdo al enunciado:




$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(3\sqrt{5}\right)^3 = \frac{4}{3}\cdot 3^3\cdot\sqrt{5^3}\pi = 4\cdot 9\cdot 5\sqrt{5}\pi = 180\sqrt{5}\pi$$

$$\Longrightarrow \quad V_T = 180\sqrt{5}\pi \text{ cm}^3$$

**Respuesta**

El volumen del cubo es $180\sqrt{5}\,\pi \text{ cm}^3$.

**331.** Dado un cilindro circular recto de radio 3 cm y altura 5 cm. Calcular el área lateral, total y volumen.

## Datos

$r = 3 \text{ cm}$
$h = 5 \text{ cm}$

Área lateral

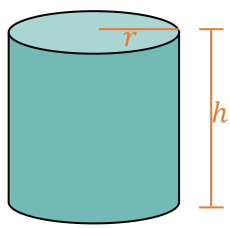
$A_L = 2\pi rh$

Área total

$A_T = 2\pi r(h + r)$

## Resolución

Se traza la figura de acuerdo al enunciado:




***i)* Área lateral:** reemplazando los datos en la formula, es decir:

$$A_L = 2\pi rh = 2\pi\cdot 3\cdot 5 = 30\pi \quad\Longrightarrow\quad A_L = 30\pi \text{ cm}^2$$

***ii)* Área total:**

$$A_T = 2\pi r(h + r) = 2\pi\cdot 3(3 + 5) = 2\pi\cdot 3\cdot 8 = 48\pi$$

$$\Longrightarrow A_T = 48\pi \text{ cm}^2$$

***iii)* Volumen:**

$$V_T = \pi r^2 h = \pi\cdot 3^2\cdot 5 = 45\pi \quad\Longrightarrow\quad V_T = 45\pi \text{ cm}^3$$

**Respuesta**

Los resultados son $30\pi \text{ cm}^2$, $48\pi \text{ cm}^2$ y $45\pi \text{ cm}^3$.

**332.** Dada una pirámide cuadrangular de lado 6 cm, si sus caras laterales son triángulos isósceles cuyos lados iguales miden 8 cm. Calcular su volumen.

**Datos**

$\ell = 6$ cm

$L = 8$ cm

Área lateral

$$A_L = \frac{1}{2}aP$$

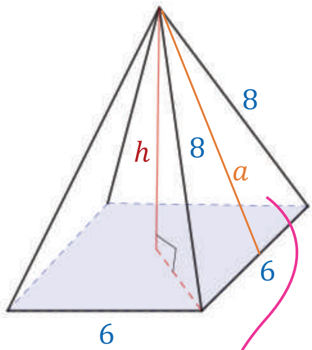
Donde:

$a$: apotema

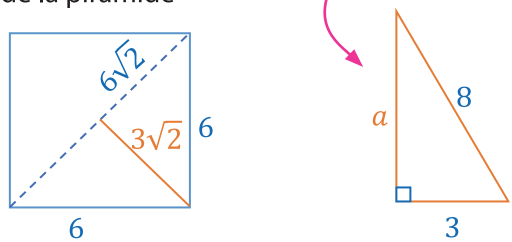
$P$: perímetro

**Resolución**

Se traza la figura de acuerdo al enunciado:




Base de la pirámide




Cálculo de apotema, de la figura, aplicando Teorema de Pitágoras se tiene:

$$8^2 = a^2 + 3^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{64 - 9} = \sqrt{55}$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{55}$$

Cálculo de la altura: aplicando Teorema de Pitágoras, de la figura se tiene:

$$L^2 = h^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{L^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8^2 - 3^2 \cdot 2} = \sqrt{46}$$

$$\Rightarrow \quad h = \sqrt{46}$$

Volumen:

$$V_T = \frac{1}{3}A_b h = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot \sqrt{46} = 12\sqrt{46} \quad \Rightarrow \quad V_T = 12\sqrt{46}\ \text{cm}^3$$

**Respuesta**

El volumen de la pirámide es $12\sqrt{46}\ \text{cm}^3$.

Intermedio 02

## La línea recta y circunferencia

**333.** Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(6,-2)$ y tiene un angulo de inclinación de $135^o$.

**Datos**

$A(6,-2)$

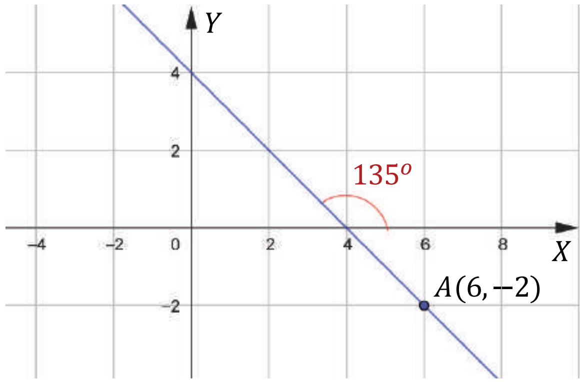
$\downarrow$

$x_0=6, y_0=-2$

$\theta=135^o$

**Resolución**

Gráfica:




Cálculo de la pendiente, como $\theta=135^o$ lo cual es la pendiente de la recta, es decir:

$$m=\tan(135^o) \quad \Rightarrow \quad m=-1$$

Por la ecuación punto-pendiente:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

Reemplazando datos

$$y-(-2)=(-1)(x-6) \quad \Rightarrow \quad y+2=-x+6$$

$$\Rightarrow \quad x+y-4=0$$

**Respuesta**

La ecuación de la recta es $x+y-4=0$.

**334.** Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(2,7)$ y es perpendicular a la recta con ecuación $x-4y+7=0$.

**Datos**

$P(2,7)$

$\downarrow$

$x_0=2, y_0=7$

Pendientes:

$m$ y $m_1$

**Resolución**

Por la forma general de la ecuación de la recta,

$$\mathcal{L}: Ax+By+C=0 \Rightarrow y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \longrightarrow m=-\frac{A}{B}$$

y sea

$$\mathcal{L}_1: x-4y+7=0 \Rightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4} \longrightarrow m_1=\frac{1}{4}$$

Por la condición de perpendicularidad de rectas, se tiene

$$\mathcal{L}\perp\mathcal{L}_1 \quad\Leftrightarrow\quad m\cdot m_1=-1 \quad\Longrightarrow\quad \left(-\frac{A}{B}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=-1$$

$$\Longrightarrow\quad A=4B \qquad\qquad (1)$$

Si $P(2,7)\in\mathcal{L}$, entonces

$$A\cdot 2+B\cdot 7+C=0 \;\Longrightarrow\; C=-2A-7B \;\overset{(1)}{\Longrightarrow}\; C=-15B \qquad (2)$$

Luego (1) y (2), sustituyendo en la eciacion general de la recta $\mathcal{L}$, es decir:

$$4Bx+By-15B=0 \quad \text{dividiendo por } B\neq 0$$

$$4x+y-15=0$$

**Respuesta**

La ecuación de la recta es $4x+y-15=0$.

**335.** Hallar la medida del ángulo obtuso formado por las rectas:

$$x+3y-6=0 \text{ y } 2y-3=0$$

## Resolución

Pendientes de las rectas dadas:

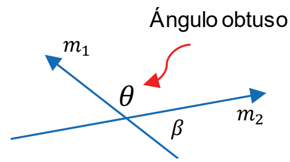
$$\mathcal{L}_1\colon x+3y-6=0 \;\Rightarrow\; y=-\tfrac{1}{3}x+2$$

$$\longrightarrow\; m_1=-\frac{1}{3}$$

$$\mathcal{L}_2\colon 2y-3=0 \Rightarrow\; y=0\cdot x+\tfrac{2}{3}$$

$$\longrightarrow\; m_2=0$$

**Ángulo entre dos rectas**




Aplicando, la fórmula del ángulo entre dos rectas:

$$\tan\beta=\frac{m_2-m_1}{1+m_2\cdot m_1} \;\Longrightarrow\; \tan\beta=\frac{0-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow\; \beta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=18{,}43 \;\Longrightarrow\; \beta=18{,}43^o$$

Donde $\beta$ es ángulo agudo, por ángulos suplementarios se obtiene el ángulo obtuso, es decir:

$$\theta+\beta=180^o \quad\Longrightarrow\quad \theta=180^o-\beta \quad =180^o-18{,}43^o=161{,}57^o$$

$$\Longrightarrow\quad \theta=161{,}57^o$$

**Respuesta**

El ángulo es 161,57°.

**336.** La ecuación de la recta pasa por los puntos $P(-3,2)$ y $Q(1,6)$, halle su ecuación de mediatriz entre dichos puntos.

## Resolución

Determinamos la pendiente de la recta, de puntos:

$$P(-3,2) \quad \rightarrow \quad x_1 = -3, y_1 = 2$$

$$Q(1,6) \quad \rightarrow \quad x_2 = 1, y_2 = 6$$

Aplicando, la pendiente entre dos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{6-2}{1+3} = \frac{4}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad m = 1$$

Luego, el punto medio M entre $P(-3,2)$ y $Q(1,6)$ es:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = M\left(\frac{(-3)+1}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$$

$$= M\left(\frac{-2}{2}, \frac{8}{2}\right) = M(-1,4)$$

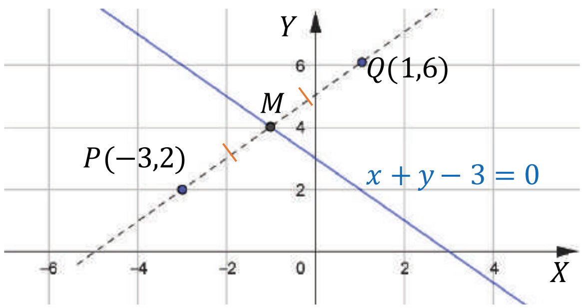
Aplicando la definición de la mediatriz, lo cual es perpendicular a la recta dada y su pendiente será $m_1 = -1$ . luego tenemos $M(-1,4)$ y $m_1 = -1$, por la ecuación punto-pendiente, se tiene:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = (-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow \quad y - 4 = -x - 1$$

$$\Rightarrow \quad x + y - 3 = 0$$

## Gráfica:




**Respuesta**

La ecuación de la recta es $x + y - 3 = 0$

**337.** Determinar el valor de $k$ para que la recta $kx + (k - 1)y - 9 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y + 5 = 0$.

## Resolución

Determinamos la pendiente de las rectas dadas:

$$\mathcal{L}_1: kx + (k-1)y - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-1)y = -kx + 9$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{k}{(k-1)}x + \frac{9}{(k-1)} \quad \longrightarrow \quad m_1 = -\frac{k}{(k-1)}$$

$$\mathcal{L}_2: \quad 4x + 3y + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \quad \longrightarrow \quad m_2 = -\frac{4}{3}$$

Como las rectas son paralelas:

$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{k}{(k-1)} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3k = 4k - 4$$

$$\Rightarrow \quad -k = -4 \quad \Rightarrow \quad k = 4$$

**Respuesta**

El valor de $k$ es $4$.

**338.** Dada la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$$

Hallar el centro y radio.

## Resolución

La ecuación dada está en forma general, se completa al cuadrado para $x$ e $y$, se tiene:

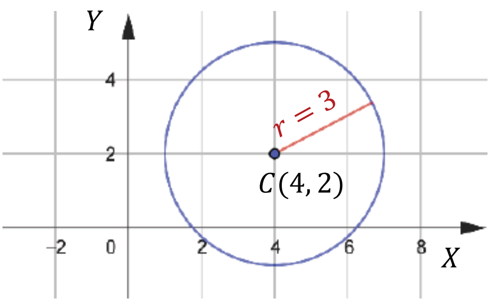
$$\underbrace{x^2 - 8x + 4^2}_{T.C.P} - 4^2 + \underbrace{y^2 - 4y + 2^2}_{T.C.P} - 2^2 + 11 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-4)^2 + (y-2)^2 - 16 - 4 + 11 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-4)^2 + (y-2)^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-4)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

Comparando con la ecuación ordinaria, de donde se obtiene:




$$h = 4; \; k = 2; r = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Centro: } C(4,2) \\ \text{Radio: } r = 3 \end{cases}$$

**Respuesta**

El centro y radio de la circunferencia son $(4, 2)$ y $3$.

Intermedio 02

**339.** Determinar la ecuación que representa a la circunferencia que pasa por las coordenadas $A(1{,}3)$, $B(4{,}2)$ y $C(3{,}\text{-}1)$.

## Resolución

Se aplica la forma general de la circunferencia:

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Reemplazando los puntos se determinan las constantes $D$, $E$ y $F$.

$$(1{,}3) \in \mathcal{C}: \quad 1^2 + 3^2 + D \cdot 1 + E \cdot 3 + F = 0$$

$$\Longrightarrow D + 3E + F = -10 \qquad (1)$$

$$(4{,}2) \in \mathcal{C}: \quad 4^2 + 2^2 + D \cdot 4 + E \cdot 2 + F = 0$$

$$\Longrightarrow 4D + 2E + F = -20 \qquad (2)$$

$$(3,-1) \in \mathcal{C}: \quad 3^2 + (-1)^2 + D \cdot 3 + E \cdot (-1) + F = 0$$

$$\Longrightarrow 3D - E + F = -10 \qquad (3)$$

Restando (1) y (2), (2) y (3):

$$-\begin{array}{r} D + 3E + F = -10 \\ 4D + 2E + F = -20 \\ \hline -3D + E = 10 \end{array} \quad (4) \qquad -\begin{array}{r} 4D + 2E + F = -20 \\ 3D - E + F = -10 \\ \hline D + 3E = -10 \end{array} \quad (5)$$

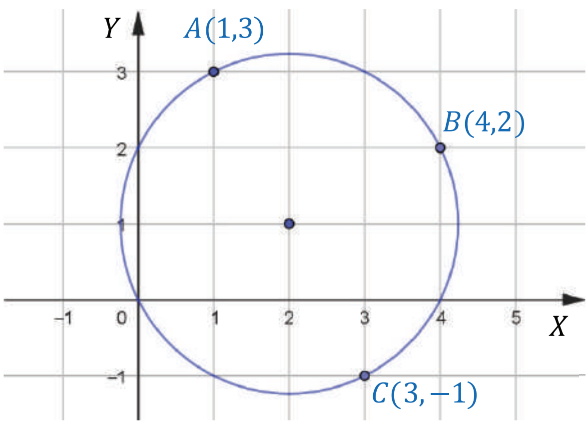
Resolviendo (4) y (5), se obtiene: $D = -4 \quad \wedge \quad E = -2 \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad F = 0$

Con los valores obtenidos, reemplazando en la ecuación general:

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 + (-4)x + (-2)y + 0 = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

## Gráfica:




**Respuesta**

La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

**340.** Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(2,0)$ y es tangente a la recta $x + 2y - 7 = 0$.

**Resolución**

La distancia del centro a la recta es el radio de la circunferencia.

$$C(2,0) \text{ y } x + 2y - 7 = 0$$

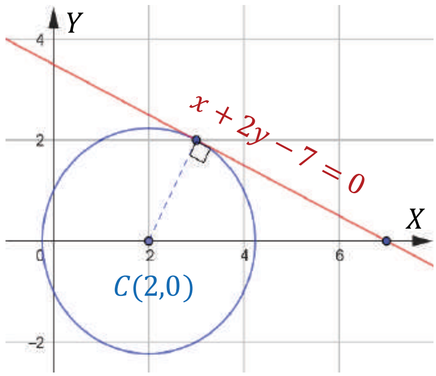
Donde:

$x_0 = 2,\ y_0 = 0;\ A = 1,\ B = 2,\ C = -7$

El radio $r = d$, se calcula por la distancia de un punto a una recta:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**Gráfica:**




Luego:

$$r = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2-7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{5}$$

Con $C(2,0)$ y $r = \sqrt{5}$:

$$(x-h)^2 + (y-h)^2 = r^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 5$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$$

**Respuesta**

La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$.

**341.** Encuentra la ecuación de la circunferencia que toca la recta $2x + y + 1 = 0$ en el punto $T(-1,1)$ y también pasa por el punto $P(3,1)$.

**Resolución**

De la recta tangente

$$2x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x - 1$$

$$\longrightarrow \quad m_{\mathcal{L}} = -2$$

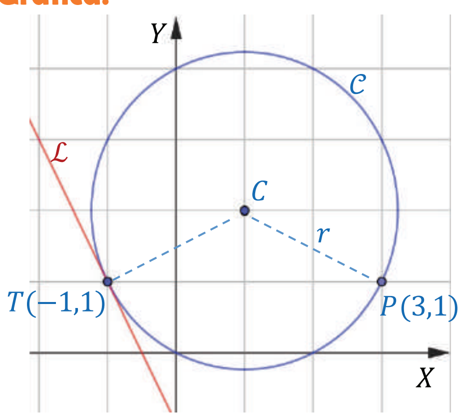
Sea $C(h,k)$ centro de la circunferencia cuya pendiente entre $T(-1,1)$ y $C(h,k)$ es:

$$m_{TC} = \frac{k-1}{h+1}$$

De la gráfica, se tiene:

$$TC \perp \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad m_{TC} \cdot m_{\mathcal{L}} = -1$$

**Gráfica:**



$$\Rightarrow \left(\frac{k-1}{h+1}\right)\cdot(-2) = -1 \;\Rightarrow\; h - 2k + 3 = 0 \qquad (1)$$

Como $T(-1, 1)$ y $P(3, 1) \in \mathcal{C}$ , entonces la distancia de centro $C(h,k)$ a dichos puntos, se tiene:

$$r = PC = TC \;\Rightarrow\; \sqrt{(h-3)^2+(k-1)^2} = \sqrt{(h+1)^2+(k-1)^2}$$
$$\Rightarrow h^2+k^2-6h-2k+10 = h^2+k^2+2h-2k+2$$
$$\Rightarrow h = 1 \qquad (2)$$

Luego, (2) en (1), se obtiene:

$$1 - 2k + 3 = 0 \;\Rightarrow\; k = 2$$
$$\Rightarrow C(1,2) \text{ es el centro de } \mathcal{C}$$

El radio es la distancia entre los puntos $C(1, 2)$ y $P(3, 1)$, es decir:

$$r = \sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5} \;\Rightarrow\; r = \sqrt{5}$$

Reemplazando en la ecuación ordinaria

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2 \;\Rightarrow\; (x-1)^2+(y-2)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4 = 5$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-2x-4y = 0$$

**Respuesta**

La ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2-2x-4y=0$.

## La parábola, elipse e hipérbola

**342.** Calcular la longitud de la cuerda determinada por la parábola $x - y^2 = 0$ y la recta de ecuación $x - y - 2 = 0$.

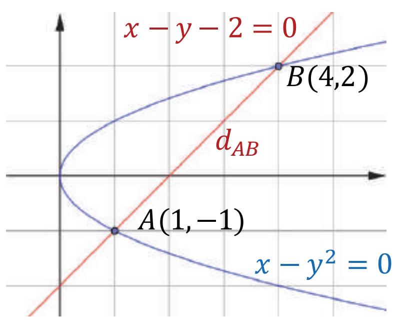
### Resolución

Cálculo de los puntos de intersección entre la parábola y la recta:

$$\begin{cases} x - y^2 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 & (1) \\ x = y + 2 & (2) \end{cases}$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2):

$$y^2 = y + 2 \;\Rightarrow\; y^2 - y - 2 = 0 \;\Rightarrow\; (y+1)(y-2) = 0$$
$$\Rightarrow y = -1, \qquad y = 2$$




Si $y = -1 \xrightarrow{(2)} x = -1 + 2 = 1$

$\rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1,-1)$

Si $y = 2 \xrightarrow{(2)} x = 2 + 2 = 4$

$\rightarrow x = 4 \Rightarrow B(4,2)$

Ahora, se determina la distancia entre los puntos $A(1,-1)$ y $B(4,2)$ :

$$d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(2+1)^2}$$
$$=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$$
$$\Rightarrow d_{AB}=\sqrt{18}$$

**Respuesta**
La longitud de la cuerda es $\sqrt{18}$ unidades.

**343.** Hallar las coordenadas del vértice, foco, ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y la ecuación del eje, de parábola con ecuación $y^2+8x-2y-15=0$.

## Resolución

Completando cuadrados para la variable $y$, se tiene:

$$\underbrace{y^2-2y+1^2}_{T.C.P}-1^2+8x-15=0 \Rightarrow (y-1)^2+8x-16=0$$
$$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x-2)$$

Donde: $h=2, k=1$ y $4p=-8 \longrightarrow p=-2$

Como $p=-2<0$ entonces la parábola se abre hacia la izquierda, luego se determinan sus elementos:

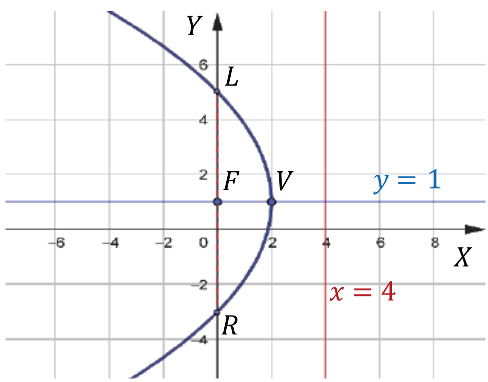
**Vértice:** $V(h,k) \longrightarrow V(2,1)$ **Foco:** $F(h+p,k) \longrightarrow F(2-2,1)=F(0,1)$

**Directriz:** $x=h-p \longrightarrow x=2-(-2)=4 \Rightarrow x=4$

**Lado recto:** $LR=|4p|=|4(-2)|=|-8|=8 \longrightarrow LR=8$

**Eje:** $y=k \longrightarrow y=1$

**Gráfica:**




**Respuesta**
Los elementos son: $V(2,1)$, $F(0,1)$, $x=4$, $LR=8$, $y=1$.

**344.** Encuentra la ecuación de la parábola que tiene su eje paralelo al eje "$X$" y que pasa por los puntos $A(0, 0)$, $B(8, -4)$ y $C(3, 1)$.

## Resolución

Se aplica la fórmula general de la hipérbola:

$$\mathcal{P}: \qquad y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Reemplazando los puntos se determinan las constantes $D$,$E$ y $F$.

$$(0{,}0) \in \mathcal{P}: \quad 0^2 + D\cdot 0 + E \cdot 0 + F = 0 \implies F = 0 \qquad (1)$$

$$(8,-4) \in \mathcal{P}: \ (-4)^2 + D\cdot 8 + E\cdot(-4) + F = 0$$

$$\overset{(1)}{\implies} 8D - 4E + 0 = -16$$

$$\implies 2D - E = -4 \qquad (2)$$

$$(3,1) \in \mathcal{P}: \ 1^2 + D\cdot 3 + E\cdot 1 + F = 0$$

$$\overset{(1)}{\implies} 3D + E = -1 \qquad (3)$$

Sumando (2) y (3), se tiene $D = -1$, luego en (3):

$$3\cdot(-1) + E = -1 \implies E = 2 \qquad (4)$$

Luego (4) y (2), se obtiene:

$$2D - 2 = -4 \Rightarrow 2D = -2 \implies D = -1$$

Se tiene $D = -1, E = 2$ y $F = 0$, luego:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \implies y^2 + (-1)x + 2y + 0 = 0$$

$$\implies y^2 - x + 2y = 0$$

**Respuesta**

La ecuación de la parábola es $y^2 - x + 2y = 0$.

**345.** Hallar la ecuación de la elipse de centro $(3, 1)$, uno de sus vértices en $(3, -1)$ y excentricidad $e = \frac{1}{3}$.

## Datos

$C(3, 1)$: centro
$V(3, -1)$: vértice

$$e = \frac{1}{3} = \frac{c}{a}$$

$$\downarrow$$

$$c = 1, a = 3$$

## Resolución

Por la relación de la elipse, se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 \implies b^2 = a^2 - c^2$$

Sustituyendo datos:

$$b^2 = 3^2 - 1^2 \implies b^2 = 9 - 1 = 8 \implies b^2 = 8$$

Además $a^2 = 9$, luego: $\dfrac{(x-k)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Luego, reemplazando datos: $\dfrac{(x-3)^2}{8} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

**Respuesta**
La ecuación de la elipse es $\dfrac{(x-3)^2}{8}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

**346.** Encuentra la ecuación general de la elipse, cuyos focos son $F_1$ (-9,-2), $F_2$ (-3,-2) y excentricidad $e=\frac{3}{5}$.

**Datos**

$F_1(-9,-2)$, $F_2(-3,-2)$

$e=\frac{3}{5}$: excentricidad

$$e=\frac{3}{5}=\frac{c}{a}$$

$$\downarrow$$

$$c=3, a=5$$

**Resolución**

Por la relación de la elipse, se tiene:

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2$$

Sustituyendo datos:

$$b^2=5^2-3^2 \Rightarrow b^2=25-9=16$$

$$\Rightarrow b^2=16$$

Además $a^2 = 25$, luego:

$$C(h,k)=\left(\frac{-9-3}{2},\frac{-2-2}{2}\right)=(-6,-2) \Rightarrow C(-6,-2)$$

Ahora:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{(x+6)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

Lo cual es ecuación ordinaria de la elipse.
Desarrollando se obtiene la ecuación general:

$$\frac{(x+6)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

$$\Rightarrow 16(x^2+12x+36)+25(y^2+4y+4)=400$$

$$\Rightarrow 16x^2+192x+576+25y^2+100y+100=400$$

$$\Rightarrow 16x^2+25y^2+192x+100y+276=0$$

**Respuesta**

$$16x^2+25y^2+192x+100y+276=0$$

**347.** Los focos de una elipse son $F_1$ (4,-2) y $F_2$ (-2,-2). Hallar la ecuación de la elipse si uno de sus vértices está sobre la recta de ecuación $x$ - $y$ - 8 = 0.

**Intermedio 02**

## Resolución

De acuerdo al problema, la ecuación de la elipse de centro $C(h,k)$ es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

El centro es punto medio entre los focos $F_1(4,-2)$ y $F_2(-2,-2)$, es decir:

$$C(h,k)=\left(\frac{4-2}{2},\frac{-2-2}{2}\right)=(1,-2) \Rightarrow C(1,-2) \qquad (2)$$

Como el vértice esta sobre la recta:

$$V(h+a,k)\in\mathcal{L}:\ x-y-8=0 \Rightarrow h+a-k-8=0$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} 1+a-(-2)-8=0$$

$$\Rightarrow a=5$$

Además, del foco,

$$F_1(4,-2)=F_1(h+c,k) \longrightarrow h+c=4, \qquad k=-2$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} 1+c=4 \Rightarrow c=3$$

Por la relación de la elipse, se tiene:

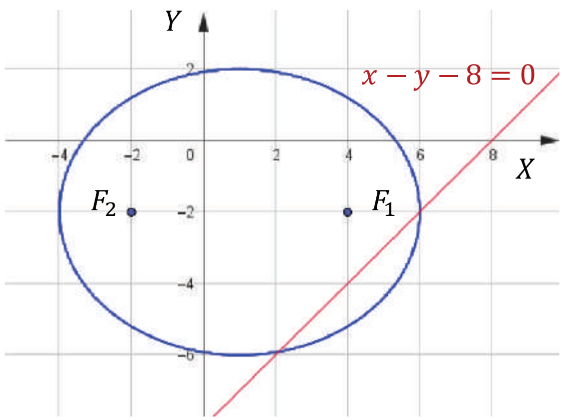
$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2$$

$$\Rightarrow b^2=5^2-3^2 \Rightarrow b^2=25-9=16 \Rightarrow b^2=16$$

Luego, en (1), se tiene:

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-(-2))^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

## Gráfica:




**Respuesta**

La ecuación de la elipse es : $\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$

**348.** Hallar el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a las rectas $3x - 4y + 1 = 0$ y $3x + 4y - 7 = 0$ es 1.

## Resolución

Sea $P(x, y)$ un punto, por distancia de un punto a una recta:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

La distancia, del punto $P$ a la recta $3x - 4y + 1 = 0$ es:

$$d_1 = \frac{|3x - 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3x - 4y + 1}{\sqrt{25}} = \frac{3x - 4y + 1}{5}$$

Ahora, la distancia, del punto $P$ a la recta $3x + 4y - 7 = 0$:

$$d_2 = \frac{|3x + 4y - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3x + 4y - 7}{\sqrt{25}} = \frac{3x + 4y - 7}{5}$$

Luego, por la condición del problema, se tiene:

$$d_1 \cdot d_2 = 1 \implies \left(\frac{3x - 4y + 1}{5}\right) \cdot \left(\frac{3x + 4y - 7}{5}\right) = 1$$

$$\implies 9x^2 + 12xy - 21x - 12xy - 16y^2 + 28y + 3x + 4y - 7 = 25$$

$$\implies 9x^2 - 16y^2 - 18x + 32y - 32 = 0$$

**Respuesta**

El lugar geométrico es $9x^2 - 16y^2 - 18x + 32y - 32 = 0$

**349.** Hallar la ecuación de la hipérbola cuyo centro está en el origen y su eje transverso sobre el eje "$X$" con excentricidad $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$ y pasa por el punto $(2, 1)$.

## Datos

$C(0, 0)$: centro
$P(2, 1)$: punto
$e = \frac{\sqrt{6}}{2}$: excentricidad

## Resolución

La ecuación buscada tendrá la forma:

$$\mathcal{H}: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Como pasa por el punto $P(2, 1)$:

$$(2,1) \in \mathcal{H}: \quad \frac{2^2}{a^2} - \frac{1^2}{b^2} = 1 \implies \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Por la relación Pitagórica, se tiene: $c^2 = a^2 + b^2 \implies c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Por la excentricidad: $e = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \implies \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

Elevando al cuadrado, se tiene:

$$\frac{6}{4}=\frac{a^2+b^2}{a^2} \implies 6a^2=4a^2+4b^2 \implies a^2=2b^2 \qquad (3)$$

Luego, (3) en la ecuación (2):

$$\frac{4}{2b^2}-\frac{1}{b^2}=1 \implies \frac{4-2}{2b^2}=1 \implies b^2=1 \overset{(3)}{\implies} a^2=2$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{1}=1 \implies \frac{x^2}{2}-y^2=1$$

$$\implies x^2-2y^2-2=0$$

**Respuesta**

La ecuación de la hipérbola es $x^2-2y^2-2=0$.

**350.** Hallar la ecuación de la hipérbola de excentricidad $e=4$, cuyos focos coinciden con los focos de la elipse:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

**Datos**

$e=4$: excentricidad

$e=\frac{c}{a}=4 \rightarrow c=4a$

**Resolución**

La ecuación buscada tendrá la forma:

$$\mathcal{H}: \ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

De la elipse: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \rightarrow a^2=25, b^2=9$

Por la relación Pitagórica de la elipse:

$$c^2=a^2-b^2 \implies c=\sqrt{25-9}=4 \implies c=4$$

Focos son: $F(\pm c,0) \rightarrow F(\pm 4,0)$, entonces c=4 y por dato, se tiene:

$$c=4a \implies a=\frac{c}{2}=\frac{4}{4}=1 \implies a=1 \implies a^2=1$$

Por la relación Pitagórica de la hipérbola:

$$b^2=c^2-a^2 \implies b^2=4^2-1^2=16-1=15 \implies b^2=15$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene la ecuación de la hipérbola

$$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{15}=1 \implies 15x^2-y^2-15=0$$

**Respuesta**

La ecuación de la hipérbola es $15x^2-y^2-15=0$.

## Geometría plana

**351.** Dado el segmento $AC = 6$, siendo que el segmento $AB$ es proporcional al segmento $BC$ a razón de $\frac{1}{2}$, determinar la longitud del segmento $BC$.

**Resolución**

Representación gráfica del segmento:


Del enunciado, se tiene:

$$AC = 6 \qquad (1)$$

Además $AB$ es proporcional al segmento $BC$ a razón de 1 a 2, es decir:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{1}{2} \cdot BC \qquad (2)$$

Por otro lado, por la adición de segmentos y por (2) y (1):

$$\begin{aligned} AB + BC = AC \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot BC + BC = 6 \\ &\Rightarrow \quad BC + 2BC = 12 \\ &\Rightarrow \quad 3BC = 12 \\ &\Rightarrow \quad BC = 4 \end{aligned}$$

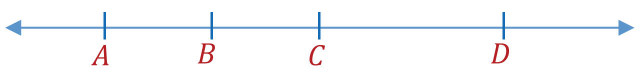
**Respuesta**

La longitud del segmento $BC$ es 4.

**352.** Sobre una recta se dan los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$, en ese orden. Determinar el segmento $AD$, sabiendo que $AB + AC = 10$, $AD = 4CD$ y $AC - AB = 2$.

**Resolución**

Representación de los puntos sobre la gráfica de la recta:




Como $AB + AC = 10$ y $AC - AB = 2$, sumando, es decir:

$$\begin{array}{r} AB + AC = 10 \\ + \quad AC - AB = 2 \\ \hline 2AC = 12 \end{array} \quad \Rightarrow \quad AC = 6$$

Donde se tiene: $\quad AD = 4CD \quad \wedge \quad AC = 6 \qquad (1)$

Además, de la gráfica; $\quad BC = AC - AB \qquad (2)$

Ahora de la gráfica, por la adición de segmentos:

$$AD = AB + BC + CD \overset{(2)}{\Longrightarrow} AD = AB + (AC - AB) + CD$$

$$= AC + CD \quad \text{Multiplicando por 4}$$

$$\Longrightarrow 4AD = 4AC + 4CD$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} 4AD = 4 \cdot 6 + AD$$

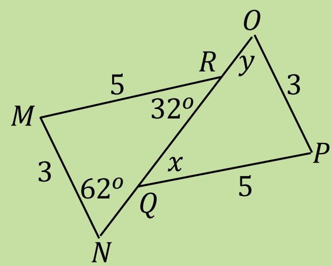
$$\Longrightarrow 3AD = 24$$

$$\Longrightarrow AD = 8$$

**Respuesta**

El resultado del segmento $AD$ es 8.

**353.** En la figura dada, verificar si son congruentes los triángulos. Si $NR=QO$, determinar los valores de $x$ e $y$.




**Datos**

$NR = QO$
$MN = 3 = OP$
$MR = 5 = QP$
$x = ?$
$y = ?$

**Resolución**

En el triángulo, como datos tenemos los lados:

$$MN = OP = 3 \quad \wedge \quad MR = OP = 5 \qquad (1)$$

son iguales, además $NR = QO$. Entonces por la propiedad lado, lado, lado, los triángulos $\Delta MNR$ y $\Delta QPO$ son congruentes, es decir:

$$\Delta MNR \cong \Delta QPO$$

Entonces $x = 32°$ e $y = 62°$

**Respuesta**

Los ángulos son 32°, 62°.

**354.** María y Andrés se ubican con respecto a un punto de referencia, el ángulo que forman en las direcciones es 125°. Determinar los ángulos $\theta$ y $\alpha$, si María tiene dirección $O\theta N$ y Andrés $E\alpha N$, además $\theta$ equivale a los cinco sextos de $\alpha$.

**Datos**

M: María
A: Andrés

**Oeste al norte:**

$$M \longrightarrow O\theta N$$

**Este al norte:**

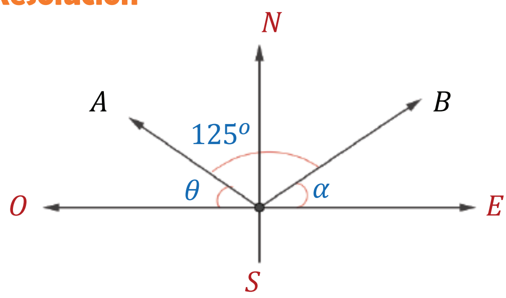
$$M \longrightarrow E\alpha N$$

$$\theta = \frac{5}{6}\alpha$$

**Incógnitas:**

$$\theta = ?$$
$$\alpha = ?$$

**Resolución**



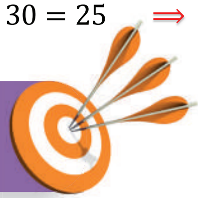

Por la propiedad de ángulos suplementarios:

$$\theta + 125^o + \alpha = 180^o$$

Reemplazando datos se obtiene:

$$\frac{5}{6}\alpha + 125^o + \alpha = 180^o \Rightarrow \frac{11\alpha}{6} = 55$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{6 \cdot 55}{11} = 30$$
$$\Rightarrow \alpha = 30^o$$

Si $\alpha = 30$, en la condición se tiene: $\theta = \frac{5}{6}\alpha = \frac{5}{6} \cdot 30 = 25 \Rightarrow \theta = 25^o$



**Respuesta**

Los ángulos son 30° y 25°.

**355.** Determinar el número de grados en el ángulo formado por las manecillas del reloj a la 10:10 horas.

**Resolución**

El horario recorre 30° cada hora, es decir:

$$\frac{360^o}{12} = 30^o$$

Tenemos 10:10 horas

Horario: 10 $\longrightarrow$ h = 10
Minutero: 10 $\longrightarrow$ min = 10

Por la fórmula práctica, consideremos que el horario está delante del minutero.

$$\alpha = 30\,h - \frac{11}{2}min$$
$$= 30 \cdot 10 - \frac{11}{2} \cdot 10 = 300 - 55 = 245 \Rightarrow \alpha = 245^o$$

**Caso 1:**
El horario (h) adelanta al minutero (min)


$$\boxed{\alpha = 30\,h - \frac{11}{2}min}$$

Luego, por ángulos conjugados:

$$\theta + \alpha = 360^o \Rightarrow \theta = 360^o - \alpha$$
$$= 360^o - 245^o = 115^o$$
$$\Rightarrow \theta = 115^o$$

**Respuesta**

El ángulo entre las manecillas del reloj es 115°.

**356.** El maestro pregunta. ¿A qué hora entre las 3 y las 4, las manecillas del reloj forman un ángulo de 130°?

**Caso 2:**
El minutero (min) adelanta al horario (h)


$$\boxed{\alpha = \frac{11}{2}min - 30\,h}$$

## Resolución

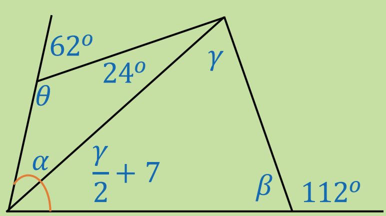
Las manecillas del reloj forman un ángulo de 130°. Es cuando el minutero pasa al horario, como la hora está entre las 3 y las 4, necesariamente $h = 3$ y la hora marcada por el reloj será: "3: $min$", entonces utilizando la fórmula práctica, se tiene:

$$\alpha = \frac{11}{2}min - 30\,h$$
$$\Rightarrow 130^o = \frac{11}{2}min - 30 \cdot 3$$
$$\Rightarrow 130 + 90 = \frac{11}{2}min$$
$$\Rightarrow min = \frac{2 \cdot 220}{11} = 40$$
$$\Rightarrow min = 40$$

**Respuesta**

La hora es 3:40 horas.

**357.** Encontrar los ángulos $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ y $\theta$ en la figura:



## Resolución

Aplicando propiedad de ángulos suplementarios, se tiene:

$$62^o + \theta = 180^o \quad \longrightarrow \quad \theta = 118^o \qquad (1)$$

$$\beta + 112^o = 180^\circ \quad \longrightarrow \quad \beta = 68^\circ \qquad (2)$$

Ahora, por la suma de ángulos internos del triángulo, se tiene:

$$\frac{\gamma}{2} + 7^\circ + \gamma + \beta = 180^\circ \quad \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad \frac{\gamma}{2} + \gamma + 68^\circ = 180^\circ - 7^\circ$$

$$\Longrightarrow \frac{3\gamma}{2} = 105^\circ$$

$$\Longrightarrow \gamma = 70^o \qquad (3)$$

Por otro lado

$$\theta + 24^o + \alpha - \left(\frac{\gamma}{2} + 7^o\right) + \gamma + \beta = 180^o$$

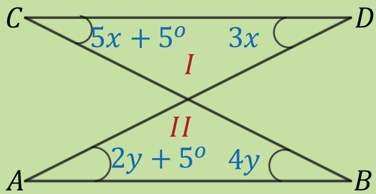
$$\Longrightarrow \; 118^o + 24^o + \alpha - \left(\frac{70}{2} + 7\right) = 180^o \qquad \text{Por (1) y (3)}$$

$$\Longrightarrow \; \alpha = 180 - 142 + 42 = 80 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 80^o$$

**Respuesta**

Los valores de ángulos son $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 68^\circ$, $\gamma = 70^\circ$ y $\theta = 118^\circ$

**358.** En la figura dada, los triángulos $I$ y $II$ son congruentes. Determinar el valor de las incógnitas $x$ e $y$.




## Resolución

Considerando la figura, en el cual los triángulos I y II son congruentes, se cumple:

$$5x + 5^o = 4y \qquad (1)$$

$$2y + 5^o = 3x \qquad (2)$$

Luego, de (2) se tiene:

$$x = \frac{2y+5}{3} \qquad (3)$$

En la ecuación (1) se tiene:

$$5 \cdot \left(\frac{2y+5}{3}\right) + 5 = 4y \quad \Longrightarrow \quad 10y + 25 + 15 = 12y$$

$$\Longrightarrow 2y = 40$$

$$\Longrightarrow y = 20^o$$

Luego en (3) se tiene:

$$x = \frac{2 \cdot 20 + 5}{3} = \frac{45}{3} = 15 \quad \Rightarrow \quad x = 15^o$$

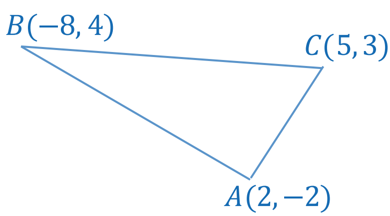
**Respuesta**

Los resultados son $x = 15°$ ; $y = 20°$.

## Plano cartesiano (espacio unidimensional)

**359.** Aplicando el concepto de pendiente, verificar que los puntos (2, -2), (-8, 4) y (5, 3) son los vértices de un triangulo rectángulo.

### Gráfica




### Resolución

Denotamos los vértices, $A$(2, -2), $B$(-8, 4) y C(5, 3)

Calculando las pendientes de los lados del triángulo, aplicando la fórmula:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

De la gráfica, las pendientes son:

$$m_{AB} = \frac{4+2}{-8-2} = \frac{6}{-10} = -\frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad m_{AB} = -\frac{3}{5}$$

$$m_{BC} = \frac{3-4}{5+8} = \frac{-1}{13} = -\frac{1}{13} \quad \Rightarrow \quad m_{BC} = -\frac{1}{13}$$

$$m_{AC} = \frac{3+2}{5-2} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad m_{AC} = \frac{5}{3}$$

Aplicando la propiedad: dos rectas son perpendiculares sí y solo sí el producto de sus pendientes es -1.

Luego

$$m_{AB} \cdot m_{AC} = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$$

Es decir, los lados $AB$ y $AC$ del triángulo forman un ángulo recto, así (2, -2), (-8, 4) y (5, 3) son los vértices de un triángulo rectángulo.

**Respuesta**

Los puntos (2, -2), (-8, 4) y (5, 3) son los vértices de un triángulo rectángulo.

**360.** Determinar el área del triángulo definido por los puntos $A(-2, -1)$, $B(2,1)$ y $C(-1, 3)$.

## Resolución

Identificando las coordenadas de los puntos, es decir:

$$A(-2,-1) \longrightarrow x_1 = -2, \quad y_1 = -1$$

$$B(2,1) \longrightarrow x_2 = 2, \quad y_2 = 1 \qquad C(-1,3) \longrightarrow x_3 = -1, \quad y_3 = 3$$

**Área de un triángulo**

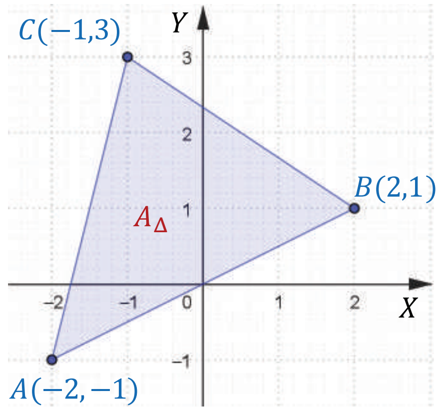
**Vértices:**

$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$

$P_3(x_3, y_3)$

Es dado por:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$




Aplicando la fórmula del área de un triángulo:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

Reemplazando las coordenadas se tiene:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|(-2+6+1)-(-2-1-6)|$$

$$= \frac{1}{2}|5-(-9)| = \frac{1}{2}|14| = \frac{14}{2} = 7$$

$$\Rightarrow \quad A_\Delta = 7\ \text{u}^2$$

**Respuesta**

El resultado es 7 unidades cuadradas.

**361.** Víctor y Sandra determinan el área del polígono definido por los puntos $A(-3, 1)$, $B(-2, 5)$, $C(2, 4)$ y $D(1, 0)$, del siguiente modo:

## Resolución

En primer lugar, se identifica las coordenadas de los puntos dados:

$$\begin{array}{lcl} A(-3,1) & \longrightarrow & x_1=-3,\ \ y_1=1 \\ B(-2,5) & \longrightarrow & x_2=-2,\ \ y_2=5 \\ C(2,4) & \longrightarrow & x_3=2,\ \ y_3=4 \\ D(1,0) & \longrightarrow & x_4=1,\ \ y_4=0 \end{array}$$

Aplicando la fórmula del polígono:

$$A_P=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

Reemplazando las coordenadas se tiene:

$$A_P=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}|(-15-8+0+1)-(-2+10+4+0)|$$

$$=\frac{1}{2}|-22-12|=\frac{1}{2}|-34|=\frac{34}{2}=17 \quad \Rightarrow A_P=17\ \text{u}^2$$

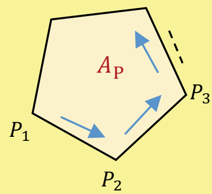
**Área del polígono**

**Vértices:**

$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, ..., $P_n(x_n,y_n)$

Es dado por:

$$A_P=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$




**Respuesta**

El resultado es 17 unidades cuadradas.

**362.** Aplicando el concepto de pendiente, averiguar si los tres puntos $(a, 0)$,$(2a, b)$ y $(-a, 2b)$ son colineales, de la siguiente forma:

## Resolución

Denotamos los puntos con $A(a,0)$, $B(2a,b)$ y $C(-a, 2b)$. Tres puntos son colineales si $m_{AB}=m_{BC}=m_{AC}$. Aplicando el concepto de pendiente entre dos puntos:

$$\boxed{m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

Luego

$$m_{AB}=\frac{-b-0}{2a-a}=-\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad m_{AB}=-\frac{b}{a}$$

$$m_{BC}=\frac{2b+b}{-a-2a}=-\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad m_{BC}=-\frac{b}{a}$$

$$m_{AC}=\frac{2b-0}{-a-a}=-\frac{b}{a}\quad\Rightarrow\quad m_{AC}=-\frac{b}{a}$$

Entonces

$$m_{AB}=m_{BC}=m_{AC}=-\frac{b}{a}$$

**Respuesta**

Los puntos dados son colineales.

**363.** Aplicando el concepto de pendiente, Raquel averigua que los tres puntos (-1, 3),(1, 0) y (3, 3) son colineales.

**Resolución**

Representado los puntos en el plano cartesiano, es fácil ver que son colineales, como se ve en la gráfica.

Tres puntos son colineales si

$$m_{AB}=m_{BC}=m_{AC}$$

Aplicando el concepto de pendiente entre dos puntos:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Luego

$$m_{AB}=\frac{0-3}{1+1}=-\frac{3}{2}$$

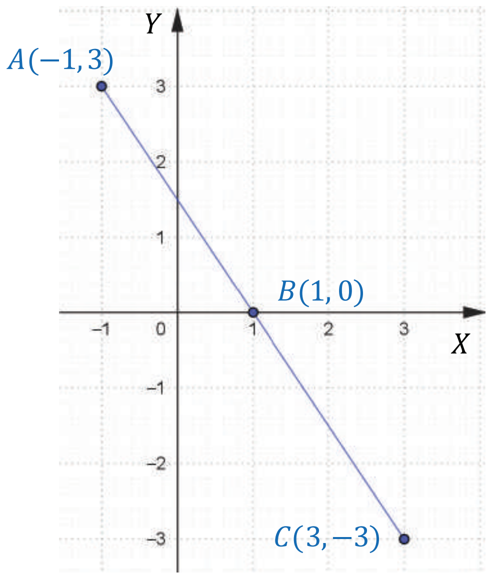
$$m_{BC}=\frac{-3-0}{3-1}=-\frac{3}{2}$$

$$m_{AC}=\frac{-3-3}{3+1}=-\frac{3}{2}$$

Entonces

$$m_{AB}=m_{BC}=m_{AC}=-\frac{3}{2}$$

**Gráfica**



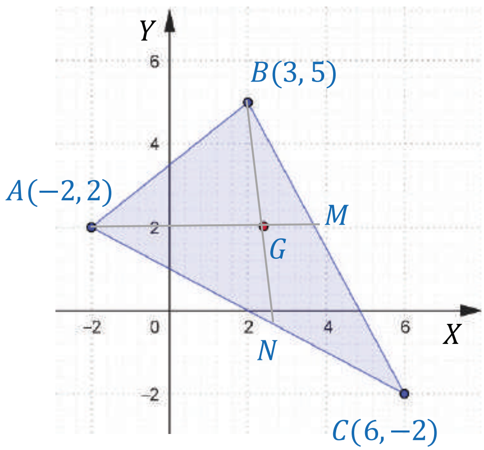

**Respuesta**

Los tres puntos dados son colineales.

**364.** Determinar las coordenadas del baricentro en el triángulo cuyos vértices son (-2, 2),(3, 5) y (6, -2).

## Resolución

## Gráfica




Encontramos los puntos medios entre $BC$ y $AC$

$$M=\left(\frac{6+3}{2},\frac{-2+5}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$N=\left(\frac{6-2}{2},\frac{-2+2}{2}\right)=(2,0)$$

La recta que pasa por los puntos $N(2,0)$ y $B(3,5)$ tiene por ecuación

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Luego:

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-0}{5-0}\ \Rightarrow\ \frac{x-2}{1}=\frac{y}{5}\ \Rightarrow\ 5x-y-10=0 \qquad (1)$$

La recta que pasa por los puntos $M=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$ y $A(-2,2)$, es:

$$\frac{x-\frac{9}{2}}{-2-\frac{9}{2}}=\frac{y-\frac{3}{2}}{2-\frac{3}{2}}\ \Rightarrow\ \frac{2x-9}{-8}=\frac{2y-3}{2}\ \Rightarrow\ 2x+26y-48=0 \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2):

$$\begin{cases} 5x-y=10 & (3)\\ 2x+26y=48 & (4)\end{cases}$$

Multiplicando en (3) por 26 y sumando con (4), es decir:

$$\begin{array}{rr} & 130x-26y=260\\ + & 2x+26y=48\\ \hline & 132x=308 \end{array}\ \Rightarrow\ x=\frac{77}{33}$$

Luego, en (1), se obtiene:

$$y=5\cdot\frac{77}{33}-10=\frac{5\cdot 77-10\cdot 33}{33}=\frac{55}{33}\ \Rightarrow\ y=\frac{55}{33}$$

**Respuesta**

La coordenada del baricentro es $G\left(\frac{77}{33},\frac{55}{33}\right)$.

**365.** Determinar los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son (-3,1), (4,4) y (6,-3).

## Resolución

Denotamos los vértices del triángulo por $A$(-3, 1), $B$(4, 4) y $C$(6, -3)
Aplicando la pendiente entre dos rectas:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

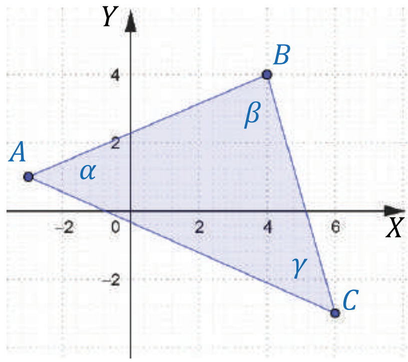
Luego

$$m_{AB} = \frac{4-1}{4+3} = \frac{3}{7}$$

$$m_{BC} = \frac{-3-4}{6-4} = -\frac{7}{2}$$

$$m_{AC} = \frac{-3-1}{6+3} = -\frac{4}{9}$$

## Gráfica




Por la fórmula de ángulo entre dos rectas:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \qquad m_2 m_1 \neq -1$$

Para $\alpha = \angle(AC, AB)$:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{3}{7} + \frac{4}{9}}{1 + \frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)} = \frac{55}{51} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{55}{51}\right) = 47{,}16^o$$

$$\Rightarrow \alpha = 47{,}16^o$$

Para $\beta = \angle(BA, BC)$:

$$\tan\beta = \frac{-\frac{7}{2} - \frac{3}{7}}{1 + \left(-\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{3}{7}} = \frac{55}{7} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{55}{7}\right) = 82{,}75^o$$

$$\Rightarrow \beta = 82{,}75^o$$

Para $\gamma = \angle(CB, CA)$:

$$\tan\gamma = \frac{-\frac{4}{9} + \frac{7}{2}}{1 + \frac{4}{9}\cdot\frac{7}{2}} = \frac{55}{46} \Rightarrow \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{55}{46}\right) = 50{,}09^o$$

$$\Rightarrow \gamma = 50{,}09^o$$

**Respuesta**

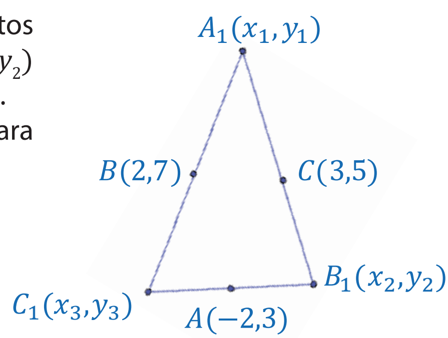
Los ángulos internos del triángulo son 47,16°, 82,75° y 50,09°.

**366.** Los puntos medios de los lados de un triángulo son (-2, 3), (2, 7) y (3, 5). Encuentre las coordenadas de sus vértices.

## Resolución

Sean A(-2, 3), B(2, 7) y C(3, 5) los puntos medios del triángulo y $A_1\ (x_1, y_1)$, $B_1(x_2, y_2)$ y $C_1(x_3, y_3)$ los vértices del triángulo dado. Por la fórmula del punto medio, para obtener las abscisas de $P(x, y)$, se tiene:

## Gráfica




$$\begin{cases} 3 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ -2 = \dfrac{x_2 + x_3}{2} \\ 2 = \dfrac{x_1 + x_3}{2} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 & (1) \\ x_2 + x_3 = -4 & (2) \\ x_1 + x_3 = 4 & (3) \end{cases}$$

Sumando (1), (2) y (3) se tiene:

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3 \qquad (4)$$

Resolviendo (2), (3), (1) en (4) se tiene:

$$\begin{cases} x_1 - 4 = 3 \\ x_2 + 4 = 3 \\ x_3 + 6 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -3 \end{cases} \qquad (5)$$

De forma similar, para $P(x, y)$, se tiene:

$$\begin{cases} 5 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ 3 = \dfrac{y_2 + y_3}{2} \\ 7 = \dfrac{y_1 + y_3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = 10 & (6) \\ y_2 + y_3 = 6 & (7) \\ y_1 + y_3 = 14 & (8) \end{cases}$$

Sumando (6), (7) y (8) se tiene:

$$2(y_1 + y_2 + y_3) = 30 \quad \Rightarrow \quad y_1 + y_2 + y_3 = 15 \qquad (9)$$

Resolviendo (7), (8), (6) en (9) se tiene:

$$\begin{cases} y_1 + 6 = 15 \\ y_2 + 14 = 15 \\ y + 10 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 5 \end{cases} \qquad (10)$$

Luego, combinando (5) y (10) obtenemos las aristas del triangulo

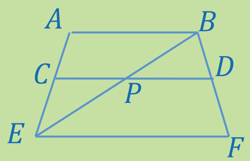
$$A_1(x_1,y_1) \longrightarrow A_1(7{,}9)$$
$$B_1(x_2,y_2) \longrightarrow B_1(-1{,}1)$$
$$C_1(x_3,y_3) \longrightarrow C_1(-3{,}5)$$

**Respuesta**

Los vértices del triángulo son (7, 9),(-1, 1) y (-3, 5).

## Perímetros y áreas (cuadriláteros, polígonos y círculo)

**367.** En la figura dada, $C$ y $D$ son puntos medios de $AE$ y $BF$. Calcular la longitud de $AE$, si $AB = x + 1$, $CP = y$, $PD = 2y + 2$, $EF = 11$ y $AC = CE = x$. donde $ABFE$ es un trapecio regular.

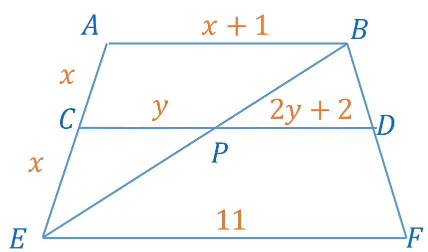



### Datos

$AB = x+1$
$CP = y$
$PD = 2y+2$
$EF = 11$
$AC = CE = x$
$AE = ?$

### Resolución

La figura, $ABFE$, es un trapecio regular, entonces se cumple $AB \parallel CD$ y $CD \parallel EF$




Aplicando la propiedad de paralelismo medio del trapecio:

$$CD = \frac{1}{2}(AB + EF)$$

Reemplazando los datos y de la figura, se tiene:

$$3y + 2 = \frac{1}{2}(x + 12) \quad \Rightarrow \quad 6y + 4 = x + 12$$
$$\Rightarrow \quad 6y - x - 8 = 0 \qquad (1)$$

En $\Delta ABC$, aplicando la propiedad de proporcionalidad, como $AB \parallel CP$, entonces

$$\frac{AB}{CP} = \frac{AE}{AC}$$

Reemplazando los datos:

$$\frac{x+1}{y} = \frac{2x}{x} \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 2y \qquad (2)$$

Luego, (2) y (1):

$$3(2y) - x - 8 = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} 3(x+1) - x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2}$$

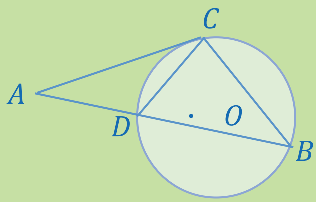
Luego

$$AE = 2x = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5 \qquad \Rightarrow \qquad AE = 5$$

**Respuesta**

El valor del segmento $AE$ es 5.

**368.** Dada la figura a continuación: a) Calcular $AC$ si AD = 6 y BD = 11
b) Calcular AB si AD = 5 y AC = 9.




**a) Datos**

$AD = 6$
$BD = 11$
$AC = ?$

**b) Datos**

$AD = 5$
$AC = 9$
$AB = ?$

**Resolución**

En la figura, aplicando la propiedad de la media proporcional del secante y segmento externo:

$$(AC)^2 = AB \cdot AD \qquad (1)$$

Donde $AB = AD + BD = 17$ y reemplazando datos

$$(AC)^2 = 17 \cdot 6 = 102 \qquad \Rightarrow AC = \sqrt{102} = 10{,}09$$

$$\Rightarrow AC = 10{,}09$$

De la ecuación (1), se tiene:

$$AB = \frac{(AC)^2}{AD} = \frac{9^2}{5} = \frac{81}{5} = 16{,}2 \quad \Rightarrow AB = 16{,}2$$

**Respuesta**

Los resultados son 10,9 y 16,2.

**369.** Se tienen tres circunferencias que son tangentes entre sí. El radio de la circunferencia $C_1$ y $C_2$ es $R$, mientras que el de la circunferencia $C_3$ es $\frac{1}{2}R$, deduzca la distancia entre el centro de $C_3$ y el punto de tangencia entre $C_1$ y $C_2$. Si $R$=2 cm, calcular la distancia con la fórmula deducida.

## c) Datos

Radios de $C_1$, $C_2$ y $C_3$:

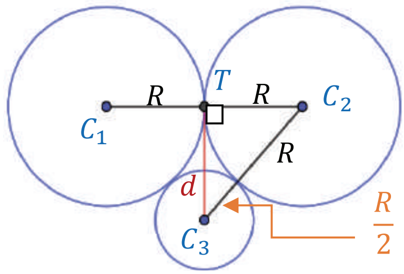
$R_1 = R = R_2$

$R_2 = \frac{1}{2}R$

$d = C_3T = ?$

## Resolución

Según el enunciado se presenta la gráfica:




Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo $\Delta C_3TC_2$:

$$(R_3 + R)^2 = d^2 + R^2 \Rightarrow \left(\frac{R}{2} + R\right)^2 = d^2 + R^2$$

$$\Rightarrow \frac{R^2}{4} + R^2 = d^2$$

$$\Rightarrow \frac{5R^2}{4} = d^2$$

Tomando la raíz cuadrada positiva

$$\Rightarrow d = \frac{\sqrt{5}}{2}R$$

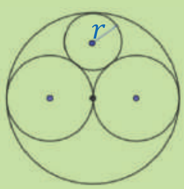
Luego, si $R = 2$, entonces

$$d = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 2 = \sqrt{5} \approx 2{,}23 \quad \Rightarrow d = 2{,}2 \text{ cm}$$

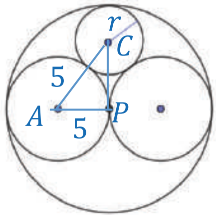
**Respuesta**

La distancia es 2,2 centímetros.

**370.** Dos círculos de radio 5 cm están inscritos en un círculo de radio 10 cm, como se muestra en la figura dada. Un círculo de radio $r$ es tangente a los tres círculos, calcular el radio $r$.



Considerando la figura:




**Resolución**

**Datos:** De acuerdo de la figura se tiene:

$AP = 5$
$AC = 5 + r$
$PC = 10 - r$
$r = ?$

El triángulo $\Delta APC$ es rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras

$$AC^2 = AP^2 + PC^2$$

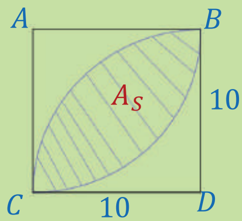
Reemplazando datos se tiene:

$$(5-r)^2 = 5^2 + (10-r)^2 \Rightarrow 25 + 10r + r^2 = 25 + 100 - 20r + r^2$$
$$\Rightarrow 30r = 100 \Rightarrow r = \frac{10}{3} \approx 3{,}33\,\text{cm}$$
$$\Rightarrow r = 3{,}3\,\text{cm}$$

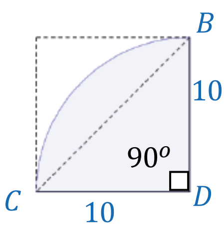
**Respuesta**

El valor del radio $r$ es 3,3 centimetros.

**371.** Dado un cuadrado, $ABCD$ de lado 10 cm en el cual el contorno de la región sombreada esta limitado por el arco de circulo con centro en el ángulo recto, como se muestra en la figura. Calcular el área sombreada.




Considerando la figura:




**Resolución**

De la figura, el área del cuadrado es:

$$A_{\blacksquare} = 10^2 = 100\text{ cm}^2$$

El área del sector circular $A_{SC}$ con centro en el ángulo recto $\angle D = n = 90°$ y $r = 10$ es:

$$A_{SC} = \frac{\pi r^2 n}{360^o} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 90^o}{360^o} = 25\pi$$

El área de la región sombreada es:

$$A_S = 2A_{SC} - A_{\blacksquare} \Rightarrow A_S = 2 \cdot 25\pi - 100 = 50(\pi - 2)$$
$$\Rightarrow A_S = 50(\pi - 2)\text{ cm}^2$$

**Respuesta**

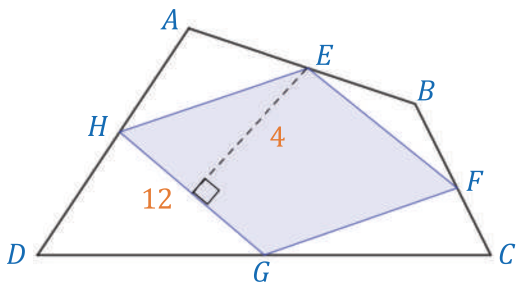
El área sombreada es $50(\pi - 2)$ cm².

**372.** Dado un cuadrilátero $ABCD$, al unir los puntos medios de los lados del cuadrilátero, se forma el paralelogramo $EFGH$, cuya base mayor es 12 cm y su altura 4 cm. Calcular el área del cuadrilátero.

## Resolución

**Propiedad:** se cumple que al unir los puntos medios de los lados se forma un paralelogramo, cuya área es igual a la mitad del área del cuadrilátero, es decir:

De acuerdo al enunciado se traza la figura geométrica:




$$A_{EFGH} = \frac{A_{ABCD}}{2}$$

de donde

$$A_{ABCD} = 2A_{EFGH} \qquad (1)$$

Área del paralelogramo:

$$A_{EFGH} = 12 \cdot 4 = 48 \quad \Longrightarrow \quad A_{EFGH} = 48\ cm^2 \qquad (2)$$

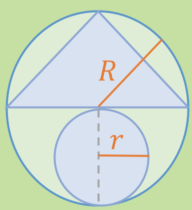
Luego, (2) en (1) se obtiene el área del cuadrilátero:

$$A_{ABCD} = 2 \cdot 48 = 96 \quad \Longrightarrow \quad A_{ABCD} = 96\ \text{cm}^2$$

**Respuesta**

El área del cuadrilátero es 96 $\text{cm}^2$.

**373.** Dada la figura, si el diámetro del círculo grande es 8 cm. Calcular el área sombreada.




**Datos:**

$D = 8\ cm$: diámetro del círculo grade.

$A_S$: área de la región sombreada.

## Resolución

Del enunciado, la base del triángulo es

$$b = D = 8\ \text{cm}$$

Altura del triángulo:

$$h = \frac{D}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad h = 4\ \text{cm}$$

Radio del círculo pequeño:

$$r = \frac{h}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad r = 2 \text{ cm}$$

El área sombreada de la figura está compuesta por la región del triángulo y un círculo, entonces:

$$A_S = A_\Delta + A_\odot \qquad (1)$$

Área del triángulo:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4 = 16 \quad \Rightarrow \quad A_\Delta = 16\text{cm}^2$$

Área del círculo pequeño:

$$A_\odot = \pi r^2 = 2^2\pi = 4\pi \quad \Rightarrow \quad A_\odot = 4\pi \text{ cm}^2$$

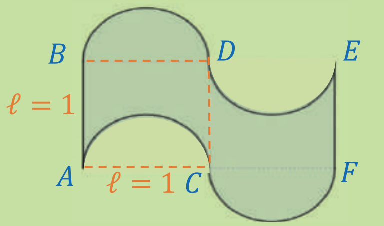
Luego, área de la región sombreada, en (1) se tiene:

$$A_S = A_\Delta + A_\odot = 16 + 4\pi = 4(4+\pi) \quad \Rightarrow \quad A_S = 4(4+\pi)\text{ cm}^2$$

**Respuesta**

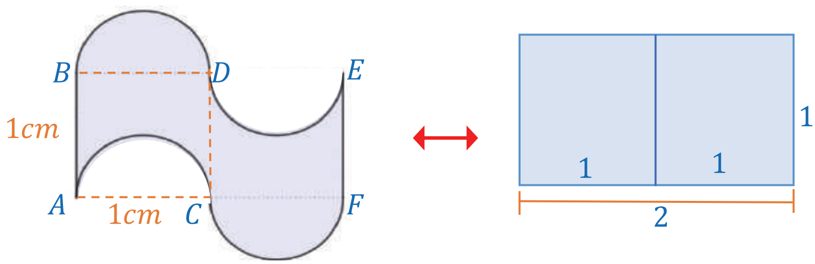
El área del cuadrilátero es $4(4 + \pi)$ cm².

**374.** Calcular el área de la región sombreada en la siguiente figura, si $ABCD$ y $DCFE$ son cuadrados de lado 1 cm.




De acuerdo a la figura, el lado del cuadrado y el radio del círculo son: $\ell = 1cm,$ $\quad r = \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} \quad (1)$

Observe, que la figura se transforma en un rectángulo sombreado:




Área de la región sombreada es nada más que el área del rectángulo:

$$A_S = 2\cdot 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad A_S = 2\text{ cm}^2$$

**Respuesta**

El área de la región sombreada es 2 cm².

## Geometría del espacio

**375.** Determinar la ecuación de la esfera con centro (2, -6, 4) y radio 5 en el espacio tridimensional.

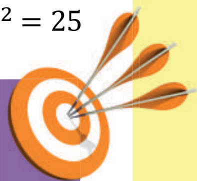
### Resolución

Sea P($x$, $y$, $z$) un punto en el espacio, $C(h, k, \ell) = (2, -6, 4)$ el centro y $r$ el radio, reemplazando en la ecuación de la esfera:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-\ell)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-4)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-4)^2 = 25$$



**Respuesta**

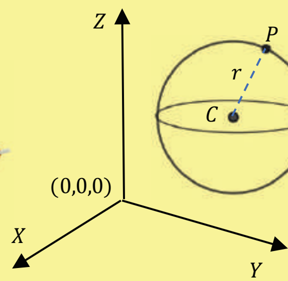
La ecuación de la esfera es:

$$(x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-4)^2 = 25$$

**Ecuación de una esfera**

Sea $P(x, y, z)$ un punto, $C(h, k, \ell)$ centro y radio $r$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-\ell)^2 = r^2$$




**376.** Dados los puntos $P(2, -1, 0)$, $Q(4, 1, 1)$ y $R(4, -5, 4)$. Determinar las longitudes de los lados del triángulo $\Delta PQR$ en un espacio tridimensional. Clasificar el triángulo.

### Resolución

En primer lugar, determinemos las longitudes de los lados del triángulo, usando la distancia entre dos puntos en el espacio, es decir:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Distancia entre $P(2, -1, 0)$ y $Q(4, 1, 1)$:

$$d_{PQ} = \sqrt{(4-2)^2 + (1+1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\Rightarrow d_{PQ} = 3$$

Distancia entre $P(2, -1, 0)$ y $R(4, -5, 4)$.

$$d_{PR} = \sqrt{(4-2)^2 + (-5+1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\Rightarrow d_{PR} = 6$$

Distancia entre $Q(4, 1, 1)$ y $R(4, -5, 4)$.

$$d_{QR} = \sqrt{(4-4)^2 + (-5-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{0+36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\Longrightarrow d_{QR} = 3\sqrt{5}$$

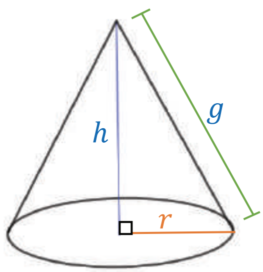
Como las longitudes son distintas, entonces es un triángulo escaleno.

**Respuesta**

Los puntos dados determinan un triángulo escaleno.

**377.** Calcular el volumen del cono de altura $h$ cuya generatriz cumple la relación $2g = 3h$.

Trazado de la figura de acuerdo al enunciado:




**Resolución**

Se sabe que

$$2g = 3h \quad \Longrightarrow \quad g = \frac{2}{3}h$$

Por el Teorema de Pitágoras en la figura, se tiene:

$$g^2 = r^2 + h^2 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = r^2 + h^2$$

$$\Longrightarrow \frac{4}{9}h^2 = r^2 + h^2$$

$$\Longrightarrow r^2 = h^2 - \frac{4}{9}h^2$$

$$\Longrightarrow r^2 = \frac{5}{4}h^2$$

El volumen del cono, viene dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5}{4}h^2\right)h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{5}{4}h^3 = \frac{5}{12}\pi h^3$$

$$\Longrightarrow \quad V = \frac{5}{12}\pi h^3$$

**Respuesta**

El volumen del cono es $\frac{5}{12}\pi h^3$

**378.** La superficie lateral de un cilindro es un rectángulo de base 10 cm y altura 5 cm. Calcular el volumen del cilindro.

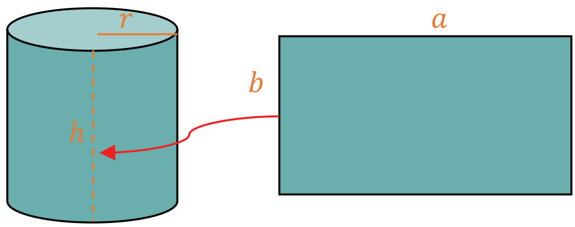
**Datos:**

Dimensiones del rectángulo:

$b = 5$: altura
$a = 10$: base

**Resolución**

Trazado de la figura de acuerdo al enunciado:




La altura de la superficie lateral del cilindro coincide con la altura del rectángulo, es decir:

$$h = b = 5$$

la base del rectángulo forma la circunferencia del circulo de la base, es decir:

$$a = A_{\odot} = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad 10 = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{10}{2\pi}$$

Calculando el volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad V = \pi\left(\frac{10}{2\pi}\right)^2 \cdot 5 = \frac{\pi 10^2}{4\pi^2} \cdot 5 = \frac{125}{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{125}{\pi}\,\text{cm}^3$$

**Respuesta**

El volumen del cilindro es $\frac{125}{\pi}\,\text{cm}^3$.

**379.** El radio de una esfera es de 3 cm, calcular el volumen de un segmento esférico y el volumen de un sector esférico cuyo casquete esférico tiene una altura de 1cm.

**Datos:**

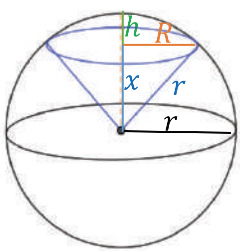
$r = 3$ cm
$h = 1$ cm

Volumen de un sector esférico:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

**Resolución**

Figura de acuerdo al enunciado:



Cálculo del radio de la base del casquete esférico:

$$x = r - h = 3 - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras, se obtiene el radio de la esfera:

$$r^2 = R^2 + x^2 \;\Rightarrow\; R = \sqrt{r^2 - x^2}$$
$$= \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$
$$\Rightarrow \quad R = \sqrt{5}$$

Volumen del segmento esférico:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2 (r-h) \;\Rightarrow\; V = \frac{2}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 1 - \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{5}\right)^2 (3-1)$$
$$= 6\pi - \frac{10}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$$
$$\Rightarrow \quad V = \frac{8}{3}\pi\, cm^3$$

Volumen de un sector esférico:

$$V_{SE} = \frac{2}{3}\pi r^2 h \;\Rightarrow\; V_{SE} = \frac{2}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 1 = 6\pi$$
$$\Rightarrow \quad V_{SE} = 6\pi\, cm^3$$

**Respuesta**

Los volúmenes pedidos son $\frac{8}{3}\pi$ cm$^3$ y $6\pi$ cm$^3$.

**380.** Calcular el volumen del segmento esférico cuyas bases son círculos de radios 2 cm y 3 cm y la distancia entre sus bases es 4 cm.

**Datos:**

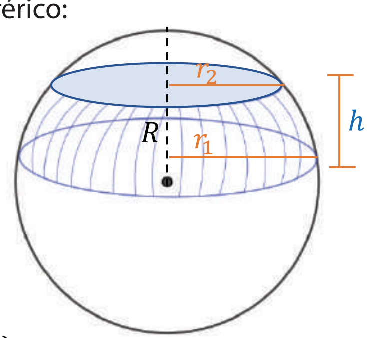
$r_1 = 3$ cm
$r_2 = 2$ cm
$h = 4$ cm

Volumen de un sector esférico:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

**Resolución**

Segmento esférico:




Aplicando el volumen del segmento esférico:

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)h$$

Reemplazando datos

$$V = \frac{1}{6}\pi 4^3 + \frac{1}{2}\pi(3^2 + 2^2) \cdot 4 = \frac{64}{6}\pi + 26\pi$$

$$= \frac{110}{3}\pi \approx 36{,}7\pi$$

$$\Longrightarrow \; V = 36{,}7\pi \;\; \text{cm}^3$$

**Respuesta**

El volumen del segmento esférico es $36{,}7\pi\ \text{cm}^3$.

**381.** Calcula el área de la superficie de la esfera que está circunscrita a un cubo con una arista de 5 cm.

**Datos:**

Lado del cubo:

$\ell = 5\ \text{cm}$

$D$: diagonal del cubo

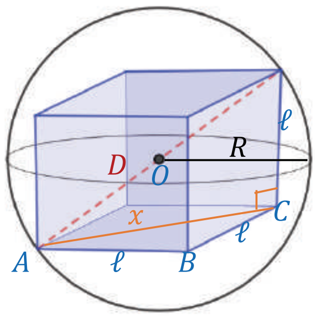
$R$: radio de la esfera

Área de la esfera:

$$A = 4\pi R^2$$

**Resolución**

Esfera circunscrita a un cubo:




Calculando el radio de la esfera, de la figura, aplicando el Teorema de Pitágoras, se tiene:

$$x = \sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{50}$$

Diámetro de la esfera:

$$D = \sqrt{x^2 + \ell^2} = \sqrt{\left(\sqrt{50}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{75} \quad \Longrightarrow \quad D = \sqrt{75}$$

Luego, el radio de la esfera es:

$$R = \frac{D}{2} = \frac{\sqrt{75}}{2}$$

Área de la esfera:

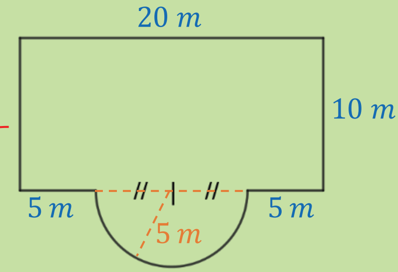
$$A = 4\pi R^2 \;\Longrightarrow\; A = 4\pi\left(\frac{\sqrt{75}}{2}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{75}{4} = 75\pi$$

$$\Longrightarrow \; A = 75\pi\ \text{cm}^2$$

**Respuesta**

El área de la esfera es $75\pi\ \text{cm}^2$.

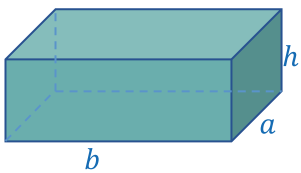
**382.** En un lugar turístico del Estado, hay una piscina de 20 metros de largo y 2 metros de profundidad, tiene la sección de longitud que se muestra en la figura. Calcular la cantidad de agua que se requiere para llenarla.




**Datos:**

$b = 20$ m: largo
$a = 10$ m: ancho
$r = 5$ m: radio
$h = 2$ m: profundidad
Volumen de la piscina:

$$V_P = ?$$




**Resolución**

Para calcular el volumen de la piscina se procede en dos partes.

**Parte 1.** Cálculo del volumen del sólido de base rectangular, la base del solido cuyas caras laterales son rectángulos, lo cual se trata de un prisma rectangular, su volumen será:

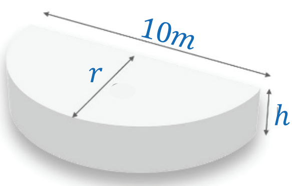
$$V_{\boxdot} = b \cdot a \cdot h$$

Reemplazando datos

$$V_{\boxdot} = 20 \cdot 10 \cdot 2 = 400$$

$$\Rightarrow \quad V_{\boxdot} = 400 \text{ cm}^3$$

**Parte 2.** Cálculo del volumen del sólido de base semicircular, la base es un semicírculo, lo cual se trata de la mitad del cilindro circular recto.




Su volumen será:

$$V_C = \frac{1}{2}\pi r^2 h$$

Reemplazando datos:

$$V_C = \frac{1}{2}\pi \cdot 5^2 \cdot 2 = 25\pi \quad \Rightarrow \quad V_C = 25\pi\ m^3$$

Donde, el volumen de la piscina será:

$$V_P = V_{\boxdot} + V_C = 400 + 25\pi \approx 478{,}5$$

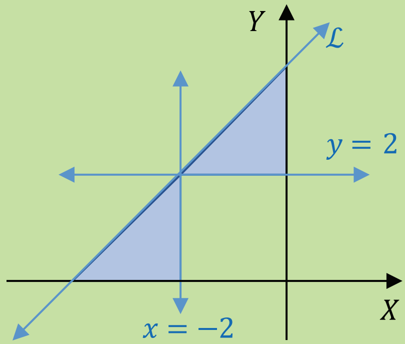
$$\Rightarrow \quad V_P = 478{,}5 \text{ cm}^3$$

**Respuesta**

Para llenar la piscina se requiere 478,5 $\text{m}^3$ de agua.

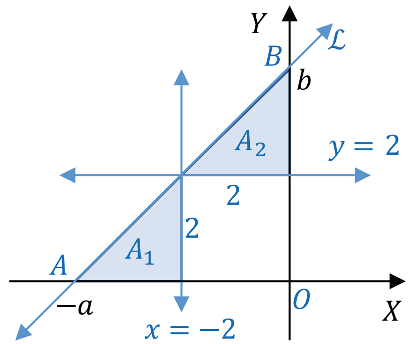
## La línea recta y circunferencia

**383.** Dada la figura, determinar la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ si se sabe que los triángulos sombreados tienen áreas iguales.




### Resolución

En la figura, la recta $\mathcal{L}$ intersecta a los ejes coordenados en -$a$ y $b$ es conveniente usar la ecuación simétrica correspondiente:




$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (1)$$

Área de los triángulos sombreados:

$$A_1 = \frac{1}{2}(a-2)\cdot 2 = a - 2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\cdot 2(b-2) = b - 2$$

Como los triángulos sombreados tienen iguales áreas:

$$A_1 = A_2 \quad \Rightarrow \quad a - 2 = b - 2 \quad \Rightarrow \quad a = b \qquad (2)$$

El área del triángulo ΔAOB, de la figura:

$$A = 2A_1 + A_{\boxdot} \quad \Rightarrow \quad \frac{ab}{2} = 2(a-2) + 2^2$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \frac{a\cdot a}{2} = 2a - 4 + 4$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - 4a = 0$$

$$\Rightarrow \quad a(a-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0, a = 4$$

De donde $a = 4 = b$, sustituyendo en la ecuación (1), se tiene:

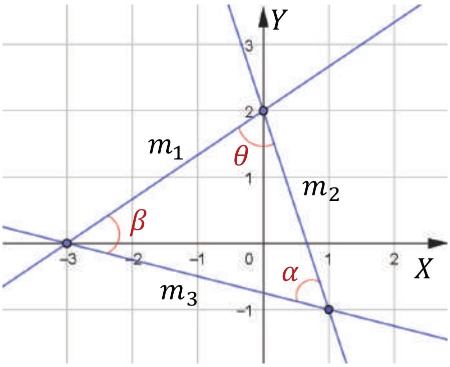
$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad x - y + 4 = 0$$

**Respuesta**

La ecuación de la recta $\mathcal{L}$ $x - y + 4 = 0$.

**384.** Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $2x - 3y + 6 = 0$, $3x + y - 2 = 0$ y $x + 4y + 3 = 0$. Determinar sus ángulos internos y verificar el resultado.

Trazado de la figura, triángulo:




## Resolución

Llevamos cada una de las ecuaciones a la forma pendiente-ordenada:

$$y = mx + b$$

Ecuación con pendiente $m_1$:

$$2x - 3y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$\longrightarrow \quad m_1 = \frac{2}{3}$$

Ecuación con pendiente m_2:

$$3x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -3x + 2 \quad \longrightarrow \quad m_2 = -3$$

Ecuación con pendiente m_3:

$$x + 4y + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \quad \longrightarrow \quad m_3 = -\frac{1}{4}$$

Ahora, para determinar los ángulos, aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas:

$$tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \qquad m_2 m_1 \neq -1$$

Para $\theta = \angle(m_1, m_2)$:

$$\tan\theta = \frac{-3 - \frac{2}{3}}{1 + (-3)\cdot\frac{2}{3}} = \frac{11}{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{11}{3}\right) \approx 74{,}8$$

$$\Rightarrow \theta = 74{,}8^{o}$$

Para $\beta = \angle(m_1, m_3)$:

$$\tan\beta = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{11}{10} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{11}{10}\right) \approx 47{,}7$$

$$\Rightarrow \beta = 47{,}7^{o}$$

Para $\alpha = \angle(m_2, m_3)$:

$$\tan\alpha = \frac{-\frac{1}{4} - (-3)}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-3)} = \frac{11}{7} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{11}{7}\right) \approx 57{,}5$$

$$\Rightarrow \alpha = 57{,}5^{o}$$

Verificación, la suma de ángulos internos de un triángulo debe ser 180°,

$$\theta + \beta + \alpha = 74{,}8^o + 47{,}7^o + 57{,}5^o = 180^o$$

Efectivamente cumple.

**Respuesta**

Los ángulos internos del triángulo son 74,8°; 47,7° y 57,5°.

**385.** Hallar las ecuaciones de las paralelas a la recta $3x - 4y + 3 = 0$ que distan 2 del punto (-1, 1).

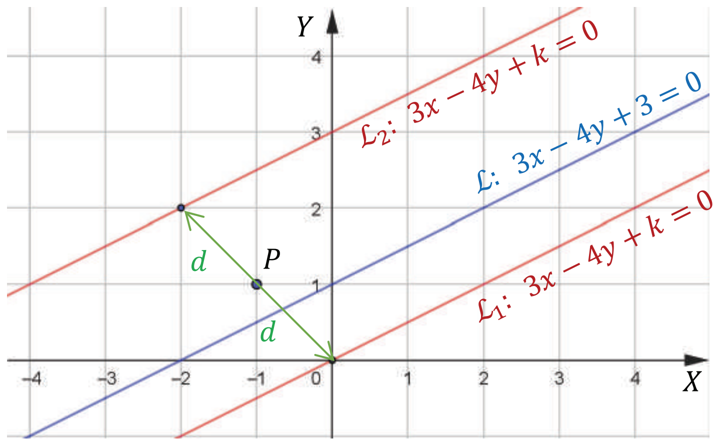
**Datos:**

**Recta:** $\mathcal{L}$: $3x - 4y + 3 = 0$
**Distancia:** $d = 2$
**Punto:** $P(-1, 1)$

**Resolución**

Las rectas paralelas tienen los mismos coeficientes de las variables y tienen la misma pendiente, solo varían en términos independientes.

**Gráfica:**




Las rectas buscadas tendrán la forma:

$$3x - 4y + k = 0 \qquad (1)$$

$$A = 3, B = -4, C = k \qquad P(-1,1) \rightarrow x_0 = -1, y_0 = 1 \qquad (2)$$

Aplicando la distancia de un punto a una recta:

$$d(P,\mathcal{L}) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \overset{(2)}{\Longrightarrow} 2 = \frac{3\cdot(-1) + (-4)\cdot 1 + k}{\pm\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$\Longrightarrow 2 = \pm\frac{-7 + k}{\sqrt{25}} = \pm\frac{-7 + k}{5}$$

De donde, obtenemos dos valores para $k$, es decir:

$10 = -7 + k \;\Rightarrow\; k = 17 \qquad -10 = -7 + k \;\Rightarrow\; k = -3$

Luego en (1), la recta $\mathcal{L}_2$ es:
$3x - 4y + 17 = 0$

Luego en (1), la recta $\mathcal{L}_1$ es:
$3x - 4y - 3 = 0$

**Respuesta**
Las rectas paralelas son $3x - 4y + 17 = 0$ y $3x - 4y - 3 = 0$

**386.** Determina la ecuación de la recta que pasa por coordenadas de punto donde se cruzan las rectas $x + 4y = 0$, $x - 2y - 4 = 0$ además forma un ángulo de 135° con la recta $2x - y + 1 = 0$.

**Dadas dos rectas**
$\mathcal{L}_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0$
$\mathcal{L}_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0$
Se cortan en el punto $P_0(x_0, y_0)$, la familia de rectas que pasan por el punto de intersección, está dado por:
$\mathcal{L}:\quad \mathcal{L}_1 + k\mathcal{L}_2 = 0$
Donde $k$ es un parámetro.

**Resolución**

Sean las rectas

$\mathcal{L}_1: x + 4y = 0$ y $\mathcal{L}_2: x - 2y - 4 = 0$

Por la familia de rectas se tiene:

$\mathcal{L}_1 + k\mathcal{L}_2 = 0$

Entonces la recta buscada será:

$$\mathcal{L}:\quad x + 4y + k(x - 2y - 4) = 0 \qquad (1)$$

$$(k+1)x + (4-2k)y - 4k = 0 \Rightarrow y = \frac{(k+1)}{2k-4}x + \frac{4k}{4-2k}$$

$$\longrightarrow m = \frac{(k+1)}{2k-4}$$

Ahora, determinando la pendiente de la última recta dada:

$$\mathcal{L}_3:\quad 2x - y + 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad m_3 = 2$$

Para determinar el ángulo entre la recta buscada $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_3$, aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas:

$$\tan\theta = \frac{m - m_3}{1 + mm_3} \qquad mm_3 \neq -1$$

Sea $135^o = \angle(m, m_3)$:

$$\tan 135^o = \frac{\frac{(k+1)}{2k-4} - 2}{1 + \frac{(k+1)}{2k-4}\cdot 2} = \frac{9-3k}{4k-2} \Rightarrow -1 = \frac{9-3k}{4k-2}$$

$$\Rightarrow -4k + 2 = 9 - 3k \Rightarrow k = -7$$

Luego, $k = -7$ en la ecuación (1), se tiene:

$$x + 4y - 7(x - 2y - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - 9y - 14 = 0$$

**Respuesta**
La ecuación de la recta buscada es $3x - 9y - 14 = 0$.

**387.** En el triángulo de vértices $A(-2, 2)$, $B(-1, -2)$ y $C(2, 1)$. Hallar, las ecuaciones de sus medianas.

## Resolución

Puntos medios:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Punto medio de $AB$:

$$M_{AB} = \left(\frac{-2-1}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$$

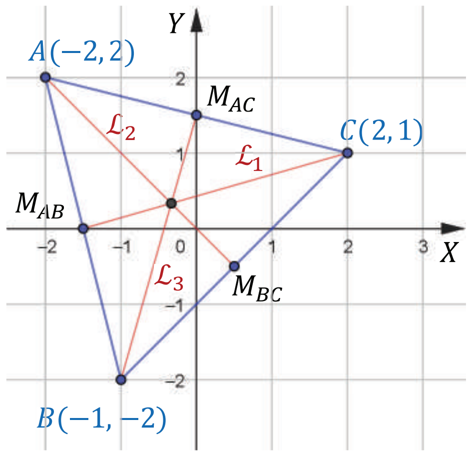
Punto medio de $AC$:

$$M_{AC} = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

Punto medio de $BC$:

$$M_{BC} = \left(\frac{-1+2}{2}, \frac{-2+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Trazado de la gráfica:




Aplicando ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$\mathcal{L}_1$ pasa por $M_{AB}$ y $C(2, 1)$:

$$y - 0 = \frac{1-0}{2+\frac{3}{2}}\left(x + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow 2x - 7y + 3 = 0$$

$\mathcal{L}_2$ pasa por $M_{BC}$ y $A(-2, 2)$:

$$y + \frac{1}{2} = \frac{2+\frac{1}{2}}{-2-\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y + \frac{1}{2} = -x + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x + y = 0$$

$\mathcal{L}_3$ pasa por $M_{AC}$ y $B(-1, -2)$:

$$y - \frac{3}{2} = \frac{-2-\frac{3}{2}}{-1-0}(x - 0) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}x$$

$$\Rightarrow 7x - 2y + 3 = 0$$

**Respuesta**

Las ecuaciones de sus medianas son:

$2x - 7y + 3 = 0$, $x + y = 0$ y $7x - 2y + 3 = 0$

**388.** En el triángulo de vértices $A(-2, 2)$, $B(-1, -2)$ y $C(2, 1)$. Hallar, las ecuaciones de sus mediatrices.

**Resolución**

Puntos medios:

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Punto medio de $AB$:

$$M_{AB} = \left(\frac{-2-1}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$$

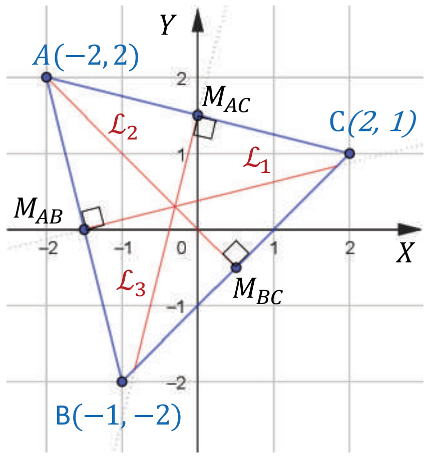
Punto medio de $AC$:

$$M_{AC} = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

Punto medio de $BC$:

$$M_{BC} = \left(\frac{-1+2}{2}, \frac{-2+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Trazado de la gráfica:




Calculamos las pendientes de los lados del triángulo, por ecuación pendiente que pasa por dos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pendientes que pasan por los puntos $A(-2, 2)$, $B(-1, -2)$ y $C(2, 1)$.

$$m_{AB} = \frac{-2-2}{-1+2} = -4 \Rightarrow m_{AB} = -4$$

$$m_{AC} = \frac{1-2}{2+2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow m_{AC} = -\frac{1}{4}$$

$$m_{BC} = \frac{1+2}{2+1} = 1 \Rightarrow m_{BC} = 1$$

Aplicando la ecuación punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\mathcal{L}_1:\ M_{AB} = \left(-\frac{3}{2}, 0\right);\ m_1 = \frac{1}{4}$$

$$y - 0 = \frac{1}{4}\cdot\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2x - 8y + 3 = 0$$

$$\mathcal{L}_2:\ M_{BC} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right);\ m_2 = -1$$

$$y + \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x + y = 0$$

$$\mathcal{L}_3:\ M_{AC} = \left(0, \frac{3}{2}\right);\ m_2 = 5 \Rightarrow y - \frac{3}{2} = 4\cdot(x - 0)$$

$$\Rightarrow 8x - 2y + 3 = 0$$

**Respuesta**

Las ecuaciones de las mediatrices son:

$2x - 8y + 3 = 0$, $x + y = 0$ y $8x - 2y + 3 = 0$

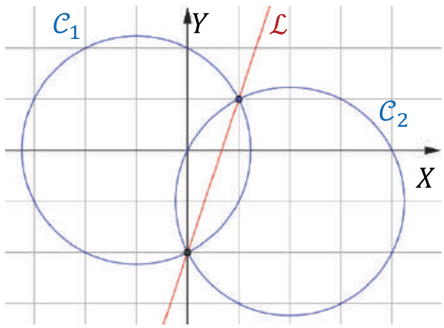
**389.** Dadas las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ cuyas ecuaciones son:

$$x^2+y^2+2x-4=0 \qquad \wedge \qquad x^2+y^2-4x+2y=0$$

Hallar la ecuación de la recta que contiene a la cuerda común de las dos circunferencias.

**Resolución**

Trazado de la gráfica:




Sean las circunferencias

$$\mathcal{C}_1:\ x^2+y^2+2x-4=0$$

$$\mathcal{C}_2:\ x^2+y^2-4x+2y=0$$

Luego

$$\begin{cases} x^2+y^2=-2x+4 & (1) \\ x^2+y^2=4x-2y & (2) \end{cases}$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2), se tiene:

$$-2x+4=4x-2y \Rightarrow -2x-4x+2y+4=0$$
$$\Rightarrow -6x+2y+4=0$$
$$\Rightarrow 3x-y-2=0$$

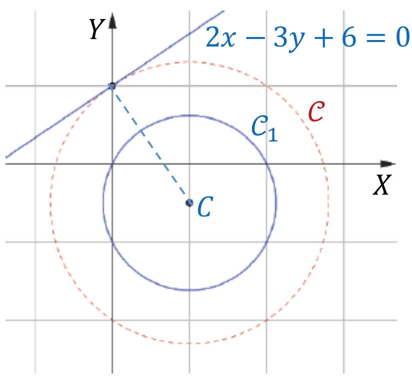
**Respuesta**

La ecuación de la recta buscada es $3x-y-2=0$.

**390.** Determinar la ecuación de una circunferencia tangente a la recta de ecuación $2x - 3y+6=0$ que sea concéntrica con la circunferencia $x^2+y^2 - 4x+2y=0$.

**Resolución**

Trazado de la gráfica:




Dos circunferencias concéntricas tienen el mismo centro. De la ecuación

$$x^2+y^2-4x+2y=0$$

completando cuadrados, se tiene:

$$\underbrace{x^2-4x+4}_{T.C.P}-4+\underbrace{y^2+2y+1}_{T.C.P}-1=0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2-5=0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=5$$

Donde: $h=2, k=-1 \Rightarrow C(2,-1)$

La distancia del centro a la recta tangente será el radio de la circunferencia buscada.

$$C(2,-1) \;\; \text{y} \;\; 2x-3y+6=0$$

Donde:

$$x_0=2, y_0=-1\,;\, A=2, B=-3, C=6$$

El radio $r=d$, se calcula por la distancia de un punto a una recta:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Entonces, reemplazando datos

$$r=\frac{|2\cdot 2+(-3)\cdot(-1)+6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|13|}{\sqrt{13}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13} \;\; \Rightarrow \;\; r=\sqrt{13}$$

Luego, $C(2,-1)$ y $r=\sqrt{13}$ reemplazando en la ecuación ordinaria:

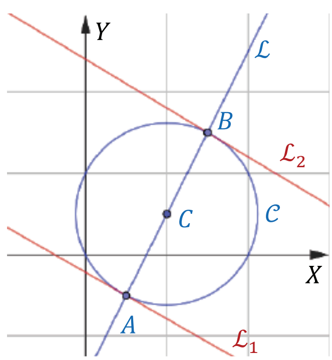
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \;\; \Rightarrow \;\; (x-2)^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{13}\right)^2$$
$$\Rightarrow \;\; x^2-4x+4+y^2+2y+1=13$$
$$\Rightarrow \;\; x^2+y^2-4x+2y-8=0$$

**Respuesta**

La ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2-4x+2y-8=0$.

**391.** Determinar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-4x-2y=0$, en los puntos de intersección de esta curva con la recta $2x-y-3=0$.

**Gráfica:**




**Resolución**

Sea $\mathcal{C}$: $\quad x^2+y^2-4x-2y=0$

Completando cuadrados, se tiene:

$$\underbrace{x^2-4x+4}_{T.C.P}-4+\underbrace{y^2-2y+1}_{T.C.P}-1=0$$
$$\Rightarrow \;\; (x-2)^2+(y-1)^2-5=0$$
$$\Rightarrow \;\; (x-2)^2+(y-1)^2=5$$

Donde: $\; h=2, k=1 \;\; \Rightarrow \;\; C(2,1)$

Cálculo de puntos de intersección de la circunferencia con la recta:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y=0 & (1) \\ 2x-y-3=0 & (2) \end{cases}$$

De (2) se obtiene $y=2x-3$ esto en (1):

$$x^2+(2x-3)^2-4x-2(2x-3)=0$$
$$\Rightarrow \;\; x^2+4x^2-12x+9-4x-4x+6=0$$

$$\Rightarrow \; 5x^2 - 20x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow \; x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \; (x-1)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \; x = 1, x = 3$$

Si $x = 1 \xrightarrow{(2)} y = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \;\Rightarrow\; A(1,-1)$

Si $x = 3 \xrightarrow{(2)} y = 2 \cdot 3 - 3 = 3 \;\Rightarrow\; B(3,3)$

Pendiente de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por $A(1,-1)$ y $B(3,3)$:

$$\mathcal{L}:\; 2x - y - 3 = 0 \;\Rightarrow\; y = 2x - 3 \quad \longrightarrow \quad m_{\mathcal{L}} = 2$$

De la gráfica, se tiene:

$$\mathcal{L} \perp \mathcal{L}_1 \quad \Leftrightarrow \quad m_{\mathcal{L}} \cdot m_1 = -1 \;\Rightarrow\; 2 \cdot m_1 = -1 \;\Rightarrow\; m_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{L} \perp \mathcal{L}_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_{\mathcal{L}} \cdot m_2 = -1 \;\Rightarrow\; 2 \cdot m_2 = -1 \;\Rightarrow\; m_2 = -\frac{1}{2}$$

Luego, la ecuación $\mathcal{L}_1$ que pasa por $A(1,\text{-}1)$ con pendiente $m_1 = -\frac{1}{2}$, reemplazando en la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \;\Rightarrow\; y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\Rightarrow\; x + 2y + 1 = 0$$

La ecuación $\mathcal{L}_2$ que pasa por $B(3,3)$ con pendiente $m_2 = -\frac{1}{2}$, reemplazando en la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_1 = m_2(x - x_1) \;\Rightarrow\; y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

$$\Rightarrow\; x + 2y - 9 = 0$$

**Respuesta**

Las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$$x + 2y + 1 = 0 \quad \text{y} \quad x + 2y - 9 = 0.$$

## La parábola, elipse e hipérbola

**392.** La ecuación de una familia de parábolas es $y = ax^2 + bx + c$. Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $A(\text{-}6,\text{-}1)$, $B(\text{-}1,4)$ y $C(2,3)$.

### Resolución

Considerando la parábola $\mathcal{P}:\; y = ax^2 + bx + c$

Reemplazando los puntos y se determinan las constantes $a$, $b$ y $c$.

$$(-6,-1) \in \mathcal{P}: \quad -1 = a(-6)^2 + b(-6) + c$$

$$\Rightarrow\; 36a - 6b + c = -1 \qquad (1)$$

$$(-1,4) \in \mathcal{P}: \quad 4 = a(-1)^2 + b(-1) + c$$

$$\Rightarrow\; a - b + c = 4 \qquad (2)$$

$$(2,3) \in \mathcal{P}: \;\; 3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$
$$\Longrightarrow 4a + 2b + c = 3 \qquad (3)$$

Restando (1) y (2), (2) y (3):

$$-\begin{array}{r} 36a - 6b + c = -1 \\ a - b + c = 4 \\ \hline 7a - b = -1 \end{array} \quad (4) \qquad\qquad -\begin{array}{r} a - b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ \hline -3a - 3b = 1 \end{array} \quad (5)$$

Resolviendo (4) y (5), se obtiene:

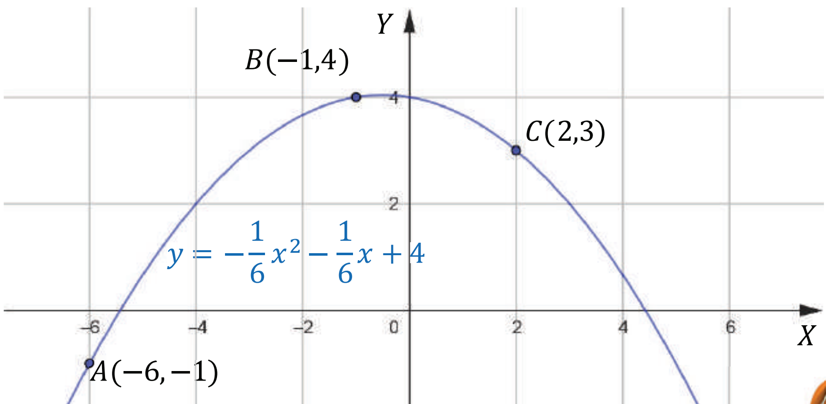
$$a = -\frac{1}{6} \quad \wedge \quad b = -\frac{1}{6} \quad \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad c = 4$$

luego:

$$\mathcal{P}: \quad y = \left(-\frac{1}{6}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)x + 4$$

$$\Longrightarrow y = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + 4$$

**Resolución**

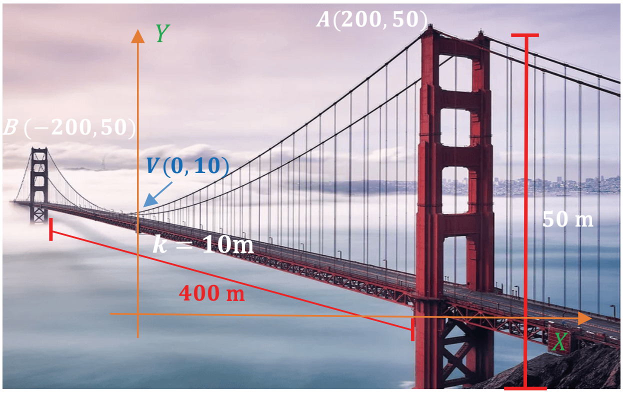



**Respuesta**

La ecuación de la parábola es $y = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + 4$

**393.** Un puente colgante tiene un cable que forma un arco parabólico. Los postes que sostienen el cable miden 50 metros de alto y están separados por 400 metros. El punto más bajo del cable está a 10 metros por encima de la calzada del puente. Usando el eje "$X$" como la horizontal del puente y el eje "$Y$" como el eje de simetría de la parábola, encuentra la ecuación del arco parabólico y la altura del cable a 90 metros del centro del puente.

Figura con respecto al problema:




**Datos:**

$y$ = 50 m: altura de poste
$x$ = 200 m: distancia entre poste y el eje "$Y$"
$h$ = 0 m, $k$ =10 m: punto más bajo del cable (vértice)
$x_1$ = 90 m: distancia a cierto punto del centro del puente

**Resolución**

Por la ecuación ordinaria de la parábola:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \qquad (1)$$

Reemplazando datos:

$$(200-0)^2 = 4p(50-10) \Rightarrow 200^2 = 160p$$

$$\Rightarrow p = \frac{40\,000}{160} = 250 \quad \Rightarrow p = 250$$

Luego, tenemos vértice $V(0{,}10)$ y parámetro $p = 250$, en (1) se tiene:

$$(x-0)^2 = 4 \cdot 250(y-10) \Rightarrow x^2 = 1000y - 40$$

$$\Rightarrow x^2 - 1000y + 40 = 0 \qquad (2)$$

Cálculo de la altura $y_1$ pedida a una distancia $x_1 = 90$ m del centro del puente, por la ecuación (2) tenemos:

$$x_1^2 - 1000y_1 + 40 = 0 \Rightarrow 90^2 - 1000y_1 + 40 = 0$$

$$\Rightarrow 8100 - 1000y_1 + 40 = 0$$

$$\Rightarrow -1000y_1 = -8060$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{8060}{1000} = 8{,}06$$

$$\Rightarrow y_1 = 8{,}06 \text{ m}$$

**Respuesta**

La ecuación del arco parabólico es $x^2 - 1000y + 40 = 0$ y la altura pedida es 8,06 m.

**394.** Determine la ecuación de circunferencia que pasa por el vértice y por los extremos del lado recto de la parábola $x^2 + 4y = 0$.

## Resolución

Considerando la parábola $\mathcal{P}: \quad x^2 = -4y$

Donde: $4p = -4 \quad \longrightarrow P = -1$ y $F(0, -1)$

Lado recto $(LR)$ $\quad y = p \quad \longrightarrow \quad y = -1$

Ahora, intersectando la parábola con lado recto:

$$\begin{cases} x^2 = -4y \\ y = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

Luego, los extremos del lado recto son: $L(\text{-}2, \text{-}1)$ y $R(2, \text{-}1)$

Ahora los puntos $V(0,\ 0)$, $L(\text{-}2,\ \text{-}1)$ y $R(2,\ \text{-}1)$ en la ecuación general de la circunferencia

$$\mathcal{C}: \qquad x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Reemplazando los puntos para determinar las constantes $D, E$ y $F$.

$$(0,0) \in \mathcal{C}: \quad 0^2 + 0^2 + D \cdot 0 + E \cdot 0 + F = 0 \Rightarrow F = 0 \qquad (1)$$

$$(-2,-1) \in \mathcal{C}: \ (-2)^2 + (-1)^2 + D \cdot (-2) + E \cdot (-1) + F = 0$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} -2D - E = -5 \qquad (2)$$

$$(2,-1) \in \mathcal{C}: \ 2^2 + (-1)^2 + D \cdot 2 + E \cdot (-1) + F = 0$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} 2D - E = -5 \qquad (3)$$

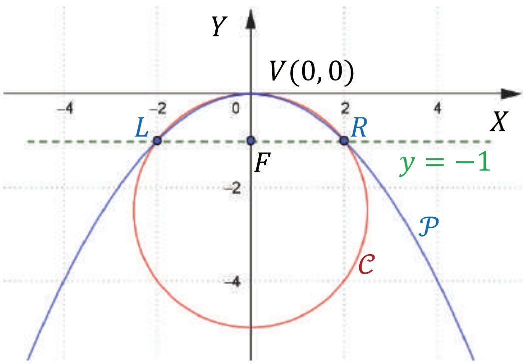
Resolviendo se obtiene:

$$E = 5, \quad D = 0, \qquad F = 0$$

Los valores obtenidos se reemplazan en la ecuación general:

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 + 0 + 5y + 0 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 5y = 0$$

## Gráfica:




**Respuesta**

La ecuación de la circunferencia es:

$x^2 + y^2 + 5y = 0$

**395.** Determinar los elementos y gráfica de la siguiente elipse:

$$36x^2+64y^2+180x-256y-95=0$$

## Resolución

Sea

$$\mathcal{E}:\quad 36x^2+64y^2+180x-256y-95=0$$

Factorizando

$$36(x^2+5x)+64(y^2-4y)-95=0$$

Completando cuadrados

$$\underbrace{36\left[x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]}_{T.C.P}-36\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+64\underbrace{(y^2-4y+4)}_{T.C.P}-64\cdot 4-95=0$$

$$\Rightarrow\quad 36\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+64(y-2)^2-225-256-95=0$$

$$\Rightarrow\quad 36\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+64(y-2)^2=576$$

Dividiendo por 576

$$\Rightarrow\quad \frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

Comparando con la ecuación ordinaria, se obtiene los elementos:

**Centro:**

$$h=-\frac{5}{2},\qquad k=2\quad\rightarrow\quad C\left(-\frac{5}{2},2\right)$$

$$a^2=16, b^2=9\quad\rightarrow\quad a=4, b=3$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}\quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{7}$$

**Focos:**

$$F(h\pm c,k)=F\left(-\frac{5}{2}\pm\sqrt{7},2\right)$$

**Vértices:**

$$V\left(\frac{3}{2},2\right),\qquad V'\left(-\frac{13}{2},2\right)$$

**Eje menor:**

$$B\left(-\frac{5}{2},5\right),\qquad B'\left(-\frac{5}{2},-1\right)$$

**Lado recto:**

$$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot 9}{4}=\frac{9}{2}\quad\Rightarrow\quad LR=\frac{9}{2}$$

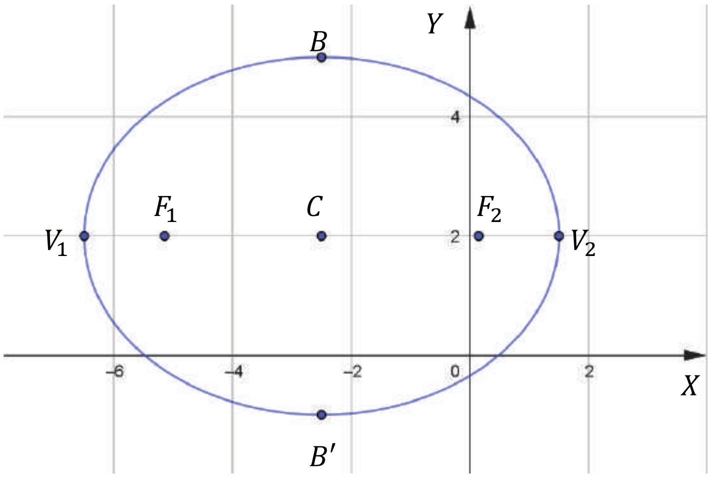
**Recta directriz:**

$$x = h \pm \frac{a^2}{c} = -\frac{5}{2} \pm \frac{16}{\sqrt{7}} \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \pm \frac{16}{\sqrt{7}}$$

**Excentricidad:**

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

## Gráfica




**Respuesta**

Foco $F\left(-\frac{5}{2} \pm \sqrt{7}, 2\right)$, centro $C\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$, vértices $B'\left(-\frac{5}{2}, -1\right), B\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$, eje menor $B\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$, $B'\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$ lado recto $LR = \frac{9}{2}$, excentricidad $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$, recta directriz $x = -\frac{5}{2} \pm \frac{16}{\sqrt{7}}$.

**396.** Hallar la ecuación de la elipse que tenga como centro $C(2{,}4)$ y sea tangente a los dos ejes coordenados.

## Resolución

Por la ecuación de la elipse de centro $C(h{,}k)$:

$$\mathcal{E}: \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Como la elipse es tangente a los ejes coordenados, entonces se tiene:
Distancia de $C(2.4)$ al eje "X" es

$$a = 4 \rightarrow a^2 = 16$$

Distancia de $C(2.4)$ al eje "Y" es

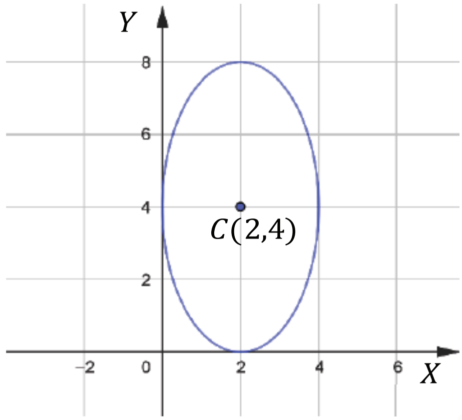
$$b = 2 \rightarrow b^2 = 4$$

Además, el centro es $C(2{,}4) \longrightarrow h = 2, k = 4$

Luego en la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$:

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$$

**Gráfica**



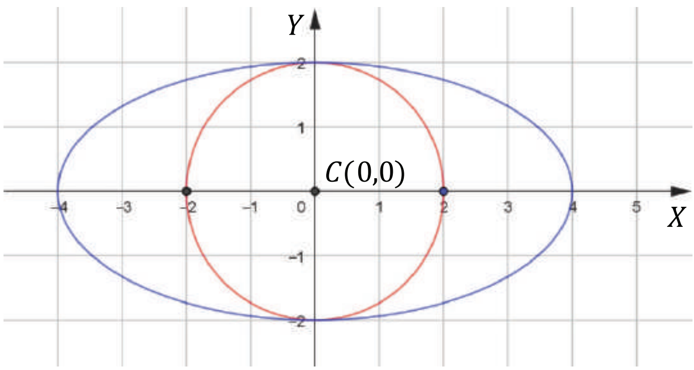

**Respuesta**

La ecuación de la elipse es $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y-4)^2}{16}=1$

**397.** Una elipse es tangente a la circunferencia, de tal manera que sus focos se encuentran en la circunferencia de radio $r=2$. ¿Cuál es la excentricidad de la elipse?

**Resolución**

**Gráfica**




De la gráfica, relación de la elipse y circunferencia se tiene:

$$r=c=b \qquad (1)$$

Además de la relación pitagórica:

$$a^2=b^2+c^2 \overset{(1)}{\Longrightarrow} a^2=c^2+c^2=2c^2 \Longrightarrow a=\sqrt{2}c \qquad (2)$$

Luego, en la excentricidad:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{2}c}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad e=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Avanzado 03

**Respuesta**
La excentricidad es $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**398.** Los focos de la hipérbola coinciden con los focos de la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Hallar la ecuación de la hipérbola con excentricidad con $e = 2$

## Resolución

Considerando la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \longrightarrow a^2 = 25, b^2 = 9 \quad \rightarrow \quad a = 5, b = 3$$

Por la relación Pitagórica:

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = 16 \quad \rightarrow \quad c = 4$$

Focos: $F(\pm c, 0) \quad \longrightarrow \quad F_1(-4,0), \qquad F_2(4,0)$

Excentricidad de la hipérbola:

$$e = \frac{c}{a} = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2a \quad \longrightarrow \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 4$$

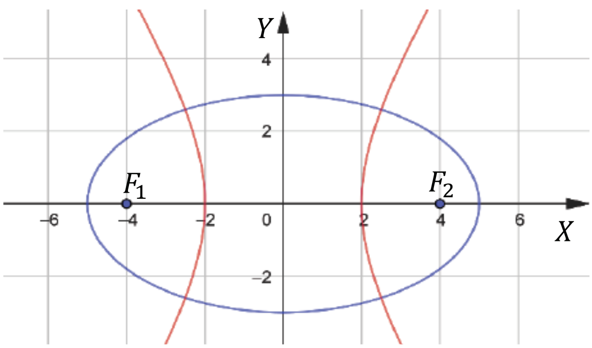
De la relación Pitagórica, se tiene

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 16 - 4 = 12 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 12$$

Luego

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

## Gráfica:




**Respuesta**
La excentricidad es $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

**399.** Hallar la ecuación de la hipérbola con vértices (3, -5) y (3, 1) cuyas asíntotas tienen ecuaciones

$$2x - y - 8 = 0 \quad \wedge \quad 2x + y - 4 = 0.$$

## Resolución

El centro de la hipérbola es el punto de intersección de las asíntotas:

$$\begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 8 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow 2x - 8 = -2x + 4$$

$$\Rightarrow x = 3 \wedge y = -2 \Rightarrow C(3, -2)$$

Luego, una de las asíntotas tiene pendiente $m = 2$, se cumple que:

$$\frac{b}{a} = 2 \qquad (1)$$

Donde $b$ es la distancia del centro $C$(3,-2) al vértice $V_1$ (3,1), entonces

$$b = \sqrt{(3-3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{0+9} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow b = 3$$

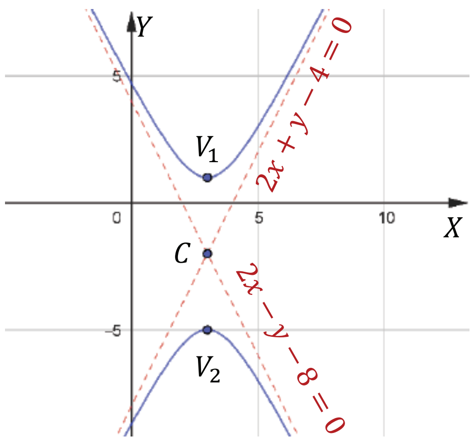
$$\overset{(1)}{\Rightarrow} a = \frac{3}{2}$$

Luego, en la ecuación de la hipérbola con centro $C$(3,-2):

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-k)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y-(-2))^2}{3^2} - \frac{(x-3)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

## Gráfica:




**Respuesta**

La ecuación de la hipérbola es: $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{\frac{9}{4}} = 1$

**400.** Encuentra la ecuación de la hipérbola que corta al punto $P(3{,}4)$ y tiene como asíntotas la rectas:

$$3x-2y+1=0 \quad \wedge \quad 3x+2y-7=0$$

## Resolución

Sean

$P_0(x_0,y_0)$, $\mathcal{L}_1$: $3x-2y+1=0 \ \wedge \ \mathcal{L}_2$: $3x+2y-7=0$

y por la distancia de un punto a una recta:

$$d_{\mathcal{L}_1}\cdot d_{\mathcal{L}_2}=k \Rightarrow \frac{3x_0-2y_0+1}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}\cdot\frac{3x_0+2y_0-7}{\sqrt{3^2+2^2}}=k$$

$$\Rightarrow \frac{3x_0-2y_0+1}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3x_0+2y_0-7}{\sqrt{13}}=k$$

El punto $P(3,4)$ está en hipérbola

$$\Rightarrow \frac{3\cdot3-2\cdot4+1}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3\cdot3+2\cdot4-7}{\sqrt{13}}=k$$

$$\Rightarrow \frac{9-8+1}{\sqrt{13}}\cdot\frac{9+8-7}{\sqrt{13}}=k$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{10}{\sqrt{13}}=k$$

$$\Rightarrow k=\frac{20}{13}$$

Otra forma de determinar la ecuación de una hipérbola es la siguiente:
La distancia de la primera asíntota por la distancia de la segunda es igual a una constante $k$.

Luego:

$$\frac{3x-2y+1}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3x+2y-7}{\sqrt{13}}=\frac{20}{13}$$

$$\Rightarrow \frac{(3x-2y+1)(3x+2y-7)}{13}=\frac{20}{13}$$

$$\Rightarrow (3x-2y+1)(3x+2y-7)=20$$

$$\Rightarrow 9x^2+6xy-21x-6xy-4y^2+14y+3x+2y-7=20$$

$$\Rightarrow 9x^2-4y^2-18x+16y-27=0$$

**Respuesta**

La ecuación de la hipérbola es: $9x^2-4y^2-18x+16y-27=0$

## Básico - Geometría

**401.** Los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ en la gráfica, son colineales. Si $AC = 7$ y $AB \cong CD$. Calcular la suma de los segmentos $AC$ y $BD$.

a) 5 b) 7 c) 14 d) -14

### Resolución

Representación gráfica


Por la suma e igualdad de segmentos:

$$AB + BD = AC + CD \qquad (1)$$

Como

$$AB \cong CD \implies AB = CD$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se tiene:

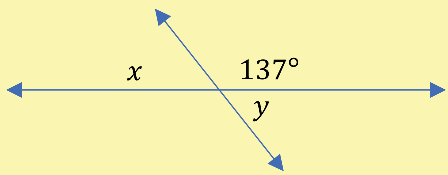
$$CD + BD = AC + CD$$
$$\implies AC = BD$$

Como $AC = 7$, entonces $BD = 7$. Luego la suma de segmentos es:

$$AC + BD = 7 + 7 = 14$$

**Respuesta:** 14

**402.** Si el suplemento de un ángulo es 137°. Hallar $x + y$, en la siguiente figura:




a) 86° b) 43° c) 85° d) 77°

### Resolución

Por la propiedad de suplemento de ángulos:

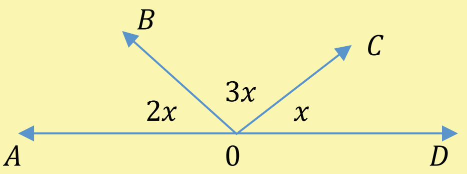
$$x + 137° = 180° \implies x = 180° - 137°$$
$$\implies x = 43°$$

Por la propiedad de opuestos por el vértice:

$$x = 43° = y \implies x + y = 43° + 43° = 86°$$
$$\implies x + y = 86°$$

**Respuesta:** 86°

**403.** Hallar $x + 60°$ en la siguiente figura:




a) $30°$ b) $45°$ c) $90°$ d) $180°$

**Resolución**

De la figura, por propiedad de ángulos suplementarios, se tiene:

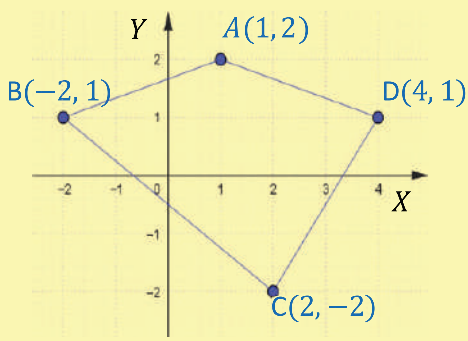
$$2x + 3x + x = 180^o \Rightarrow 6x = 180^o$$
$$\Rightarrow x = 30^o$$

Luego:

$$x + 60^o = 30^o + 60^o = 90^o \Rightarrow x + 60^o = 90^o$$

**Respuesta:** $90°$

**404.** En el plano cartesiano, se representan los puntos como se ve en la figura siguiente:




¿Cuál es la distancia entre los puntos $A$ y $C$?

a) 7 b) $\sqrt{17}$ c) $\sqrt{13}$ d) 9

**Resolución**

Los puntos son A(1,2) y C(2,-2), con la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-2)^2}$$
$$= \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{17}$$

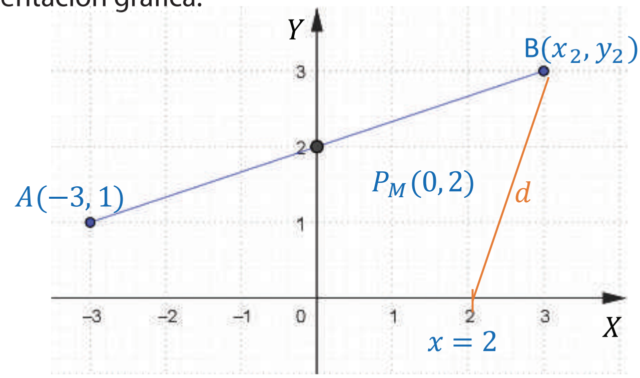
**Respuesta:** $\sqrt{17}$

**405.** Si un extremo de un segmento es el punto A(-3, 1) y el punto medio es $P_M(0, 2)$. Al determinar el otro extremo $B(x_2, y_2)$, calcular la distancia del punto B hasta la abscisa $x = 2$.

a) 10 b) $\sqrt{10}$ c) $2\sqrt{10}$ d) 3

**Resolución**

Representación gráfica:




Aplicando la fórmula del punto medio, es decir, el punto $P_M(0, 2)$ se puede escribir como:

$$P_M(0,2) = P_M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \Rightarrow (0,2) = \left(\frac{-3 + x_2}{2}, \frac{1 + y_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-3 + x_2}{2} = 0 \\ \dfrac{1 + y_2}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 + x_2 = 0 \\ 1 + y_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

De donde, el otro extremo del segmento es $B(x_2, y_2) = B(3, 3)$

La distancia entre $B(3, 3)$ y $(2, 0)$ es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (0-3)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

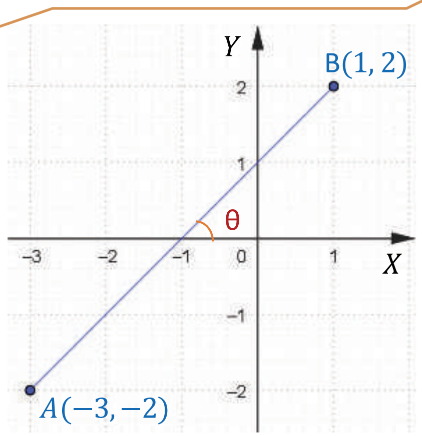
$$\Rightarrow d = \sqrt{10}$$

**Respuesta:** $\sqrt{10}$

**406.** La recta pasa por los puntos $A(-3,-2)$ y $B(1,2)$. Después de calcular el ángulo de inclinación con respecto al eje "$X$", ¿cuál es el suplemento de dicho ángulo?

a) 135° b) 45° c) 90° d) 150°

## Resolución




Denotamos la pendiente por $m_{AB}$, luego

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Como

$$A(-3,-2) \longrightarrow x_1 = -3,\ y_1 = -2$$
$$B(1,2) \longrightarrow x_2 = 1,\ y_2 = 2$$

Entonces

$$m_{AB} = \frac{2+2}{1+3} = \frac{4}{4} = 1$$
$$\Longrightarrow m_{AB} = 1$$

La pendiente es el ángulo de inclinación, entonces:

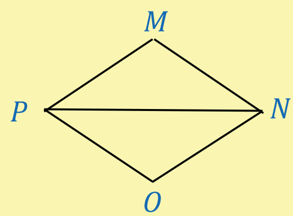
$$\tan\theta = m_{AB} \Longrightarrow \theta = \tan^{-1}(m_{AB}) = \tan^{-1}(1) = 45$$
$$\Longrightarrow \theta = 45^o$$

Suplemento del ángulo $\theta$ es:

$$\beta + 45^o = 180^o \Longrightarrow \beta = 180^o - 45^o = 135^o$$
$$\Longrightarrow \beta = 135^o$$

**Respuesta:** 135°

**407.** Hallar la medida del ángulo $4\angle NPO$, si $\angle PON = 142°$ y $NP$ es bisectriz del ángulo $\angle MPO$ y $\angle MNO$.




a) 100° b) 60° c) 76° d) 120°

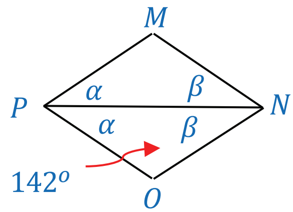
## Resolución

Como $NP$ es bisectriz del ángulo $\angle MPO$ y $\angle MNO$, como en la figura, entonces

$$\angle MPN = \angle OPN = \alpha$$

Además $\angle PON = 142^o$. Por la propiedad de ángulos adyacentes, se tiene:

$$2\alpha + 142^o = 180^o$$
$$\Rightarrow 2\alpha = 180^o - 142^o = 38^o$$
$$\Rightarrow \alpha = 19^o$$

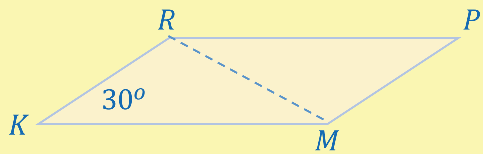



Es decir, ∠NPO=19º, luego

$$4\angle NPO = 4 \cdot 19^o = 76^o \quad \Rightarrow \quad 4\angle NPO = 76^o$$

**Respuesta:** 76°

**408.** En la figura dada a continuación, *KMPR* es un paralelogramo. Dado que $m\angle RKM = 30^o$, $KM = 11$ y $KR = 8$, calcular el área del triángulo $\Delta RPM$.

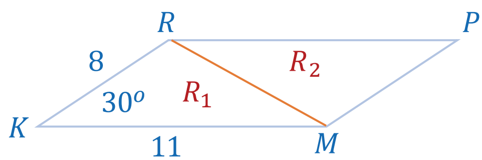



a) 12 u² b) 22 u² c) 10 u² d) 25 u²

## Resolución

Como a = KM = 11 y b = KR = 8 son lados adyacentes de $\theta = 30°$.

Observe que el paralelogramo se divide en dos regiones iguales:




Basta calcular el área de la región $R_1$, pues $A(R_1) = A(R_2)$, aplicando la fórmula de área siguiente:

$$A(R_1) = \frac{1}{2}ab \cdot \text{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad A(R_1) = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \text{sen}30°$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 22$$
$$\Rightarrow A(R_1) = 22 \text{ u}^2$$

Luego, el área del triángulo $\Delta RPM$ es:

**Respuesta:** 22 u²

**409.** Al determinar el polígono en el que se pueden trazar 5 diagonales desde un vértice, si se multiplica por 2, ¿cuál es el polígono que resulta?

a) Decágono b) Octágono c) Octadecágono d) Hexadecágono

## Resolución

Como dato se tiene el número de diagonales 5, es decir, d = 5. Luego, aplicando la fórmula del número de diagonales trazadas desde un mismo vértice:

$$d = n - 3 \implies n = d + 3 \qquad \text{por dato } d = 5$$
$$\implies n = 5 + 3 = 8$$
$$\implies n = 8$$

Luego por la condición: $2n = 2 \cdot 8 = 16$

El polígono que resulta es un hexadecágono.

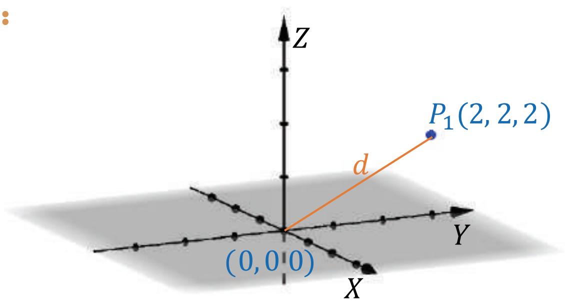
**Respuesta:** Hexadecágono

**410.** Dado el punto $P_1$ (2, 2, 2) en el espacio, ¿cuál es la distancia del punto $P_1$ al origen?

a) 12 b) $\sqrt{12}$ c) $\sqrt{13}$ d) 5,5

## Resolución

**Gráfica:**




Por la distancia entre dos puntos en el espacio:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$= \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12}$$
$$\implies d = \sqrt{12}$$

**Respuesta:** $\sqrt{12}$

**411.** Dados los puntos A(2, 2, 2) y B(-3, -2, 3). Hallar el valor de la siguiente suma: $S = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + 50$.

a) 20 b) 8 c) 15 d) -42

**Resolución**

La semirrecta o vector se calcula, de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-3,-2,3) - (2,2,2)$$
$$= (-3-2,-2-2,3-2) = (-5,-4,1)$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB} = (-5,-4,1)$$

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (2,2,2) - (-3,-2,3)$$
$$= (2+3,2+2,2-3) = (5,4,-1)$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{BA} = (5,4,-1)$$

Calculando el producto de vectores:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = (-5,-4,1) \cdot (5,4,-1) = (-5)\cdot 5 + (-4)\cdot 4 + 1\cdot(-1)$$
$$= -25 - 16 - 1 = -42$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -42$$

Luego

$$S = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + 50 = -42 + 50 = 8 \quad \Longrightarrow \quad S = 8$$

**Respuesta:** 8

**412.** Se sabe que el área total de un cubo es 12 $\text{cm}^2$. Hallar el perímetro del cubo.

a) $2\sqrt{2}$ cm b) $4\sqrt{2}$ cm c) $12\sqrt{2}$ cm d) 12 cm

**Resolución**

El área total del cubo es:

$$A_T = 12 \text{ cm}^2$$

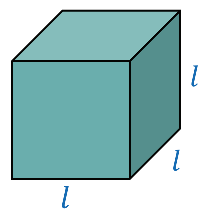
El cubo tiene 6 caras, entonces el área de cada cara del cubo será:

$$A_C = \frac{A_T}{6} = \frac{12}{6} = 2 \quad \Longrightarrow \quad A_C = 2 \text{ cm}^2$$

De donde, se obtiene el lado del cubo:

$$A_C = l^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad l = \sqrt{2} \text{ cm}$$

**Cubo**




El perímetro del cubo es:

$$P = 12\,l = 12\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad P = 12\sqrt{2} \text{ cm}$$

**Respuesta:** $12\sqrt{2}$ cm

**413.** La ecuación de la recta pasa por el punto $A(0, 2)$ y tiene pendiente $3$. Hallar el punto de intersección con el eje "$X$".

a) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ b) $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ c) $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ d) $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

**Datos**

$A(0, 2)$

$x_0 = 0, y_0 = 2$

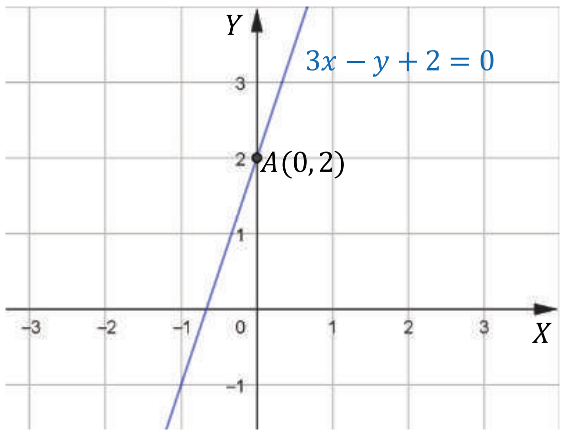
Pendiente:

$\mathrm{m} = 3$

**Resolución**

Reemplazando los datos en la ecuación punto-pendiente:

Gráfica de la ecuación general:




El punto de intersección con el eje "$X$", pasa cuando $y = 0$, entonces

$$3x - 0 + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow P(x, y) = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$$

**Respuesta:** $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

**414.** En la circunferencia de centro en el punto $C(2, \text{-}1)$ y radio de 2, hallar el punto de intersección con el eje "$Y$".

a) (-1, 0) b) (2, 0) c) (0, -1) d) (0, 0)

**Datos**

Centro: $C(2,\text{-}1)$

$h = 2, k = \text{-}1$

Radio: $r = 2$

**Resolución**

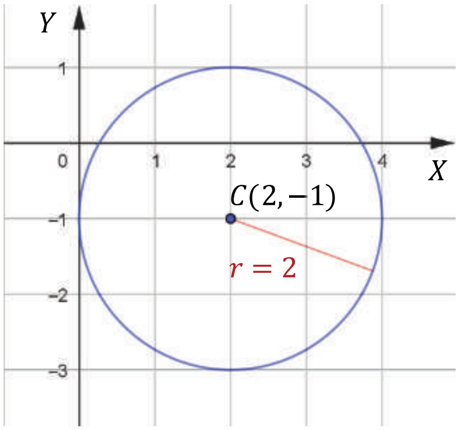
Aplicando la ecuación ordinaria de la circunferencia:

$$(x - h)^2 + (y - h)^2 = r^2$$

Sustituyendo centro y radio, se tiene:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=2^2 \Rightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1=4$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-4x+2y+1=0 \quad (1)$$

**Gráfica:**




La intersección de la circunferencia con el eje "$Y$", ocurre cuando $x=0$, entonces en (1) se tiene:

$$0^2+y^2-4\cdot 0+2y+1=0 \Rightarrow y^2+2y+1=0$$
$$\Rightarrow (y+1)(y+1)=0$$
$$\Rightarrow y=-1$$

De donde el punto de intersección es: (0, -1)

**Respuesta:** (0, -1)

**415.** En una circunferencia, el diámetro es el segmento formado por los puntos $A$(-3, 0) y $B$(1, -2), hallar la longitud de dicho segmento.

a) $2\sqrt{20}$ b) 20 c) $\sqrt{20}$ d) 10

**Resolución**

Aplicando la distancia entre dos puntos $A$(-3, 0) y $B$(1, -2), lo cual será el diámetro de la circunferencia:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$l=\sqrt{(1+3)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20} \quad \Rightarrow \quad l=\sqrt{20}$$

Lo cual es la longitud del diámetro.

**Respuesta:** $\sqrt{20}$

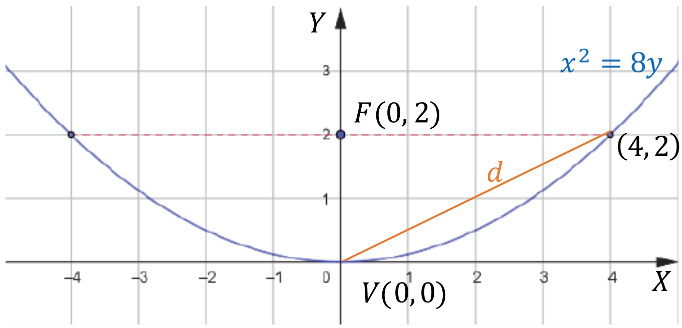
**416.** En la parábola de vértice en $V(0,0)$ y foco $F(0,2)$, graficar y determinar la distancia del punto $(4,2)$ al vértice.

a) $\sqrt{20}$ b) $15$ c) $2\sqrt{20}$ d) $8$

### Resolución

Como $F(0,2)$, se identifica el parámetro $p = 2>0$ y la parábola se abre hacia arriba, al sustituir en la ecuación canónica, se tiene:

$$x^2 = 4py \implies x^2 = 4 \cdot 2y = 8y \implies x^2 = 8y$$




La distancia entre $V(0,0)$ y $(4,2)$ es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$\implies d = \sqrt{20}$$

**Respuesta:** $\sqrt{20}$

**417.** Dada la ecuación

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

Graficar la elipse, ¿cuál es la longitud del origen a uno de los focos?

a) $2$ b) $4$ c) $-4$ d) $-5$

### Resolución

Transformando la ecuación a su forma ordinaria, es decir:

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \implies \frac{9}{225}x^2 + \frac{25}{225}y^2 = \frac{225}{225}$$

$$\implies \frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$$

$$\implies \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad (1)$$

Como el denominador mayor se encuentre bajo la variable $x$, corresponde a una elipse horizontal, luego de (1), se tiene:

$$a^2 = 25, \qquad b^2 = 9 \quad \rightarrow \quad a = 5, b = 3$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \quad \rightarrow \quad c = 4$$

Elementos de elipse horizontal

Centro: C(0,0)

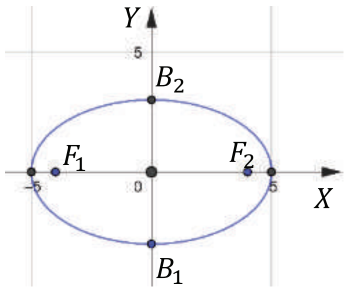
Vértices:

$V(\pm a, 0) \rightarrow V_1\ (-5, 0),\ V_2(5, 0)$

Focos:

$F(\pm c, 0) \rightarrow F_1(-4, 0),\ F_2(4, 0)$

**Gráfica:**




Extremos del eje menor:

$B(0,\ \pm b) \rightarrow B_1(0,\ -3),\ B_2(0, 3)$

Lado recto:

$$LR = \frac{2b^2}{a} \rightarrow LR = \frac{18}{5}$$

Excentricidad:

$$e = \frac{c}{a}\ (e < 1) \rightarrow e = \frac{4}{5}$$

De la gráfica, la longitud del origen al foco $F_1$ es 4, pues

$$F_1(-4,\ 0) \longrightarrow l = |-4| = 4 \implies l = 4.$$

**Respuesta:** 4

**418.** La ecuación de la hipérbola cuyo centro está en el origen y su eje transverso sobre el eje "$X$" con excentricidad $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$ y pasa por el punto $(2, 1)$. ¿Cuál es el termino independiente de la ecuación general de la hipérbola?

a) $-2$ b) $-4$ c) $-6$ d) $-8$

**Datos**

$C(0,0)$: centro

$P(2,1)$: punto

$e = \frac{\sqrt{6}}{2}$: excentricidad

**Resolución**

La ecuación buscada será de la forma:

$$\mathcal{H}: \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Como pasa por el punto $P(2, 1)$, entonces

$$(2,1) \in \mathcal{H}: \ \frac{2^2}{a^2} - \frac{1^2}{b^2} = 1 \implies \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Por la relación Pitagórica, se tiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 \implies c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Por otro lado, de la excentricidad:

$$e = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \implies \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Elevando al cuadrado, se tiene:

$$\frac{6}{4} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \Rightarrow 6a^2 = 4a^2 + 4b^2 \implies a^2 = 2b^2 \qquad (3)$$

Luego, (3) en la ecuación (2):

$$\frac{4}{2b^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \implies \frac{4-2}{2b^2} = 1 \implies b^2 = 1$$

$$\overset{(3)}{\implies} a^2 = 2$$

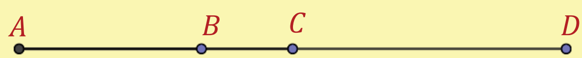
Sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1 \implies \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \implies x^2 - 2y^2 - 2 = 0$$

**Respuesta:** El termino independiente es -2

## Intermedio - Geometría

**419.** Se representan los puntos $A, B, C$ y $D$ colineales en la gráfica, tales que cumplen $AB = 4$, $AD = 12$ y $AB \cdot CD = AD \cdot BC$, hallar la longitud del segmento $BC$.




a) 3 b) 4 c) 9 d) 2

### Datos

$AB = 4$
$AD = 12$
$AB \cdot CD = AD \cdot BC$
$AC = ?$

### Resolución

Empleando adición de segmentos, en la gráfica se tiene:

$$AD = AB + BC + CD$$
$$\implies 12 = 4 + BC + CD \quad \text{por dato}$$
$$\implies BC + CD = 8 \qquad (1)$$

Por otro lado, como

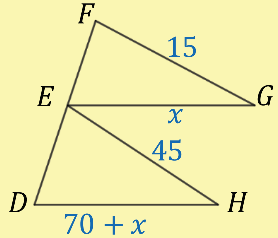
$$AB \cdot CD = AD \cdot BC \implies 4CD = 12BC \implies CD = 3BC \qquad (2)$$

Ahora reemplazando (2) en (1):

$$BC + 3BC = 8 \implies 4BC = 8 \implies BC = 2$$

**Respuesta:** 2

**420.** Calcule la longitud $DH$, si $EG \parallel DH$ en la siguiente figura:




a) 100 b) 50 c) 85 d) 105

## Resolución

Por el Teorema de Tales, como $EG \parallel DH$, entonces

$$\Delta DEH \sim \Delta EGF$$

Por semejanza de triángulos, la proporcionalidad se establece como:

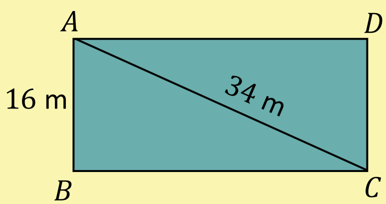
$$\frac{70+x}{x} = \frac{45}{15} \implies \frac{70+x}{x} = 3$$
$$\implies 70 + x = 3x$$
$$\implies 2x = 70$$
$$\implies x = 35$$

Luego

$$DH = 70 + x = 70 + 35 = 105 \implies DH = 105$$

**Respuesta:** 105

**421.** En la figura, el rectángulo $ABCD$ tiene longitud lateral $AB = 16$ m y una longitud diagonal $AC = 34$ m, el perímetro del rectángulo es:




a) 92 m b) 90 m c) 85 m d) 100 m

## Resolución

De la figura, el triángulo $\Delta ABC$ tiene un ángulo $\angle ABC = 90°$ y por el Teorema de Pitágoras, se tiene:

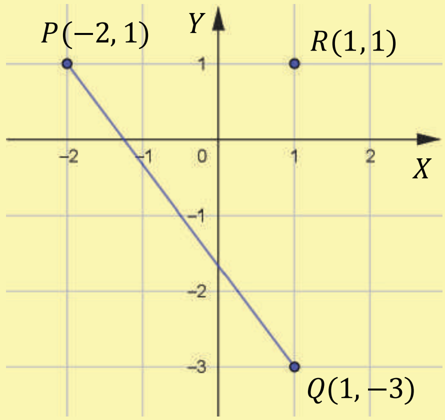
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \implies BC^2 = AC^2 - AB^2 = 34^2 - 16^2 = 900$$
$$\implies BC = \sqrt{900} = 30$$
$$\implies BC = 30$$

El perímetro del rectángulo es:

$$P = 2AB + 2BC = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 30 = 32 + 60 = 92$$
$$\implies P = 92 \text{ m}$$

**Respuesta:** 92 m

**422.** En la figura, un segmento une los puntos $P(\text{-}2, 1)$ y $Q(1,\text{-}3)$. ¿Cuál es la longitud de $PQ$?




a) 5 b) 4 c) 8 d) 12

## Resolución

Observe que, en la figura, al unir los puntos se genera un triángulo rectángulo $\Delta PQR$, con la hipotenusa $PQ$, además la longitud de los catetos es $PR = 3$ y $QR = 4$, entonces por Teorema de Pitágoras, se tiene:

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2 \implies PQ = \sqrt{PR^2 + QR^2}$$
$$\implies PQ = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$\implies PQ = 5$$

**Respuesta:** 5

**423.** El segmento de extremos A(2, 3) y B(8, 12) es dividido por el punto $P(a, b)$, tal que $AP = 3PB$. Hallar el valor de:

$$E = a + b - \frac{61}{4}$$

a) 4 b) 10 c) 1 d) 22

## Resolución

Como $AP = 3PB$, la razón es $r = 3$ y considerando los puntos $A(2, 3)$ y $B(8, 12)$ se obtiene las coordenadas de $P(a, b)$, es decir:

$$a = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{2 + 3 \cdot 8}{1 + 3} = \frac{26}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{26}{4}$$

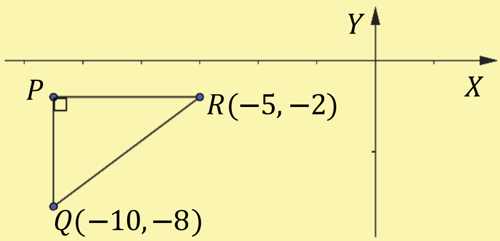
$$b = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{3 + 3 \cdot 12}{1 + 3} = \frac{39}{4} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{39}{4}$$

Luego:

$$E = a + b - \frac{61}{4} = \frac{26}{4} + \frac{39}{4} - \frac{61}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad E = 1$$

**Respuesta:** 1

**424.** En el triángulo $\Delta PQR$ que se muestra en la figura, el lado $PR$ es paralelo al eje "$X$" y el lado $PQ$ es paralelo al eje "$Y$", ¿cuáles son las coordenadas del punto $P$?




a) (-10,-2) b) (-5,-2) c) (-15,-2) d) (-8,2)

## Resolución

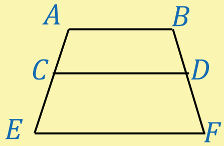
En la figura, el lado $PR$ es paralelo al eje "$X$", por lo que los puntos $P$ y $R$ están en la misma línea horizontal, entonces la ordenada de $R$ es igual a la ordenada de $P$, es decir, y = -2.

Por otro lado, el lado $PQ$ es paralelo al eje "Y", por lo que los puntos $P$ y $Q$ están en la misma línea vertical, entonces la abscisa de Q es igual a la abscisa de $P$, es decir, x = -10.

Por tanto, las coordenadas de $P$ son (-10, -2).

**Respuesta:** (-10, -2)

**425.** Sea el trapecio $ABFE$, sea $C$ y $D$ puntos medios de $AE$ y $BF$. Calcular el valor de $AB + CD + EF$, si $AB = x + 2$, $CD = x + 3$ y $EF = 15$ cm.




a) 24 cm b) 94 cm c) 42 cm d) 10 cm

## Resolución

Como datos se tiene:

$AB = x + 2, \; CD = x + 3$ y $EF = 15$ cm

Aplicando, la propiedad de "paralela media de un trapecio" se tiene:

$$CD = \frac{1}{2}(AB + EF)$$

Reemplazando datos:

$$x + 3 = \frac{1}{2}(x + 2 + 15)$$

Resolviendo para $x$, se obtiene

$$2x + 6 = x + 2 + 15 \quad \Rightarrow \quad x = 17 - 6 = 11$$

$$\Rightarrow \quad x = 11 \qquad (1)$$

Luego:

$$AB = x + 2 \overset{(1)}{\Rightarrow} AB = 11 + 2 = 13 \quad \Rightarrow \quad AB = 13 \text{ cm}$$

La suma de segmentos es:

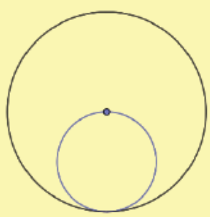
$$AB + CD + EF = 13 + (x + 3) + 15 = 13 + (11 + 3) + 15$$

$$= 13 + 14 + 15 = 42$$

$$\Rightarrow AB + CD + EF = 42$$

**Respuesta:** 42

**426.** Las circunferencias de la figura son tangentes y la menor pasa por el centro de la mayor. El área del círculo menor es 4 u². ¿Cuál es el área del círculo mayor?



a) 8 u² b) 12 u² c) 16 u² d) 10 u²

## Resolución

Sean:
$A_m$ área del círculo menor y $A_M$ área del círculo mayor; r radio del círculo menor y R radio del círculo mayor
Se sabe que el área del círculo menor es 4, es decir:

$$A_m = \pi r^2 \Rightarrow \pi r^2 = 4 \Rightarrow r^2 = \frac{4}{\pi} \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (1)$$

Lo cual es el radio del círculo menor.
El diámetro del círculo menor es el radio del círculo mayor, es decir:

$$R = 2r \overset{(1)}{\Rightarrow} R = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow R = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \quad (2)$$

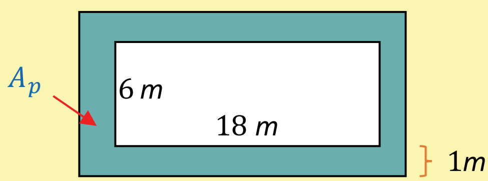
El área del círculo mayor es:

$$A_M = \pi R^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} A_M = \pi \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = \pi \cdot \frac{16}{\pi} = 16$$

$$\Rightarrow A_M = 16\ \mathrm{u}^2$$

**Respuesta:** $16\mathrm{u}^2$

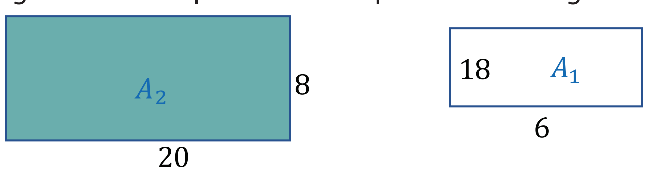
**427.** Una piscina rectangular mide 18 m por 6 m, hay un pasillo de 1 m de ancho alrededor del exterior de la piscina, como se ve en la región sombreada de la figura. Hallar el área del pasillo.




a) $52\ \mathrm{m}^2$ b) $40\ \mathrm{m}^2$ c) $65\ \mathrm{m}^2$ d) $70\ \mathrm{m}^2$

## Resolución

De la figura el área se puede descomponer en dos regiones:




Luego, el área del pasillo es:

$$A_p = A_2 - A_1 = 20 \cdot 8 - 6 \cdot 18 = 160 - 108 = 52$$

$$\Rightarrow A_p = 52\ \mathrm{m}^2$$

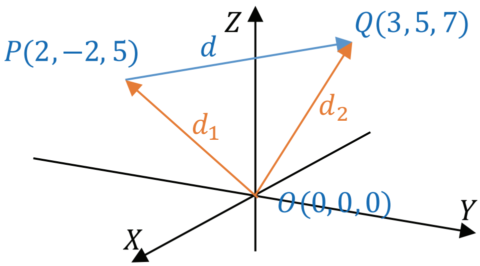
**Respuesta:** $52\mathrm{m}^2$

**428.** Los puntos $P(2, -2, 5)$ y $Q(3, 5, 7)$ están en el espacio tridimensional. Hallar el valor de $A = \sqrt{54} \cdot d$, donde $d = PQ$ es la distancia.

a) 24  b) 34  c) 54  d) 60

## Resolución

**Gráfica:**




La distancia entre los puntos $P(2, -2, 5)$ y $Q(3, 5, 7)$ es

$$d = PQ = \sqrt{(3-2)^2 + (5+2)^2 + (7-5)^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 49 + 4} = \sqrt{54}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{54} \qquad (1)$$

Luego

$$A = \sqrt{54} \cdot d \overset{(1)}{\Rightarrow} A = \sqrt{54} \cdot \sqrt{54} = 54 \Rightarrow A = 54$$

**Respuesta:** 54

**429.** En un prisma cuadrangular, si el área de la base es $16 \text{ cm}^2$ y la altura es $8$ cm. Hallar el perímetro.

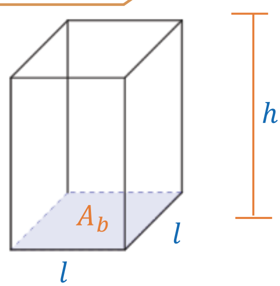
a) 64 cm  b) 40 cm  c) 85 cm  d) 50 cm

## Datos

$A_b = 16$ cm2
$h = 8$ cm

Área de la base
$A_b = l^2$

## Resolución




Cálculo del lado de la base:

$$A_b = l^2 = 16 \Rightarrow l = 4\ cm \qquad (1)$$

Luego, el perímetro es:

$$P = 4h + 8l \overset{(1)}{\Rightarrow} P = 4 \cdot 8 + 8 \cdot 4 = 32 + 32 = 64$$

$$\Rightarrow P = 64 \text{ cm}$$

**Respuesta:** 64 cm

**430.** Un octaedro regular de altura 3 cm y área total $4\sqrt{3}$ cm², calcule la suma de todas sus aristas.

a) $2\sqrt{2}$ cm  b) $12\sqrt{2}$ cm  c) 12 cm  d) 8 cm

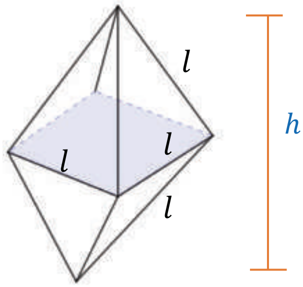
**Datos**

$h = 3$ cm

$A_T = 4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

$A_T = 2\sqrt{3}\,l^2$

**Resolución**




Por el dato y el área total del octaedro, se tiene:

$$2\sqrt{3}\,l^2 = 4\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad l^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{2} \quad (1)$$

La suma de todas sus aristas es:

$$S_A = 12\,l \quad \Rightarrow \quad S_A = 12 \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad S_A = 12\sqrt{2}\text{ cm}$$

**Respuesta:** $12\sqrt{2}$ cm

**431.** Determinar el valor de $k$ para que la recta $kx + (k - 1)\,y - 9 = 0$ sea perpendicular a la recta $4x + 3y + 5 = 0$.

a) 0  b) $\frac{3}{7}$  c) $\frac{7}{3}$  d) *Ninguno*

**Resolución**

Determinamos la pendiente de las rectas dadas:

$$\mathcal{L}_1 : kx + (k-1)y - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-1)y = -kx + 9$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{k}{(k-1)}x + \frac{9}{(k-1)} \quad \longrightarrow \quad m_1 = -\frac{k}{(k-1)}$$

$$\mathcal{L}_2 : \quad 4x + 3y + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \quad \longrightarrow \quad m_2 = -\frac{4}{3}$$

Como las rectas son perpendiculares, es decir:

$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{k}{k-1}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \quad 4k = -3(k-1)$$

$$\Rightarrow \quad 4k + 3k = 3$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{3}{7}$$

**Respuesta:** $\frac{3}{7}$

**432.** La ecuación de la circunferencia con centro en $C(2,\ 0)$, es tangente a la recta $x + 2y - 7 = 0$, hallar el punto de intersección entre la circunferencia y el eje "$X$".

a) $(2, 1)$ b) $(-4, 2)$ c) $(-1, 3)$ d) $(3, 2)$

### Resolución

La distancia del centro a la recta es el radio de la circunferencia.

$C(2,0)$ y $x + 2y - 7 = 0$

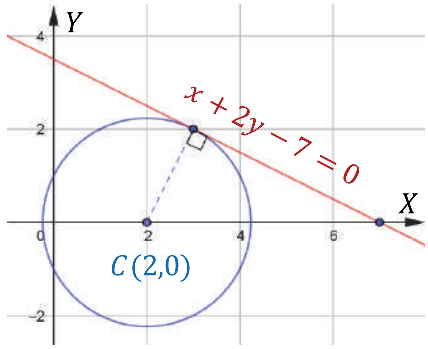
Donde:

$x_0 = 2, y_0 = 0;\ A = 1, B = 2, C = -7$

El radio $r = d$ es:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**Gráfica:**




Luego:

$$r = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad \Rightarrow r = \sqrt{5}$$

Luego, $C(2,\ 0)$ y $r = \sqrt{5}$, reemplazando en la ecuación ordinaria:

$$(x - h)^2 + (y - h)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 0)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 5$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (y - 2)^2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

En la segunda ecuación del sistema, se obtiene $x = 3$. Por tanto, el par ordenado buscado es

$$(x, y) = (3, 2)$$

**Respuesta:** $(3,\ 2)$

**433.** Hallar el valor de $k$ para que la recta $4x + 5y + k = 0$ forme, con los ejes coordenados, un triángulo rectángulo de área igual a $\frac{5}{2}$ u$^2$.

a) $\pm 25$ b) $\pm 15$ c) $\pm 10$ d) $-15$

### Resolución

Transformando la ecuación a la forma simétrica, es decir:

$$4x + 5y + k = 0 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{k}{4}} + \frac{y}{-\frac{k}{5}} = 1$$

De donde, $a = -\dfrac{k}{4} \quad \wedge \quad b = -\dfrac{k}{5}$

Como el área del triángulo es:

$$A = \frac{1}{2}|ab| \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{k}{4}\right)\left(-\frac{k}{5}\right)\right| \Rightarrow 5 = \frac{k^2}{20}$$

$$\Rightarrow k^2 = 100 \Rightarrow k = \pm 10$$

**Respuesta:** $\pm 10$

**434.** Un punto de intersección, entre la parábola $x - y^2 = 0$ y la recta de ecuación $x - y - 2 = 0$ es:

a) $(2, 1)$ b) $(1, -1)$ c) $(-1, 2)$ d) $(-1, 1)$

**Resolución**

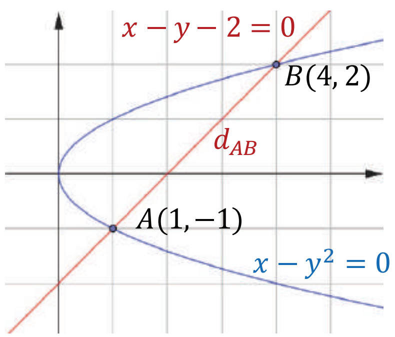
Cálculo de los puntos de intersección entre la parábola y la recta:

$$\begin{cases} x - y^2 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 & (1) \\ x = y + 2 & (2) \end{cases}$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2):

$$y^2 = y + 2 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow (y+1)(y-2) = 0$$

**Gráfica:**




$$\Rightarrow y = -1, \qquad y = 2$$

$$y = -1 \xrightarrow{(2)} x = -1 + 2 = 1$$
$$\rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, -1)$$

$$y = 2 \xrightarrow{(2)} x = 2 + 2 = 4$$
$$\rightarrow x = 4 \Rightarrow B(4, 2)$$

El punto de intersección, entre las opciones, es $(1, -1)$.

**Respuesta:** $(1, -1)$

**435.** En la ecuación de elipse con centro en $(3, 1)$, uno de los vértices es $(3, -1)$ y su excentricidad $e = \frac{1}{3}$, la suma de los ejes mayor y menor es:

a) 12 b) 17 c) 5 d) 10

**Resolución**

Tenemos, centro $C(3, 1)$ y vértice $V(3, -1)$, la excentricidad:

$$e = \frac{1}{3} = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad c = 1, a = 3$$

Por la relación de la elipse, se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

Sustituyendo datos:

$$b^2 = 3^2 - 1^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 1 = 8$$

$$\Rightarrow b^2 = 8$$

La suma de los ejes es:

$$S = 8 + 9 = 17 \Rightarrow S = 17$$

**Respuesta:** 17

**436.** La ecuación de la hipérbola con excentricidad $e = 4$, tiene focos que coinciden con los focos de la elipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Hallar el producto de lado mayor con el lado menor.

a) 35 b) 10 c) 15 d) 34

**Datos**

$e = 4$: excentricidad

$$e = \frac{c}{a} = 4 \rightarrow c = 4a$$

**Resolución**

La ecuación buscada será de la forma:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

De la elipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow a^2 = 25, b^2 = 9$$

Por la relación Pitagórica de la elipse, se tiene:

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow c = 4$$

Los focos son: $F(\pm c,0) \rightarrow F(\pm 4,0)$, entonces $c = 4$ y por dato, se tiene:

$$c = 4a \Rightarrow a = \frac{c}{2} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow a^2 = 1$$

Por la relación Pitagórica de la hipérbola, se tiene:

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15 \Rightarrow b^2 = 15$$

Luego, el producto de los lados mayor y menor es:

$$P = a^2 \cdot b^2 = 1 \cdot 15 \Rightarrow P = 15$$

**Respuesta:** 15

**437.** Aplicando el concepto de pendiente, se puede ver que los tres puntos $(a, 0)$,$(2a, -b)$ y $(-a, 2b)$ son:

a) Concurrentes b) Colineales c) No colineales d) Ninguna

## Resolución

Denotamos los puntos con $A(a, 0)$, $B(2a,-b)$ y $C(-a, 2b)$. Tres puntos son colineales si $m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$. Aplicando el concepto de pendiente entre dos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Luego

$$m_{AB} = \frac{-b-0}{2a-a} = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad m_{AB} = -\frac{b}{a}$$

$$m_{BC} = \frac{2b+b}{-a-2a} = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad m_{BC} = -\frac{b}{a}$$

$$m_{AC} = \frac{2b-0}{-a-a} = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad m_{AC} = -\frac{b}{a}$$

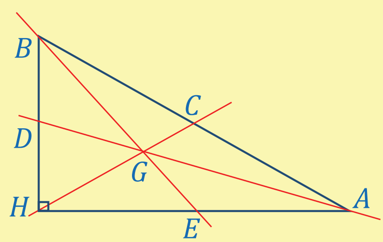
Entonces

$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC} = -\frac{b}{a}$$

Los puntos dados son colineales.

**Respuesta:** Colineales

**438.** En la figura dada, considerando que la distancia del ortocentro al baricentro en un triángulo rectángulo mide $\frac{25}{3}$ u. Determinar la longitud de $AB$.




a) 18 u b) 52 u c) 25 u d) 10 u

## Resolución

Sean $H$: ortocentro; $G$: baricentro $HG = \frac{25}{3}$ u

Ahora por la concurrencia de medianas:

$$HG = \frac{2}{3}HC \quad \Longrightarrow \quad HC = \frac{3}{2}HG$$

$$\Longrightarrow \quad HC = \frac{3}{2}\cdot\frac{25}{3} = \frac{25}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad HC = \frac{25}{2} \qquad (3)$$

En un triángulo rectángulo, la distancia del ortocentro $H$ al circuncentro $C$ es la mitad de la longitud de la hipotenusa $AB$, es decir

$$HC = \frac{AB}{2} \overset{(3)}{\Longrightarrow} AB = 2\cdot\frac{25}{2} = 25$$

$$\Longrightarrow \quad AB = 25$$

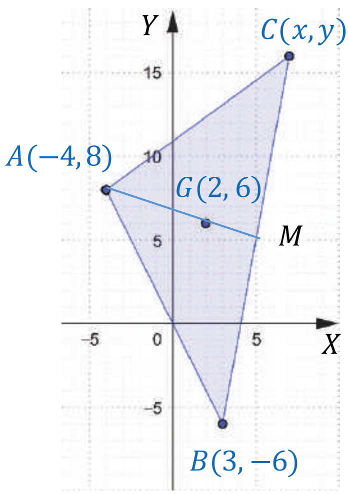
**Respuesta:** 25u

**439.** Sabiendo que las coordenadas de dos vértices de un triángulo son $A(-4, 8)$, $B(3,-6)$ y que el centro de gravedad es $G(2, 6)$. Determinar las coordenadas del tercer vértice.

a) $(6,16)$ b) $(7,15)$ c) $(5,15)$ d) $(7,16)$

## Resolución

### Gráfica




Sea $M$ punto medio de $BC$. La razón del segmento $AM$ es

$$r = \frac{AG}{GM} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2 \quad \Longrightarrow \quad r = 2$$

Aplicando la división de un segmento a una razón dada:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

Luego

$$G(2,6) = G(x,y) \quad \wedge \quad A(-4,8)$$

Entonces

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{-4+2a}{1+2} \\ 6 = \dfrac{8+2b}{1+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow M(5,5)$$

Como $M(a,b)$ es punto medio de $BC$, se tiene:

$$\begin{cases} 5 = \dfrac{x+3}{2} \\ 5 = \dfrac{y-6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 16 \end{cases} \Rightarrow C(7,16)$$

El tercer vértice está en (7,16).

**Respuesta:** (7,16)

**440.** Hallar el valor de $k$ tal que los puntos $A(1,4)$, $B(k,7)$ y $C(-3,-5)$ son colineales.

a) $k = 3$  b) $k = \dfrac{2}{3}$  c) $k = \dfrac{7}{3}$  d) $k = -\dfrac{7}{3}$

**Resolución**

Como $(1,4)$, $B(k,7)$ y $C(-3,-5)$ son colineales, se debe cumplir que sus pendientes sean iguales, es decir, $m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$. Aplicando el concepto de pendiente entre dos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Luego

$$m_{AB} = \frac{7-4}{k-1} = \frac{3}{k-1} \Rightarrow m_{AB} = \frac{3}{k-1}$$

$$m_{BC} = \frac{-5-7}{-3-k} = \frac{12}{3+k} \Rightarrow m_{BC} = \frac{12}{3+k}$$

$$m_{AC} = \frac{-5-4}{-3-1} = \frac{9}{4} \Rightarrow m_{AC} = \frac{9}{4}$$

Igualando las pendientes convenientes, se tiene:

$$m_{AC} = m_{AB} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{3}{k-1} \Rightarrow 9k - 9 = 12$$

$$\Rightarrow 9k = 21 \Rightarrow k = \frac{7}{3}$$

**Respuesta:** $\dfrac{7}{3}$

**441.** Un triángulo tiene vértices en $A(x_A, y_A)$, $B(-5, 0)$ y $C(-2, -1)$. Si las coordenadas de su baricentro son (2, 1), las coordenadas del vértice $A$ son:

a) (2, 1) b) (1, 4) c) (4, 1) d) (-1, -4)

## Resolución

El baricentro es el centro de gravedad del triángulo, sus coordenadas se calculan mediante:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \qquad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Reemplazando los puntos y despejando las coordenadas pedidas:

$$-2 = \frac{x_A - 5 - 2}{3} \qquad 1 = \frac{y_A + 0 - 1}{3}$$

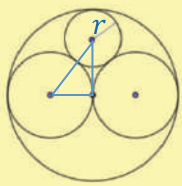
$$-6 = x_A - 7 \qquad 3 = y_A - 1$$

$$x_A = 1 \qquad y_A = 4$$

El vértice del punto $A(x_A, y_A)$ es $(1, 4)$.

**Respuesta:** $(1, 4)$

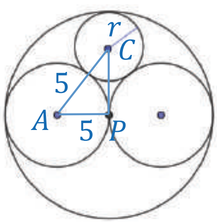
**442.** Dos círculos de radio 5 cm están inscritos en un círculo de radio 10 cm, como se muestra en la figura. Un círculo de radio $r$ es tangente a los tres círculos, calcular el perímetro del triángulo que se ve en la figura.




a) 10 cm b) 20 cm c) 30 cm d) 40 cm

## Resolución

Considerando la figura:




**Datos** de acuerdo de la figura se tiene:

$$AP = 5$$
$$AC = 5 + r$$
$$PC = 10 - r$$

El triángulo $\Delta APC$ es rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras

$$AC^2 = AP^2 + PC^2$$

Reemplazando datos se tiene:

$$(5-r)^2 = 5^2 + (10-r)^2 \implies 25 + 10r + r^2 = 25 + 100 - 20r + r^2$$

$$\implies 30r = 100 \implies r = \frac{10}{3}\text{ cm}$$

Ahora:

$$AP = 5$$

$$AC = 5 + r \implies AC = 5 + \frac{10}{3} = \frac{25}{3} \implies AC = \frac{25}{3}$$

$$PC = 10 - r \implies PC = 10 - \frac{10}{3} = \frac{20}{3} \implies PC = \frac{20}{3}$$

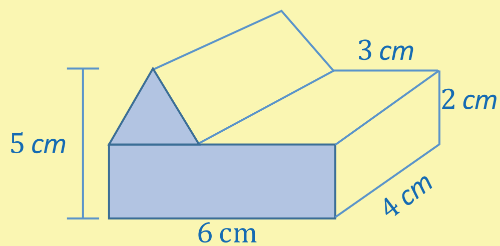
El perímetro del triangulo $\Delta APC$ es:

$$P = AP + PC + AC = 5 + \frac{20}{3} + \frac{25}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

$$\implies P = 20\text{ cm}$$

**Respuesta:** $20$ cm

**443.** Se coloca un prisma triangular sobre un prisma rectangular, como se muestra en la figura. El volumen de la estructura combinada en $cm^3$ es:




a) 66 b) 85 c) 48 d) 36

## Resolución

Sea

$V_p$: volumen de prisma y $V_\Delta$: volumen de prisma triangular

El volumen del prisma rectangular rectangular es:

$$V_p = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48 \implies V_p = 48\text{ cm}^3 \qquad (1)$$

Cálculo de volumen del prisma triangular: la cara triangular tiene una base de $6 - 3 = 3$ cm de largo y esta misma cara triangular tiene una altura perpendicular de $5 - 2 = 3$ cm, ya que la altura del prisma rectactangular es 2 cm.

Por tanto, la cara triangular tiene un área de:

$$A_\Delta = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} \implies A_\Delta = \frac{9}{2}\text{ cm}^2 \qquad (2)$$

Como la longitud del prisma triangular es 4 cm, entonces su volumen es:

$$V_\Delta = A_\Delta \cdot 4 \overset{(2)}{\Longrightarrow} V_\Delta = \frac{9}{2} \cdot 4 = \frac{36}{2} = 18 \quad \Longrightarrow \quad V_\Delta = 18\ \text{cm}^3 \qquad (3)$$

Así:

$$V = V_p + V_\Delta = 48 + 18 = 66 \quad \Longrightarrow \quad V = 66\ \text{cm}^3$$

**Respuesta:** $66\ \text{cm}^3$

**444.** Calcular la diagonal del cubo de 5 cm de arista, que está inscrita en la esfera.

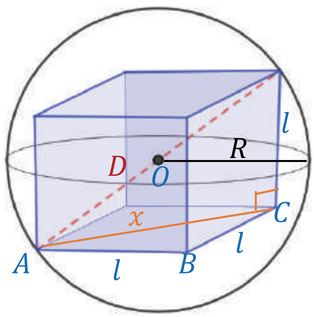
a) $\sqrt{75}$ b) $5\sqrt{75}$ c) 75 d) $\sqrt{50}$

**Datos**

Lado del cubo:
$l = 5$ cm
$D$: diagonal del cubo
$R$: radio de la esfera

**Resolución**

Cubo inscrito en la esfera:




De la figura, aplicando el Teorema de Pitágoras, se tiene:

$$x = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

$$\Longrightarrow x = \sqrt{50}$$

Diámetro de la esfera:

$$D = \sqrt{x^2 + \ell^2} = \sqrt{\left(\sqrt{50}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{75}$$

$$\Longrightarrow D = \sqrt{75}$$

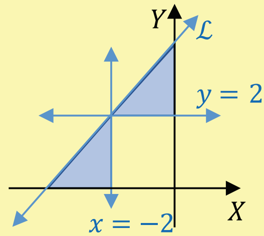
El diámetro de la esfera es la diagonal del cubo.

**Respuesta:** $\sqrt{75}$

**445.** Dada la figura, determine el área de la región sombreada si se sabe que los triángulos sombreados tienen áreas iguales.

a) $a$ - 2 b) b - 2 c) $2(a - 2)$

d) $2(a + 2)$




### Resolución

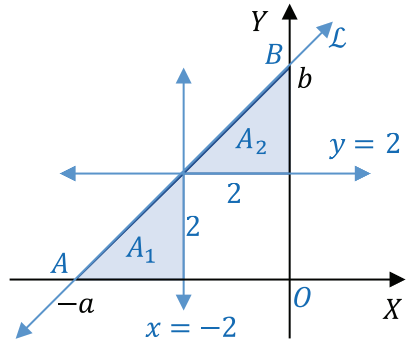
En la figura, la recta $\mathcal{L}$ intersecta a los ejes en -$a$ y $b$, es conveniente usar la ecuación simétrica correspondiente:

$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (1)$$

Área de los triángulos sombreados:

$$A_1 = \frac{1}{2}(a-2)\cdot 2 = a - 2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\cdot 2(b-2) = b - 2$$




Como los triángulos sombreados tienen iguales áreas, es decir:

$$A_1 = A_2 \implies a - 2 = b - 2 \implies a = b \qquad (2)$$

Luego, el área de la región sombreada es:

$$A_S = 2A_1 \implies A_S = 2(a-2) \;\vee\; A_S = 2(b-2)$$

**Respuesta:** $2(a - 2)$

**446.** Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $2x - 3y + 6 = 0$, $3x + y - 2 = 0$ y $x + 4y + 3 = 0$. Uno de los ángulos internos es:

a) 60° b) 47,7° c) 21,5° d) 75°

### Resolución

Llevamos cada una de las ecuaciones a la forma pendiente-ordenada:

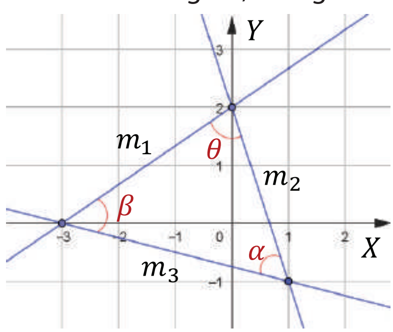
$$y = mx + b$$

Ecuación con pendiente $m_1$:

$$2x - 3y + 6 = 0 \implies y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$\longrightarrow \quad m_1 = \frac{2}{3}$$

Trazado de la figura, triángulo



Ecuación con pendiente $m_2$:

$$3x + y - 2 = 0 \Longrightarrow y = -3x + 2 \quad \longrightarrow \quad m_2 = -3$$

Ecuación con pendiente $m_3$:

$$x + 4y + 3 = 0 \Longrightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \quad \longrightarrow \quad m_3 = -\frac{1}{4}$$

Ahora, para determinar ángulos, aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \qquad m_2 m_1 \neq -1$$

Para $\theta = \angle(m_1, m_2)$:

$$\tan\theta = \frac{-3 - \frac{2}{3}}{1 + (-3)\cdot\frac{2}{3}} = \frac{11}{3} \Longrightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{11}{3}\right) \approx 74{,}8$$

$$\Longrightarrow \theta = 74{,}8^o$$

Para $\beta = \angle(m_1, m_3)$:

$$\tan\beta = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{11}{10} \Longrightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{11}{10}\right) \approx 47{,}7$$

$$\Longrightarrow \beta = 47{,}7^o$$

Para $\alpha = \angle(m_2, m_3)$:

$$\tan\alpha = \frac{-\frac{1}{4} - (-3)}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-3)} = \frac{11}{7} \Longrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{11}{7}\right) \approx 57{,}5$$

$$\Longrightarrow \alpha = 57{,}5^o$$

**Respuesta:** 47,7°

**447.** Dadas las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ cuyas ecuaciones son:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0 \qquad \wedge \qquad x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$$

Hallar punto de intersección en el eje "Y" entre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

a) $(-1, -2)$ b) $(0, -2)$ c) $(1, 1)$ d) $(0, 0)$

**Resolución**

Sean las circunferencias

$$\mathcal{C}_1:\ x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$$

$$\mathcal{C}_2:\ x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$$

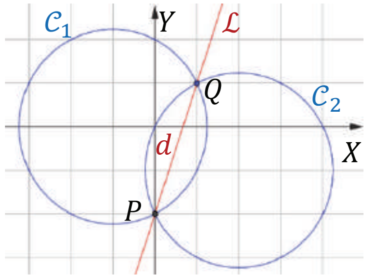
Luego

$$\begin{cases} x^2+y^2=-2x+4 & (1)\\ x^2+y^2=4x-2y & (2)\end{cases}$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2), se tiene:

$$-2x+4=4x-2y$$
$$\Longrightarrow\ -2x-4x+2y+4=0$$
$$\Longrightarrow\ 3x-y-2=0 \qquad (3)$$

**Gráfica**




Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-4=0\\ 3x-y-2=0\end{cases} \Longrightarrow\ 10x^2-10x=0 \Longrightarrow\ 10x(x-1)=0$$
$$\Longrightarrow\ x=0, \qquad x=1$$

Si $x=0 \xrightarrow{(3)} 3\cdot 0-y-2=0 \Longrightarrow\ y=-2$

La intersección de las tres curvas en eje "$Y$" es (0, -2).

**Respuesta:** (0, -2)

**448.** La ecuación de una familia de parábolas es $y=ax^2+bx+c$. Tres parábolas pasan por los puntos $A$(-6, -1), $B$(-1, 4) y $C$(2, 3), respectivamente. Hallar el valor de $a+b+c$.

a) $\dfrac{7}{3}$ b) $\dfrac{9}{3}$ c) $\dfrac{11}{3}$ d) $\dfrac{13}{3}$

**Resolución**

$$\mathcal{P}:\quad y=ax^2+bx+c$$

Reemplazando los puntos y se determinan las constantes $a$,$b$ y $c$.

$$(-6,-1)\in\mathcal{P}:\quad -1=a(-6)^2+b(-6)+c$$
$$\Longrightarrow\ 36a-6b+c=-1 \qquad (1)$$
$$(-1,4)\in\mathcal{P}:\quad 4=a(-1)^2+b(-1)+c$$
$$\Longrightarrow\ a-b+c=4 \qquad (2)$$
$$(2,3)\in\mathcal{P}:\ 3=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c$$
$$\Longrightarrow\ 4a+2b+c=3 \qquad (3)$$

Restando (1) y (2), (2) y (3), se obtiene:

$$7a-b=-1 \qquad (4)$$
$$-3a-3b=1 \qquad (5)$$

Resolviendo (4) y (5):

$$a=-\frac{1}{6} \quad \wedge \quad b=-\frac{1}{6} \overset{(2)}{\Longrightarrow} c=4$$

$$a+b+c=-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+4=\frac{11}{3} \Longrightarrow\ a+b+c=\frac{11}{3}$$

**Respuesta:** $\dfrac{11}{3}$

**449.** En la siguiente ecuación general de la elipse:

$$36x^2+64y^2+180x-256y-95=0$$

Determinar la suma de coordenadas de su centro.

a) 5  b) $\frac{2}{3}$  c) $\frac{1}{2}$  d) $-\frac{1}{2}$

### Resolución

$$\mathcal{E}: \quad 36x^2+64y^2+180x-256y-95=0$$

Factorizando y completando cuadrados

$$36\underbrace{\left[x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]}_{T.C.P}-36\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+64\underbrace{(y^2-4y+4)}_{T.C.P}-64\cdot 4-95=0$$

$$\Rightarrow \quad 36\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+64(y-2)^2-225-256-95=0$$

$$\Rightarrow \quad 36\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+64(y-2)^2=576$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1 \quad \Rightarrow \quad C(h,k)=C\left(-\frac{5}{2},2\right)$$

Luego

$$h+k=-\frac{5}{2}+2=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad h+k=-\frac{1}{2}$$

**Respuesta:** $-\frac{1}{2}$

**450.** En la hipérbola, con vértices (3, -5) y (3, 1) cuyas asíntotas tienen ecuaciones $2x-y-8=0$, $2x+y-4=0$.
Determinar la suma de coordenadas de su centro.

a) 5  b) -1  c) 1  d) 0

### Resolución

El centro de la hipérbola es el punto de intersección de las asíntotas:

$$\begin{cases}2x-y-8=0\\2x+y-4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=2x-8\\y=-2x+4\end{cases} \Rightarrow \quad 2x-8=-2x+4$$

$$\Rightarrow x=3 \wedge y=-2 \Rightarrow C(3,-2)$$

Donde: $h=3$, $k=-2$, luego

$$h+k=3-2=1 \quad \Rightarrow \quad h+k=1$$

**Respuesta:** 1

## Geometría - Básico

**451.** Dados los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ colineales y consecutivos, si $BC$ - $AB = 10$ m y $DB = 30$ m, hallar la distancia entre los puntos medios de $AC$ y $BD$.

a) 10 b) 7 c) 15 d) -14

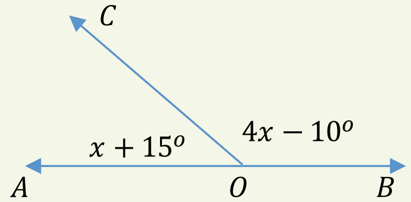
**Respuesta:** .......

**452.** Hallar el conjugado del ángulo $280°$

a) 50° b) 80° c) 95° d) 104°

**Respuesta:** .......

**453.** Determinar el valor de $x$ que se muestra en la siguiente figura:




a) 25° b) 30° c) 35° d) 23°

**Respuesta:** .......

**454.** Hallar la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son (-7 ,4) y (1,-11).

a) 12 b) 21 c) 13 d) 17

**Respuesta:** .......

**455.** Determinar las coordenadas del punto que equidista de los puntos fijos (5, 2), (2, 3) y (4, -1).

a) (1, 2) b) (1, 3) c) (3, 1) d) (3, 3)

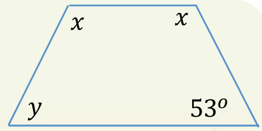
**Respuesta:** .......

**456.** Encuentra la pendiente de la recta que pasa por las coordenadas (1,3) y (7,1)

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

**Respuesta:** .......

**457.** Determinar la suma $x + y$, en la siguiente figura:




a) 127°  b) 53°  c) 180°  d) 210°

**Respuesta: .......**

**458.** Determinar cuál es el polígono en que se puede trazar 9 diagonales desde un vértice.

a) Dodecágono  b) Nonágono  c) Hexágono  d) Ninguno

**Respuesta: .......**

**459.** Determinar un polígono cuya suma de sus ángulos interiores sea 900º.

a) Tridecágono  b) Hexadecágono  c) Nonágono  d) Ninguno

**Respuesta: .......**

**460.** Hallar el punto $Q$ con el que coincide el extremo del vector $(13, 64, 5)$ si su punto inicial es $P(-8,12,-6)$.

a) $(1, 2, 3)$  b) $(3, 1, 3)$  c) $(5,76, -1)$  d) $(3, 3, 3)$

**Respuesta: .......**

**461.** Hallar la altura de un tetraedro si su volumen es $\frac{8}{3}$ cm$^3$.

a) $\frac{4}{3}$  b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$  d) $\frac{1}{3}$

**Respuesta: .......**

**462.** Hallar el punto $Q$ con el que coincide el extremo del vector $(13, 64, 5)$ si su punto inicial es $P(-8,12,-6)$.

a) 36  b) 40  c) 25  d) 30

**Respuesta: .......**

**463.** Hallar la ecuación simétrica de la recta, si tiene pendiente -2 y pasa por el punto (-1,4).

a) $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$  b) $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$  c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$  d) $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$

**Respuesta: .......**

**464.** Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en (-3, 3) y tangente a la recta $5x$ - $12y$ - 25 = 0

a) $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 14 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 3 = 0$
c) $x^2 + y^2 + y - x = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

**Respuesta:** .......

**465.** Graficar y determinar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y la ecuación del eje de la siguiente parábola: $3y^2 + 4x = 0$.

a) Foco: $F(-1{,}0)$, Directriz: $x = 1$, $LR = 8$, Eje: $y = 0$
b) Foco: $F(-1{,}0)$, Directriz: $x = 2$, $LR = 4$, Eje: $y = 0$
c) Foco: $F(-\frac{1}{3}, 0)$, Directriz: $3x = -1$, $LR = \frac{4}{3}$, Eje: $x = 0$
d) Foco: $F(-\frac{1}{3}, 0)$, Directriz: $3x = 1$, $LR = 4$, Eje: $x = 0$

**Respuesta:** .......

**466.** Hallar la ecuación de la parábola de vértice $V(0, 0)$ y foco $F(3, 0)$.

a) $y^2 - 6x + 6y + 14 = 0$
b) $y^2 - 12x = 0$
c) $y^2 + y - x = 0$
d) $y^2 - 2x = 0$

**Respuesta:** .......

**467.** Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son $(4, 0)$, $(-4, 0)$ y tiene focos en $(3, 0)$ y $(-3, 0)$.

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$
b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} = 1$
c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$
d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = -1$

**Respuesta:** .......

**468.** Encuentra la ecuación de la hipérbola que corta al punto $(2, 3)$, tiene su centro en el origen, su eje vertical esta en el eje "$Y$", una de sus asíntotas es la recta $2y - \sqrt{7}\,x = 0$.

a) $4y^2 - 5x^2 = 0$
b) $2y^2 - 7x^2 = 0$
c) $4y^2 - 7x^2 = 1$
d) $4y^2 - 7x^2 = 0$

**Respuesta:** .......

## Geometría - Intermedio

**469.** Sobre una recta se dan los puntos consecutivos $A, B, C$ y $D$; siendo $C$ punto medio de $AD$, si $BD - AB = 12$, hallar $BC$.

a) 11 b) 7 c) 6 d) 12

**Respuesta: .....**

**470.** Hallar el ángulo $\angle BAC$, si en el interior del triangulo $\Delta ABC$ se toma el punto $Q$. Se sabe $\angle BQC = 134^o$, $\angle ABQ = x - 16^o$ y $\angle ACQ = 90^o - x$.

a) $50^o$ b) $60^o$ c) $75^o$ d) $10^o$

**Respuesta: .....**

**471.** Un ángulo y su complemento están en razón 2: 3, ¿cuál es la medida del ángulo?

a) $27^o$ b) $36^o$ c) $45^o$ d) $53^o$

**Respuesta: .....**

**472.** Los siguientes puntos $(1, 3)$,$(-2, -3)$ y $(3, 7)$ son:

a) concurrentes b) aisladas c) colineales d) Ninguno

**Respuesta: .....**

**473.** Hallar las coordenadas del baricentro en el triángulo cuyos vértices son: $(-3, 1)$,$(2, 4)$ y $(6, -2)$.

a) $\left(\frac{5}{3}, 1\right)$ b) $\left(\frac{5}{3}, -1\right)$ c) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ d) $\left(-\frac{5}{3}, 1\right)$

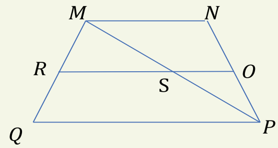
**Respuesta: .....**

**474.** Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos: $(6,0)$ y $(6,\sqrt{3})$.

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

**Respuesta: .....**

**475.** En la figura dada, $R$ y $O$ son puntos medios de $MQ$ y $NP$, hallar la longitud de $MN$, si $OS = 3x + 1$, $RS = 14$ y $QP = 9x + 1$.




a) 5 b) 12 c) 35 d) 20

**Respuesta: .....**

**476.** ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyo ángulo interior mide $140^o$?

a) Dodecágono b) Nonágono c) Hexágono d) Ninguno

**Respuesta: .....**

**477.** De un punto A se traza una recta tangente a la circunferencia con centro en $C_1$, la longitud de la tangente es $3$ cm y el segmento $AC_1 = 2\sqrt{7}$ cm, determinar el radio de la circunferencia.

a) 5 cm b) 8 cm c) 12 cm d) Ninguno

**Respuesta: .....**

**478.** Encuentra el volumen de un prisma cuya base es un hexágono regular de lado 3 cm y área lateral de $18\sqrt{3}$ cm$^2$.

a) $\dfrac{84}{3}$ b) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\dfrac{81}{2}$

**Respuesta: .....**

**479.** Encontrar el volumen de un cilindro circular recto si su área total es $32\pi$ cm y su altura mide 6 cm.

a) $\dfrac{4}{3}$ b) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ d) $24\pi$

**Respuesta: .....**

**480.** Calcular la suma de las aristas de un paralelepípedo rectangular, la superficie total 180 m$^2$, la diagonal de la base 10 m y la suma de las tres dimensiones.

a) 12 b) 17 c) 21 d) 23

**Respuesta: .....**

**481.** El área total de un cono circular recto es de 100 cm$^2$, la generatriz es el triple del diámetro de la base. Calcular el radio de la base.

a) 3 cm b) 5,5 cm c) 2,13 cm d) 4,5 cm

**Respuesta: .....**

**482.** Encuentra la ecuación de la recta con la mayor pendiente que pasa por el punto $(5, 4)$ y cuya suma de las coordenadas del origen es -3.

a) $2x - 5y + 5 = 0$ b) $2x - 5y + 10 = 0$
c) $2x - 5y - 10 = 0$ d) $2x - 5y + 1 = 0$

**Respuesta: .....**

**483.** Hallar el área del triángulo cuyos lados son la parte positiva del eje "$Y$" y las rectas $x - 2y + 6 = 0$, $2x - y = 0$.

a) $12\ u^2$ b) $3\ u^2$ c) $13\ u^2$ d) $17\ u^2$

**Respuesta: .....**

**484.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(7, -5)$ y es tangente a la recta $x - y - 4 = 0$ en el punto $(3, -1)$.

a) $(x-5)^2 - (y-3)^2 = 8$ b) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 64$
c) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$ d) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 8$

**Respuesta: .....**

**485.** La ecuación de una familia de parábolas es $y = ax^2 + bx$. Hallar la ecuación que pasa por los puntos $(-1, 5)$ y $(2, 8)$.

a) $4y^2 - 5x = 0$ b) $3x^2 - 2x = y$
c) $3x^2 - 2x = 2y$ d) $4y^2 - x = 0$

**Respuesta: .....**

**486.** Hallar la ecuación de la elipse que es tangente a las rectas $3x - 2y - 20 = 0$ y $x + 6y - 20 = 0$ si sus ejes coinciden con los ejes coordenados.

a) $x^2 + 4y^2 - 40 = 0$ b) $x^2 + 4y^2 - 30 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 40 = 0$ d) $x^2 + 3y^2 - 40 = 0$

**Respuesta: .....**

**487.** Determinar la ecuación de la hipérbola que corta al punto $(3, 4)$ y cuyas asíntotas son las rectas $x - y - 1 = 0$ y $x - 2 = 0$.

a) $4y^2 - 5x + x^2 + 4 = 0$ b) $x^2 - 3xy - 3x + 2y + 4 = 0$
c) $x^2 - xy - 3x + 2y + 4 = 0$ d) $4y^2 - 4x + x^2 + 9 = 0$

**Respuesta: .....**

## Geometría - Avanzado

**488.** Sobre una recta se dan los puntos consecutivos $A,B,C$ y $D$ tales que y $BC = \dfrac{CD}{2}$ $2AB + AD = 18$ cm. Hallar $AC$.

a) 15 b) 7 c) 10 d) 6

**Respuesta:** ......

**489.** La diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo es seis veces la medida del ángulo. Determinar el suplemento del complemento del ángulo.

a) 105° b) 85° c) 95° d) 104°

**Respuesta:** ......

**490.** Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética. Determinar el ángulo intermedio.

a) 45° b) 60° c) 50° d) 30°

**Respuesta:** ......

**491.** Hallar los valores de "$x$" de modo que el triángulo de vértices $(x, 3)$, $(3, 4)$ y $(5, 6)$ sea rectángulo.

a) 4; 6 b) 3; 8 c) 4; 8 d) -4; 8

**Respuesta:** ......

**492.** Determinar las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divida al segmento que determinan $P_1$ $(-5, 2)$ y $P_2$ $(1, 4)$ en la relación

a) (10, 2) b) (10, 7) c) (13, 1) d) (3, 10)

**Respuesta:** ......

**493.** Hallar el radio de un círculo inscrito en un triángulo cuya área es 22 $cm^2$ y su perímetro 20 cm.

a) 2,5 b) 3,6 c) 2,2 d) 5,3

**Respuesta:** ......

**494.** Los catetos de un triángulo rectángulo son 4 y 3 entre sí. Determinar la longitud de la hipotenusa si el área es 24 $cm^2$.

a) 25 b) 10 c) 20 d) 15

**Respuesta:** ......

**495.** En un prisma recto de base cuadrada se encuentra inscrito un cilindro. Determinar la relación entre área lateral y su volumen.

a) $\frac{3}{\pi}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $2\pi$ d) $\frac{4}{\pi}$

**Respuesta: ......**

**496.** Hallar el valor de $k$ para que las rectas $kx + (k - 1)y - 18 = 0$, $4x + 3y + 7 = 0$, sean paralelas.

a) 3 b) 4 c) 5 d) 9

**Respuesta: ......**

**497.** Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es la cuerda común a las circunferencias $x^2 + y^2 - 18x - 16y + 45 = 0$ y $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 27 = 0$.

a) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 20$ b) $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$
c) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$ d) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 16$

**Respuesta: ......**

**498.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el vértice de la parábola $y^2 - 6ax - 6y + 9 - 12a^2 = 0$ y es paralela a la cuerda focal $6x + y - 9 = 0$.

a) $-6x + 6y + 14 = 0$ b) $6x + y - 27 = 0$
c) $y - x = 0$ d) $y - 2x = 0$

**Respuesta: ......**

**499.** Encuentra la ecuación de la elipse cuyos focos y vértices son los mismos que los de las parábolas $y^2 + 4x - 12 = 0$ y $y^2 - 4x - 12 = 0$.

a) $5x^2 + 3y^2 - 45 = 0$ b) $5x^2 + 3y^2 - 25 = 0$
c) $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$ d) $5x^2 + 9y^2 - 55 = 0$

**Respuesta: ......**

**500.** Hallar la ecuación de la hipérbola de excentricidad $e = 2$, si los focos de una hipérbola coinciden con los focos de la elipse $25x^2 + 9y^2 = 225$.

a) $y^2 - x^2 + 6y + 14 = 0$ b) $y^2 - 3x^2 - 12 = 0$
c) $y^2 + y - x^2 = 0$ d) $3y^2 - x^2 - 12 = 0$

**Respuesta: ......**

# TRIGONOMETRÍA

**Sistemas de medición de ángulos y Longitudes de arco**

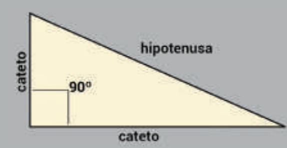
**1**

Hay diferentes formas para medir los ángulos, cada uno basado en una unidad de medición, los más aplicados son el grado sexagesimal y radián.
La longitud de arco es la medida de la distancia a lo largo de una curva o lineal.

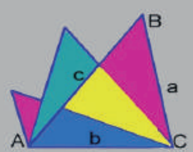
Son relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo que determinan sus ángulos de los cuales hay tres razones trigonométricas comunes: seno, coseno y tangente. A partir de ellos se deducen los de más relaciones trigonométricas.

**2**

**Razones trigonométricas**




**Triángulos rectángulos y oblicuángulos**




**3**

Un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto, los lados se llaman catetos y el lado más largo es la hipotenusa, mientras un triángulo oblicuángulo tiene lados diferentes y sus ángulos son agudos y distintos. Los cuales son muy importantes en el desarrollo de las aplicaciones en la ingeniería y tecnología.

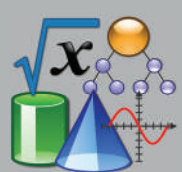
Es una igualdad que vincula las funciones trigonométricas como: seno, coseno, tangente, cotangente, cosecante y secante. Un ejemplo importante es la identidad pitagórica:

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

**4**

**Identidades trigonométricas**


**Funciones trigonométricas**



**5**

Se definen por la aplicación de una razón trigonométrica, cuyo argumento o variable independiente es un ángulo. Estas funciones son periódicas, es decir, la oscilación de funciones se repite en intervalos definidos. Para visualizar las graficas de funciones se representan en el plano cartesiano.

Es una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas, donde las incógnitas son los ángulos en las que están definidas la funciones.
Tienen infinitas soluciones y por lo general se determinan las soluciones principales que están en el intervalo de 0 a 2π, es decir, 0° a 360°.

**6**

**Ecuaciones trigonométricas**

# Usos y aplicaciones en la vida cotidiana

En nuestro entorno es común ver el movimiento de las manecillas de un reloj de pared analógico lo cual el minutero y el horario forman un cierto ángulo de rotación.

*Fuente: Yandex*

*Fuente: Instituto T. Simón Bolívar – Tarija*

La razón trigonométrica se aplica en objetos de forma rectangular, por ejemplo, si conociendo la distancia con respecto de la base de un edifico y el ángulo de elevación, se puede calcular la altura del edificio.

El uso de los triángulos rectángulos y oblicuángulos se pueden aplicar en la medición de lados o ángulos en los techos de viviendas, pirámides, edificios, puentes, plazas de forma triangular, etc.

*Fuente: Plaza Triangular San Martin La Paz.*

*Fuente: Neurochispas*

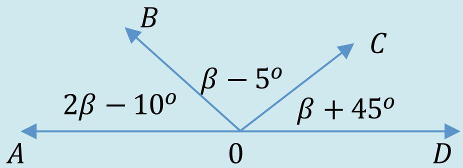
Las funciones trigonométricas tienen numerosas aplicaciones en la ingeniería, arquitectura y ciencia. Por ejemplo, en la música, los ingenieros de sonido necesitan la comprensión de funciones trigonométricas.

La ecuación trigonométrica aparece en física, por ejemplo, para calcular que un proyectil o balón de fútbol que llegue a una cierta distancia, se aplica la ecuación física de distancia máxima.

*Fuente: Artículos destacados – Deporte*

## Sistemas de medición de ángulos y longitudes de arco

**501.** Calcular $\beta$ en el sistema sexagesimal, en el siguiente gráfico:




### Resolución

De la figura, los ángulos $\angle DOC = \beta + 45°$,$\angle COB = \beta - 5°$ y $\angle BOA = 2\beta - 10°$ son suplementarios, entonces

$$\angle DOC + \angle COB + \angle BOA = 180^o$$

$$\Longrightarrow \beta + 45^o + \beta - 5^o + 2\beta - 10^o = 180^o$$

$$\Longrightarrow 4\beta + 30^o = 180^o$$

$$\Longrightarrow 4\beta = 150^o$$

$$\Longrightarrow \beta = 37{,}5^o$$

**Respuesta**

El valor del ángulo $\beta$ es 37,5°.

**502.** Convertir:

a) 60° a radianes b) 120° a radianes

### Resolución

Se hace la conversión de acuerdo a la relación de sistemas angulares.

a) 60° a radianes

$$60^o = 60 \cdot 1^o = 60 \cdot \left(\frac{\pi}{180}\text{ rad}\right) = \frac{\pi}{3}\text{ rad}$$

$$\Longrightarrow 60^o = \frac{\pi}{3}\text{ rad}$$

b) 120° a radianes

$$120^o = 120 \cdot 1^o = 120 \cdot \left(\frac{\pi}{180}\text{ rad}\right) = \frac{2\pi}{3}\text{ rad}$$

$$\Longrightarrow 120^o = \frac{2\pi}{3}\text{ rad}$$

**Relación de sistemas**

$$180^o = \pi\text{ rad}$$

$$1^o = \frac{\pi}{180}\text{ rad}$$

$$1\text{ rad} = \frac{180}{\pi}$$

$$1\text{ vuelta} = 360^o = 2\pi\text{ rad}$$

**Respuesta**

Las conversiones de sexagesimales a radianes son: $\frac{\pi}{3}\text{ rad} \wedge \frac{2\pi}{3}\text{ rad}$

**503.** Encuentre la medida exacta del ángulo en grados:

a) $\dfrac{2\pi}{3}$ rad  b) $\dfrac{3\pi}{4}$ rad  c) $\dfrac{11\pi}{6}$ rad

## Resolución

$$\frac{2\pi}{3}\text{ rad} = \frac{2\pi}{3}\cdot(1\text{ rad}) = \frac{2\pi}{3}\cdot\left(\frac{180^o}{\pi}\right) = \frac{360^o}{3} = 120^o$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{3}\text{ rad} = 120^o$$

$$\frac{3\pi}{4}\text{ rad} = \frac{3\pi}{4}\cdot(1\text{ rad}) = \frac{3\pi}{4}\cdot\left(\frac{180^o}{\pi}\right) = \frac{540^o}{4} = 135^o$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4}\text{ rad} = 135^o$$

$$\frac{11\pi}{6}\text{ rad} = \frac{11\pi}{6}\cdot(1\text{ rad}) = \frac{11\pi}{6}\cdot\left(\frac{180^o}{\pi}\right) = \frac{1980^o}{6} = 330^o$$

$$\Rightarrow \frac{11\pi}{6}\text{ rad} = 330^o$$

**Respuesta**

Las conversiones de radianes a grados son: 120º, 135º y 330º

**504.** Aproximar $\theta = 2$ rad en grados, minutos y segundos.

**Relación de grados minutos y segundos**

$$1^o = 60' = 3600'' \;;\; 1' = 60''$$

**Relación entre grados sexagesimales y radianes**

$$180^o = \pi\text{ rad} \;;\quad 1^0 = \frac{\pi}{180}\text{ rad}$$

$$1\text{ rad} = \frac{180^o}{\pi}$$

## Resolución

Aplicando las relaciones de grados, minutos, segundos y radianes.

$$2\text{ rad} = 2\,(1\text{ rad}) = 2\left(\frac{180^o}{\pi}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\approx 114{,}5916^o\\
&= 114^o + (0{,}5916)(1^o)\\
&= 114^o + (0{,}5916)(60')\\
&= 114^o + 35{,}50'\\
&= 114^o + 35' + (0{,}50)(1')\\
&= 114^o 35' + (0{,}50)(60'')\\
&= 114^o 35' + 30''\\
&= 114^o 35' 30''
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 2\text{ rad} \approx 114^o 35' 30''$$

**Respuesta**

La aproximación es 114° 35' 30''.

**505.** Calcular $\theta$ en el sistema sexagesimal $\theta = 80^o + 400^g + \pi$ rad.

**Resolución**

Por la relación de grados centesimales, radiales y sexagesimales.

$$\theta = 80^o + 400^g + \pi \text{ rad}$$
$$= 80^o + 2\pi \text{ rad} + \pi \text{ rad}$$
$$= 80^o + 360^o + 180^o = 620^o$$
$$\Longrightarrow \quad \theta = 620^o$$

**Grados centesimales y radianes**

$1 \text{ vuelta} = 400^g = 2\pi \text{ rad}$

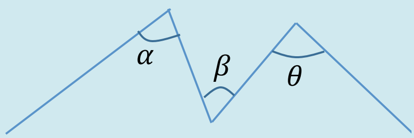
$2\pi \text{ rad} = 360^o$

$\pi \text{ rad} = 180^o$

**Respuesta**

El valor de $\theta$ en sexagesimal es 620°.

**506.** Si $\alpha = 60°$, $\theta = 75°$, $\beta = 45°$ como se muestra en la siguiente figura: hallar $S = \alpha + \beta + \theta$ en radianes.




**Resolución**

Como $\alpha = 60°$, $\theta = 75°$, $\beta = 45°$, entonces

$$S = \alpha + \beta + \theta$$
$$= 60^o + 75^o + 45^o = 180^o = \pi \text{ rad}$$
$$\Longrightarrow \quad \theta = \pi \text{ rad}$$

**Respuesta**

La suma de ángulos es $\pi$ rad.

**507.** Reducir la siguiente expresión:

$$E = \frac{1^o}{1'} - \frac{1^g}{1^m} + \frac{1'}{1''}$$

**Resolución**

Aplicando las equivalencias de sistema de medidas, es decir:

**Equivalencias**

$1^o = 60'$; $1' = 60''$

$1^g = 100^m$; $1^m = 100^g$

$1^m = 100^s$

$$E=\frac{1^o}{1'}-\frac{1^g}{1^m}+\frac{1'}{1''}$$
$$=\frac{60'}{1'}-\frac{100^m}{1^m}+\frac{60''}{1''}$$
$$=60-100+60=120-100$$
$$=20$$

**Respuesta**
La expresión reducida es 20.

**508.** Reducir la siguiente expresión:

$$A=\frac{2^o20'}{14'}+\frac{3^g10^m}{5^m}$$

**Sistema sexagesimal**

$$\theta=a^ob'c''$$
$$=a^o+b'+c''$$

**Sistema centesimal**

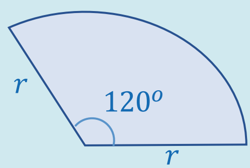
$$\theta=a^gb^mc^s$$
$$=a^g+b^m+c^s$$

**Resolución**
Aplicando las equivalencias de sistema de medidas y descomponiendo, se tiene:

$$A=\frac{2^o20'}{14'}+\frac{3^g10^m}{5^m}$$
$$=\frac{120'+20'}{14'}+\frac{300^m+10^m}{5^m}$$
$$=\frac{140'}{14'}+\frac{310^m}{5^m}$$
$$=10+62=72$$
$$\Rightarrow\quad A=72$$

**Respuesta**
La expresión reducida es 72.

**509.** Calcular el área de la región sombreada en radianes, si $r=6$ cm, en la siguiente figura:




**Resolución**
En la figura, el ángulo $120^\circ$ convertido a radianes, con $360^\circ=2\pi$ rad es:

$$\theta=120^o=\frac{2\pi}{3}\text{ rad}$$

El área de la región sombreada, es el área del sector circular, es decir:

$$A_s = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \theta$$

Reemplazando $\mathrm{r} = 6\ \mathrm{cm}$ y $\theta$:

$$A_s = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{2\pi}{3}\ \mathrm{rad} = 12\,\pi\ \mathrm{rad} \quad \Rightarrow \quad A_S = 12\,\pi\ \mathrm{cm}^2$$

**Respuesta**
El área de la región sombreada es $12\,\pi\ \mathrm{cm}^2$.

## Razones trigonométricas

**510.** Al determinar los valores de las seis razones trigonométricas del menor ángulo $\theta$ de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 8 y 15 unidades, hallar la expresión $E = \mathrm{cosec}\theta + \mathrm{cotan}\theta$.

**Resolución**

En el triángulo rectángulo los catetos son:

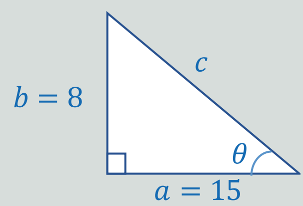
$$a = 15 \ \text{ y } \ b = 8$$

Cálculo de la hipotenusa por Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{15^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{255 + 64} = \sqrt{289} = 17$$

$$\Rightarrow \quad c = 17$$




Las razones trigonométricas en el triángulo son:

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{8}{17} \qquad \tan\theta = \frac{8}{15} \qquad \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{17}{8}$$

$$\cos\theta = \frac{15}{17} \qquad \mathrm{cotan}\,\theta = \frac{15}{8} \qquad \sec\theta = \frac{17}{15}$$

Luego

$$E = \mathrm{cosec}\,\theta + \mathrm{cotan}\,\theta = \frac{17}{8} + \frac{15}{8} = \frac{32}{8} = 4 \quad \Rightarrow \quad E = 4$$

**Respuesta**
El valor de la expresión es 4.

**511.** Si se sabe que $\tan\beta = 0{,}8$ calcular la siguiente expresión:

$$E = \sqrt{41}(\mathrm{sen}\,\beta + \cos\beta)$$

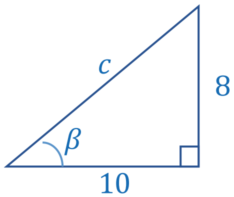
**Resolución**

Sea $\beta$ un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, además se sabe que

Básico 01

$$\tan\beta = 0{,}8 \quad \longrightarrow \quad \tan\beta = \frac{8}{10}$$

Cateto opuesto
Cateto adyacente




Cálculo de la hipotenusa, por Teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$$

$$\Rightarrow \quad c = 2\sqrt{41}$$

Razones:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{8}{2\sqrt{41}} \quad \wedge \quad \cos\beta = \frac{10}{2\sqrt{41}}$$

Luego

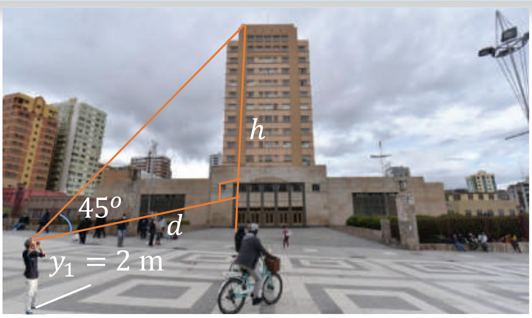
$$E = \sqrt{41}(\operatorname{sen}\beta + \cos\beta) = \sqrt{41}\left(\frac{8}{2\sqrt{41}} + \frac{10}{2\sqrt{41}}\right)$$

$$= \sqrt{41}\left(\frac{4}{\sqrt{41}} + \frac{5}{\sqrt{41}}\right) = 4 + 5 = 9$$

$$\Rightarrow \quad E = 9$$

**Respuesta**
El valor de la expresión es 9.

**512.** Un estudiante observa desde suelo el edificio de la universidad de 57 m de altura. Si el ángulo de elevación que forma la visual es de 45°, ¿cuál es la distancia entre el edificio y el estudiante?




*Fuente: Monoblok central Umsa*

**Datos**

$h = 57$ m $\qquad \theta = 45^o$

$y_1 = 2$ m $\qquad d = ?$

$y_1$: es la distancia del pie del observador hasta el ángulo visual.

**Resolución**

De la gráfica, se calcula la distancia, por razón trigonométrica:

$$\tan 45^o = \frac{h - y_1}{d}$$

Reemplazando datos:

$$\tan 45^o = \frac{57 - 2}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{55}{\tan 45^o} = \frac{55}{1} = 55 \quad \Rightarrow \quad d = 55 \text{ m}$$

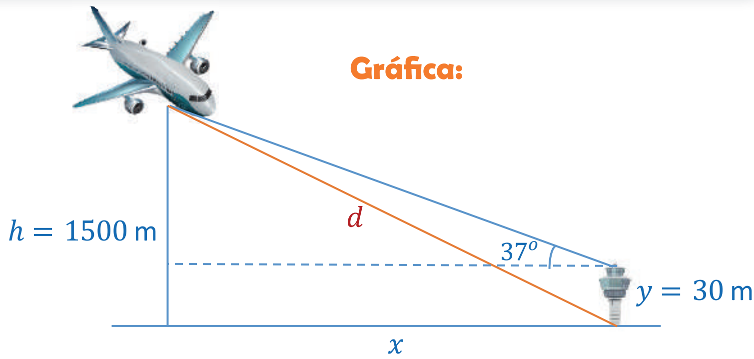
**Respuesta**
La distancia entre el estudiante y el edificio es 55 m.

**513.** Desde la torre de control del aeropuerto en Bolivia, tiene una altura de 30 metros, se establece comunicación con un avión que se aproxima para aterrizar. En ese momento, el avión se encuentra a una altitud de 1500 metros, con un ángulo de elevación desde la torre es de 37°. ¿A qué distancia está el avión del pie de la torre?

**Datos:**

$y = 30\text{ m}$
$h = 1500\text{ m}$
$\theta = 37^o$
$d = ?$

**Gráfica:**




### Resolución

De la gráfica, por razón trigonométrica, se tiene:

$$\tan 37^o = \frac{h-y}{x}$$

Reemplazando datos y calculando la distancia de la base:

$$\tan 37^o = \frac{1500-30}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1470}{\tan 37^o} = \frac{1470}{\frac{3}{4}} = \frac{5880}{3} = 1960$$

$$\Rightarrow \quad x = 1960\text{ m}$$

Aplicando Teorema de Pitágoras, se calcula la distancia del pie de la torre hasta el avión:

$$d = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{1500^2 + 1960^2} = \sqrt{6\,091\,600} \approx 2468{,}12$$

$$\Rightarrow \quad d = 2468{,}12$$

**Respuesta**
La distancia del avión al pie de la torre es 2468,12 metros.

**514.** Hallar el valor de la siguiente expresión:

$$E = \frac{\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta}{\tan\theta} - \frac{1}{2}$$

Si $\sec\theta = \sqrt{2}$.

### Resolución

Por razones trigonométricas reciprocas:

$$\cos\theta\cdot\sec\theta=1\quad\longrightarrow\quad\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\quad\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad(1)$$

$$\operatorname{sen}\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}\quad\overset{(1)}{\Rightarrow}\quad\operatorname{sen}\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego

$$E=\frac{\cos^2\theta+\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}-\frac{1}{2}=\frac{(\cos\theta)^2+\operatorname{sen}\theta}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}-\frac{1}{2}=\frac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

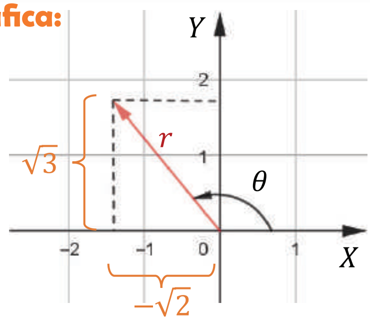
$$\Rightarrow\quad E=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Respuesta**

El valor de $E$ es $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**515.** Determinar las seis razones trigonométricas del ángulo $\theta\in II$, si $P$ es un punto del lado terminal del angulo $\theta$ de coordenadas $(-\sqrt{2},\sqrt{3})$. Como respuesta, hallar $E=\tan\theta\cdot\operatorname{cotan}\theta$.

**Gráfica:**




**Resolución**

Para determinar las razones trigonométricas, se debe calcular el radio vector de la gráfica:

$$r=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow\quad r=\sqrt{5}$$

Las razones trigonométricas son:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}\quad\Rightarrow\quad\operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{10}}{5}\quad\Rightarrow\quad\cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \tan\theta = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \cot\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{5}}{-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \sec\theta = -\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow \csc\theta = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

Ahora, por relación trigonométrica:

$$E = \tan\theta\cdot\cot\theta = \tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta} = 1$$

**Respuesta**

El valor de $E$ es 1.

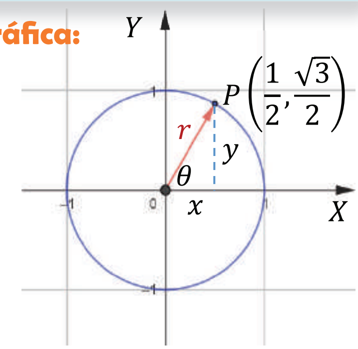
**516.** Un ángulo central se forma con el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ que está sobre la circunferencia unitaria. Determine de forma exacta, las 6 razones trigonométricas y hallar el valor de $H = \operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta$.

**Resolución**

Como la circunferencia es unitaria, entonces su radio vector es $r = 1$.

Razones trigonométricas:

**Gráfica:**




$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Luego

$$H = \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad H = 1$$

Es decir, se deduce una identidad reciproca: $\operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta = 1$.

**Respuesta**

El valor de $H$ es 1.

**517.** Un ángulo central se forma con el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ que está sobre la circunferencia unitaria. Si las razones trigonométricas son $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos\theta = \frac{1}{2}$, que se deduce en el ejemplo anterior, hallar $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$.

**Resolución**

Como datos se conoce:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \wedge \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

Entonces

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2^2} + \frac{1^2}{2^2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

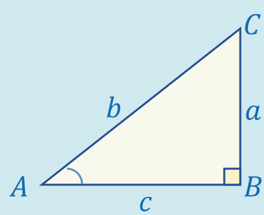
Es decir, se deduce una identidad Pitagórica.

**Respuesta**

El resultado es una identidad Pitagórica su valor da 1.

## Triángulos rectángulos y oblicuángulos

**518.** Hallar el lado adyacente en el siguiente triángulo rectángulo dado, si $b = \sqrt{17}$ y $a = 2$.



**Datos**

$a = 2$

$b = \sqrt{17}$

$c = ?$

**Resolución**

Aplicando Teorema de Pitágoras en el triángulo $\Delta ABC$:

$$b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow c^2 = b^2 - a^2 \quad \text{sacando raíz cuadrada}$$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{b^2 - a^2} \quad \text{por datos}$$

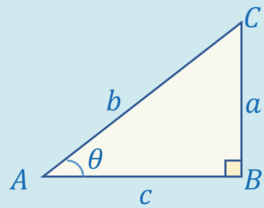
$$= \sqrt{\left(\sqrt{17}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{17-4} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{13}$$

**Respuesta**

El lado adyacente es $\sqrt{13}$

**519.** Hallar el ángulo $\theta$ en el siguiente triangulo rectángulo dado, si $a=\sqrt{3}$ y $b=\sqrt{19}$.




**Datos**

$a = \sqrt{3}$

$b = \sqrt{19}$

$c = ?$

**Resolución**

Por la razón trigonométrica en el triángulo $\Delta ABC$:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\right) \approx 23{,}41^o$$

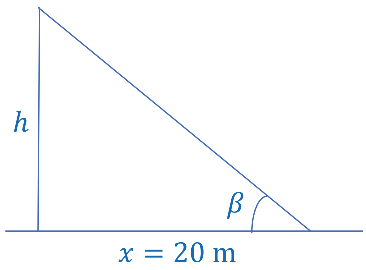
$$\Rightarrow \quad \theta = 23{,}41^o$$

**Respuesta**

El valor del ángulo $\theta$ es 23,41°.

**520.** A una distancia de 20 m de la base de un poste, la punta de éste se observa bajo un ángulo de 37°. Calcula la altura del poste.

**Gráfico:**




**Datos**

$x = 20$ m
$\beta = 37^o$
$h = ?$

**Resolución**

Del gráfico, la función tangente es:

$$\tan\beta = \frac{h}{x}$$

Reemplazando datos:

$$\tan 37^o = \frac{h}{20} \quad \Rightarrow \quad h = 20 \cdot \tan 37^o = 20 \cdot \frac{3}{4} = 15 \text{ m}$$

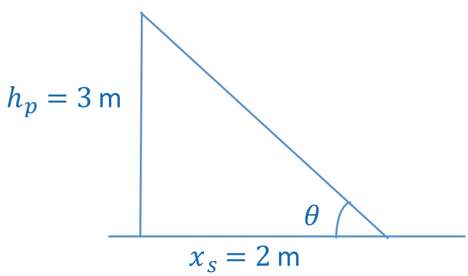
$$\Rightarrow \quad h = 15 \text{ m}$$

**Respuesta**

La altura del poste es 15 metros.

**521.** Determina el ángulo de elevación del sol si un poste de 3 metros proyecta una sombra de 2 metros.

**Gráfico:**




**Datos**

$h_p = 3$ m
$x_s = 2$ m
$\theta = ?$

**Resolución**

De la gráfica, la función tangente es:

$$\tan\theta = \frac{h_p}{x_s}$$

Reemplazando datos:

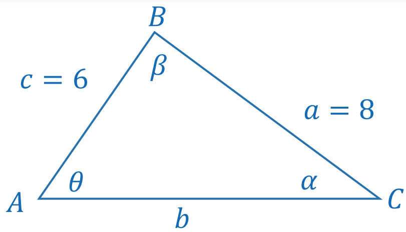
$$\tan\theta = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56{,}31^o$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 56{,}31^o$$

**Respuesta**

El ángulo de elevación del sol es 56,31°.

**522.** En el triángulo rectángulo $\Delta ABC$, si $c = 6$, $a = 8$ y $\theta = 53^{o}$. Hallar la medida del ángulo $\alpha$.




**Dato importante..**

Ley de senos:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

**Datos**

$c = 6$

$a = 8$

$\theta = 53^{o}$

$\alpha = ?$

**Resolución**

Del gráfico, en el triángulo $\Delta ABC$, se conoce dos lados y un ángulo, por ley de senos:

$$\frac{c}{\text{sen } \alpha} = \frac{a}{\text{sen } \theta}$$

Reemplazando datos:

$$\frac{6}{\text{sen } \alpha} = \frac{8}{\text{sen } 53^{o}} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } \alpha = \frac{6 \cdot \text{sen } 53^{o}}{8} = \frac{3 \cdot \frac{4}{5}}{4} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \text{sen}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 36{,}87^{o}$$

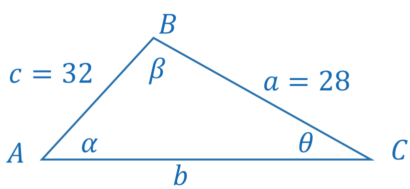
$$\Rightarrow \quad \alpha = 36{,}87^{o}$$

**Respuesta**

La medida del ángulo buscado es 36,87°.

**523.** En el triángulo $\Delta ABC$, si $a = 28$, $c = 32$, $\beta = 76^{o}$ y $\alpha = 30^{o}$. Hallar el lado $b$.

**Gráfico:**




**Datos**

$a = 28$

$c = 32$

$\beta = 76^{o}$

$\alpha = 30^{o}$

$b = ?$

**Resolución**

Del gráfico, en el triángulo $\Delta ABC$, se conoce dos lados y dos ángulos, por ley de senos:

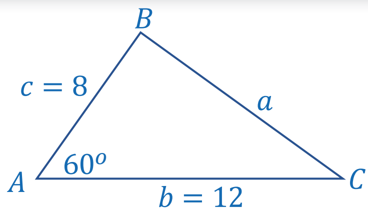
$$\frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{a}{\text{sen } \alpha} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha} = \frac{28 \cdot \text{sen } 76^{o}}{\text{sen } 30^{o}} \approx 54{,}3$$

$$\Rightarrow \quad b = 54{,}3$$

**Respuesta**

El lado b del triángulo es 54,3.

**524.** En el triangulo $\Delta ABC$, se conoce los lados $b = 12$, $c = 8$ y $\angle BAC = 60^o$, hallar el tercer lado que falta.




**Datos**

$b = 12$
$c = 8$
$\angle BAC = 60^o$
$a = ?$

## Resolución

Calculando el lado $a$ por ley de cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Reemplazando datos:

$$a^2 = 12^2 + 8^2 - 2\cdot 12\cdot 8\cos 60^o \;\Rightarrow\; a^2 = 144 + 64 - 2\cdot 12\cdot 8\cdot\frac{1}{2}$$

$$= 144 + 64 - 96 = 112$$

$$\Rightarrow\; a = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

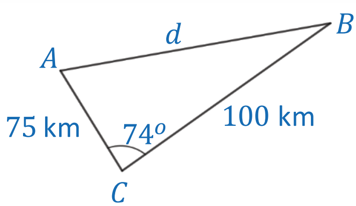
$$\Rightarrow\; a = 4\sqrt{7}$$

**Respuesta**

El lado $a$ del triángulo $\Delta ABC$ es $4\sqrt{7}$.

**525.** Dos automóviles parten de una ciudad y sus direcciones forman un ángulo de $74^o$. Después de una hora, uno de ellos se encuentra a 75 km de la ciudad, mientras que el otro está a 100 km. ¿Cuál es la distancia entre ambos automóviles?

**Gráfico:**




**Datos**

$\theta = 74^o$
$a = 100$ km
$b = 75$ km
$d = ?$

**Resolución**

Calculando la distancia d entre automóviles, por ley de cosenos:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Reemplazando datos:

$$d^2 = 100^2 + 75^2 - 2\cdot 100\cdot 75\cos 74^o$$

$$\Rightarrow\ d = \sqrt{100^2 + 75^2 - 2\cdot 100\cdot 75\cdot (0{,}276)}$$

$$= \sqrt{15\,625 - 4140} = \sqrt{11\,485} \approx 107{,}17$$

$$\Rightarrow\ d = 107{,}17\ \text{km}$$

**Respuesta**

La distancia entre ambos automóviles es 107,17 km.

## Identidades trigonométricas

**526.** Simplificar:

$$A = (1 - \operatorname{sen} x)(\sec x + \tan x)$$

**Resolución**

Aplicando las identidades trigonométricas:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x};\ \ \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x};\ \ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Luego:

$$A = (1 - \operatorname{sen} x)(\sec x + \tan x)$$

$$= (1 - \operatorname{sen} x)\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = (1 - \operatorname{sen} x)\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos x} = \frac{1^2 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \quad A = \cos x$$

**Respuesta**

La expresión simplificada de $A$ es $\cos x$.

**527.** Simplificar:

$$B = \frac{1 - (1 + \operatorname{sen} x)\operatorname{cosec} x}{1 - (1 + \cos x)\sec x}$$

## Resolución

Aplicando las identidades trigonométricas:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}; \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Luego:

$$B = \frac{1-(1+\operatorname{sen} x)\operatorname{cosec} x}{1-(1+\cos x)\sec x} = \frac{1-(1+\operatorname{sen} x)\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}{1-(1+\cos x)\dfrac{1}{\cos x}}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x-(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{\cos x-(1+\cos x)}{\cos x}} = \frac{(\operatorname{sen} x-1-\operatorname{sen} x)\cos x}{(\cos x-1-\cos x)\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotan} x \quad \Rightarrow \quad B = \operatorname{cotan} x$$

**Respuesta**

La expresión simplificada de $B$ es cotan $x$.

**528.** Reducir la expresión:

$$C = \left(\frac{\operatorname{cosec} x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{cotan} x}{\tan x}\right)\left(\frac{\cos x}{\sec x} + \operatorname{sen}^2 x\right)$$

## Resolución

Llevando la expresión a una sola función trigonométrica y aplicando las identidades trigonométricas:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}; \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}; \quad \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

Luego:

$$C = \left(\frac{\operatorname{cosec} x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{cotan} x}{\tan x}\right)\left(\frac{\cos x}{\sec x} + \operatorname{sen}^2 x\right)$$

$$= \left(\frac{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen} x} - \frac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}\right)\left(\frac{\cos x}{\dfrac{1}{\cos x}} + \operatorname{sen}^2 x\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = \left(\frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)(1)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C = 1$$

**Respuesta**

La expresión reducida de $C$ es 1.

**529.** Simplificar la expresión:

$$E = \frac{\operatorname{sen}(A-B)+\operatorname{sen}(A+B)}{\cos(A-B)+\cos(A+B)}$$

**Resolución**

Aplicando la fórmula de suma y diferencia de funciones trigonométricas:

$$E = \frac{\operatorname{sen}(A-B)+\operatorname{sen}(A+B)}{\cos(A-B)+\cos(A+B)}$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} A\cos B-\cos A\operatorname{sen} B)+(\operatorname{sen} A\cos B+\cos A\operatorname{sen} B)}{(\cos A\cos B+\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B)+(\cos A\cos B-\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B)}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen} A\cos B}{2\cos A\cos B} = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \tan A \qquad \Rightarrow \quad E = \tan A$$

**Respuesta**

La expresión simplificada de $E$ es $\tan A$.

**530.** Simplificar la expresión:

$$A = \frac{2\operatorname{sen}(30^o+x)-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

**Resolución**

Aplicando la fórmula de suma en el numerador de la expresión:

$$A = \frac{2\operatorname{sen}(30^o+x)-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{2\,(\operatorname{sen} 30^o\cos x+\cos 30^o\operatorname{sen} x)-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2}\cdot\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{sen} x\right)-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x+\sqrt{3}\operatorname{sen} x-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \quad A = \sqrt{3}$$

**Respuesta**

La expresión simplificada es $\sqrt{3}$.

Básico 01

**531.** Verificar que:

$$\operatorname{sen}(60^o + x) - \operatorname{sen}(60^o - x) = \operatorname{sen} x$$

**Resolución**

Aplicando la propiedad de coseno de una suma de ángulos:

$$\operatorname{sen}(60^o + x) - \operatorname{sen}(60^o - x) =$$

$$= \operatorname{sen} 60^o \cos x + \operatorname{sen} x \cos 60^o - (\operatorname{sen} 60^o \cos x - \operatorname{sen} x \cos 60^o)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

**Respuesta**

La expresión dada es una identidad.

**532.** Simplificar la expresión:

$$E = \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos x}{1 - \cos 2x + \operatorname{sen} x}$$

**Resolución**

Aplicando la propiedad de ángulo doble de seno y coseno:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta; \qquad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

Luego:

$$E = \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos x}{1 - \cos 2x + \operatorname{sen} x} = \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos x}{1 - (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{\cos x\,(2 \operatorname{sen} x + 1)}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{\cos x\,(2 \operatorname{sen} x + 1)}{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x} = \frac{\cos x\,(2 \operatorname{sen} x + 1)}{\operatorname{sen} x\,(2 \operatorname{sen} x + 1)}$$

$$= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotan} x$$

**Respuesta**

El resultado es cotan $x$.

**533.** Simplificar la expresión:

$$M = \frac{\tan(45^o - x) - 1}{\tan 2x}$$

**Resolución**

Aplicando la propiedad de ángulo doble y suma de tangente:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}; \quad \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$$

Luego:

$$M = \frac{\tan(45^o - x) - 1}{\tan 2x} = \frac{\frac{\tan 45^o - \tan x}{1+\tan 45^o \tan x} - 1}{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$$

$$= \frac{\frac{1-\tan x-(1+1\cdot\tan x)}{1+1\cdot\tan x}}{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$$

$$= \frac{-2\tan x(1-\tan^2 x)}{2\tan x\,(1+\tan x)} = -\frac{(1-\tan x)(1+\tan x)}{1+\tan x}$$

$$= -(1-\tan x) = \tan x - 1$$

$$\Rightarrow \quad M = \tan x - 1$$

**Respuesta**

La expresión reducida es tan $x$ - 1.

**534.** Expresar como producto sen 55° + sen 45°.

**Resolución**

Aplicando la fórmula de la suma a producto:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Luego:

$$\operatorname{sen} 55^o + \operatorname{sen} 45^o = 2\operatorname{sen}\left(\frac{55^o+45^o}{2}\right)\cos\left(\frac{55^o-45^o}{2}\right)$$

$$= 2\operatorname{sen}\left(\frac{100^o}{2}\right)\cos\left(\frac{10^o}{2}\right)$$

$$= 2\operatorname{sen} 50^o \cos 5^o$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} 55^o + \operatorname{sen} 45^o = 2\operatorname{sen} 50^o \cos 5^o$$

**Respuesta**
El resultado es $2 \sin 50^o \cos 5^o$ .

**535.** Verificar la siguiente identidad:

$$2 \operatorname{sen} 45^o \cos 15^o = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

### Resolución

Aplicando la fórmula de producto a suma:

$$2\operatorname{sen} A \cos B = \operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)$$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} 45^o \cos 15^o &= \operatorname{sen}(45^o + 15^o) + \operatorname{sen}(45^o - 15^o) \\ &= \operatorname{sen}(60^o) + \operatorname{sen}(30^o) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \operatorname{sen} 45^o \cos 15^o = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

**Respuesta**
La ecuación dada es una identidad.

## Funciones trigonométricas

**536.** Grafica la función $y = \operatorname{sen} x + 2$ , para $0 \leq x \leq 2\pi$.

### Resolución

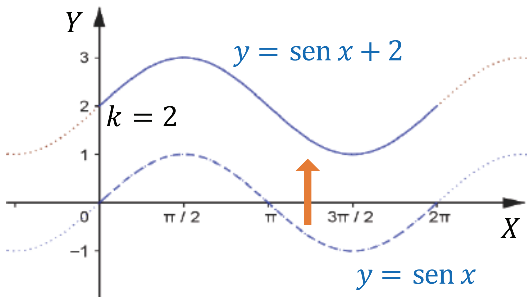
Se toma la gráfica de la función $y = f(x) = \operatorname{sen} x$ , luego la forma general de la función seno:

$$y = a \operatorname{sen} bx \quad \Rightarrow \begin{cases} A = |a| & \leftarrow \quad \text{Amplitud} \\ T = \dfrac{2\pi}{|b|} & \leftarrow \quad \text{Periodo} \end{cases}$$

Amplitud: $A = 1$
Periodo: $T = 2\pi$
Desplazamiento vertical: $k = 2$

Con la ayuda de la aplicación GeoGebra se obtiene la gráfica de seno que se traslada 2 unidades arriba del eje “$X$”.

**Gráfica:**




**Respuesta**

La gráfica de la función $y = \operatorname{sen}\ x$ se llama **sinusoide.**

**537.** Graficar la función $y = \cos x + 2$, para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

**Resolución**

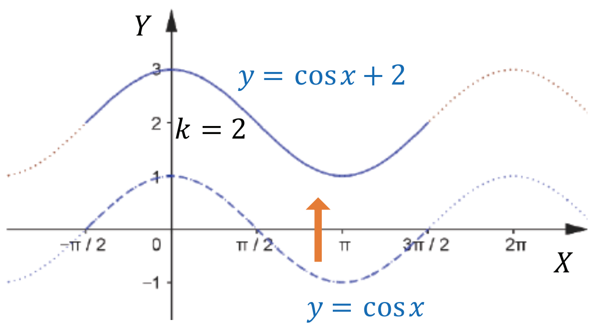
Se toma la gráfica de la función $y = f(x) = \cos x$, donde:

$$y = a \cos bx \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = |a| & \leftarrow \quad \text{Amplitud} \\ T = \dfrac{2\pi}{|b|} & \leftarrow \quad \text{Periodo} \end{cases}$$

Amplitud: $A = 1$
Periodo: $T = 2\pi$
Desplazamiento vertical: $k = 2$

Con la ayuda de la aplicación GeoGebra se obtiene la gráfica de coseno que se desplaza 2 unidades arriba del eje "$X$".

**Gráfica:**



**Respuesta**
La gráfica de la función $y = \cos\ x$ se llama **cosinusoide**.

**538.** Graficar la función $y = \tan x + 2$, para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

**Resolución**

Considerando la gráfica de la función $y = f(x) = \tan x$, luego:

$$y = \tan x + 2, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Periodo:

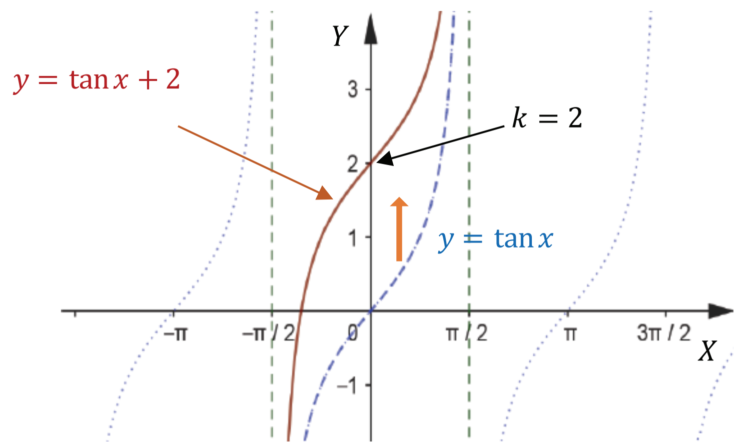
$$T = \frac{\pi}{|1|} = \pi \quad \Rightarrow \quad T = \pi$$

Asíntotas verticales:

$$x = \pm\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad x = \frac{\pi}{2}$$

Desplazamiento vertical: $k = 2$

**Gráfica:**




**Respuesta**
La gráfica de la función $y = \tan\ x$ se llama **tangentoide**.

**539.** Graficar la función $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$, para $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$.

**Resolución**

A partir de la gráfica $y = f(x) = \text{sen}\, x$:

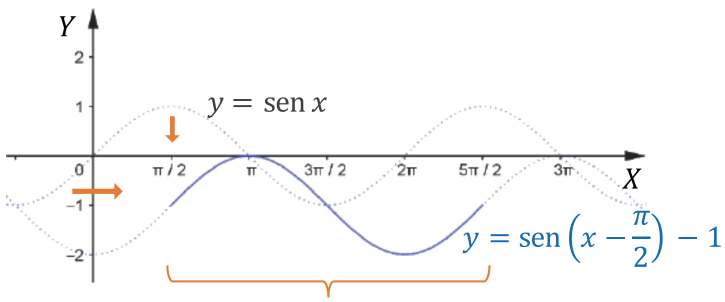
$$y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1, \qquad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$$

Amplitud: $A = 1$
Periodo: $T = 2\pi$
Desfase (desplazamiento horizontal):

$$x - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \longrightarrow \quad x = h = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\pi}{2}$$

Desplazamiento vertical: $k = -1$

**Gráfica:**




**Respuesta**

La gráfica se traslada $h = \frac{\pi}{2}$ hacia $k = -1$ derecha, verticalmente hacia abajo y de periodo $2\pi$.

**540.** Grafica la función $y = \cos(x + \pi) - 2$, para $-\pi \leq x \leq \pi$.

**Resolución**

A partir de la gráfica $y = f(x) = \cos x$:

$$y = \cos(x + \pi) - 2, \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

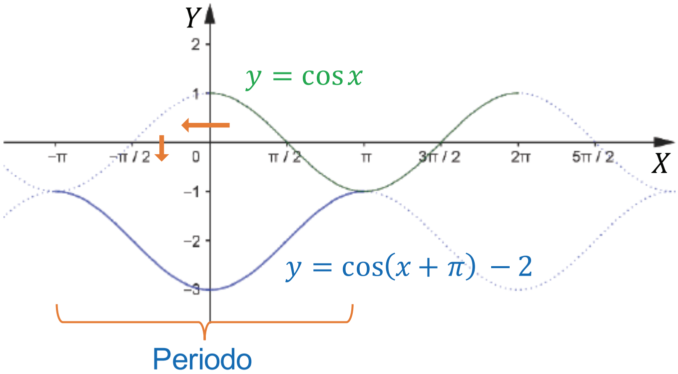
Amplitud: $A = 1$
Periodo: $T = 2\pi$
Desfase (desplazamiento horizontal):

$$x + \pi = 0 \quad \longrightarrow \quad x = h = -\pi \quad \Rightarrow \quad h = -\pi$$

Desplazamiento vertical: $k = -2$

Básico 01

**Gráfica:**




**Respuesta**

La gráfica se traslada $h$=-$\pi$ hacia izquierda, $k$=-2 verticalmente hacia abajo y de periodo $2\pi$.

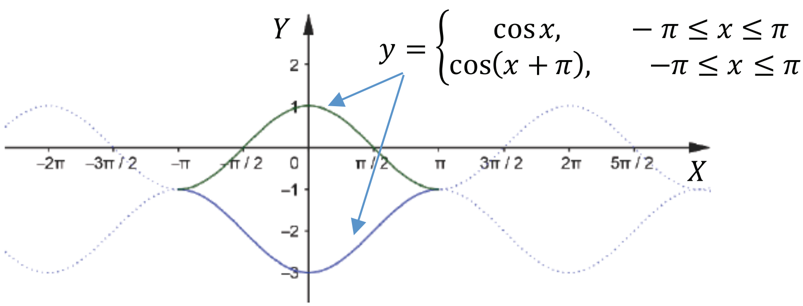
**541.** Graficar la función: $y = f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi \leq x \leq \pi \\ \cos(x+\pi), & -\pi \leq x \leq \pi \end{cases}$

## Resolución

La función $y = f(x)$ se grafica por pates en el intervalo dado.
La función $y = \cos x$ es conocida y en el ejercicio anterior se graficó la función

$$y = \cos(x+\pi), \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

**Gráfica:**




**Respuesta**

La gráfica resultante está en el intervalo de $-\pi \leq x \leq \pi$.

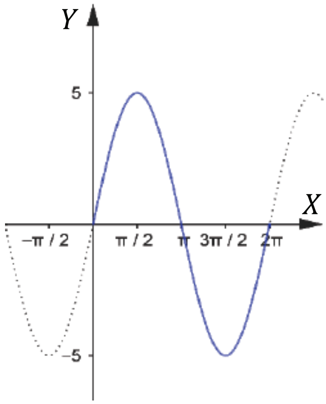
**542.** Determinar el periodo, amplitud de $y = 5 \operatorname{sen} x$ y su gráfica.

### Resolución

La forma general de la función seno tiene la forma:

$$y = a \operatorname{sen} bx \quad \Rightarrow \begin{cases} A = |a| & \leftarrow \quad \text{Amplitud} \\ T = \dfrac{2\pi}{|b|} & \leftarrow \quad \text{Periodo} \end{cases}$$

### Gráfica:




De la función dada:

$$y = 5 \operatorname{sen} x$$

Amplitud:

$$A = |5| = 5 \quad \Rightarrow \quad A = 5$$

Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi$$

**Respuesta**

La amplitud es 5 y el periodo es $2\pi$.

## Ecuaciones trigonométricas

**543.** Resuelve la siguiente ecuación para $x$, si $0^o \leq x \leq 360^o$:

$$2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

**Dato importante**

Regla para hallar las soluciones fundamentales para seno:

$$\operatorname{sen} x = a \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \operatorname{arcsen} a + 2\pi k \\ x_2 = \pi - \operatorname{arcsen} a + 2\pi k \end{cases}$$

Donde: $k \in \mathbb{Z}$

### Resolución

Despejando la incógnita $x$ de la ecuación dada:

$$2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \operatorname{sen} x = 1$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Para $k = 0$ en la solución fundamental se tiene:

$$x_1 = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi \cdot 0 = \frac{\pi}{6} \qquad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{6} = 30^o$$

$$x_2 = \pi - \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi \cdot 0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} = 150^o$$

De donde $x_1, x_2 \in [0^o;\ 360^o]$

**Respuesta**

Las soluciones son 30º y 150º

**544.** Resuelve la siguiente ecuación para $x$, si $0 \le x \le 2\pi$:

$$2\cos x - 1 = 0$$

**Resolución**

Despejando la incógnita $x$ de la ecuación dada:

$$2\cos x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \ 2\cos x = 1 \quad \Rightarrow \ \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \ \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Para determinar los valores en la primera vuelta, si k=0,1 en la solución fundamental se tiene:

$$\begin{cases} x_1 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi \cdot 0 = \frac{\pi}{3} \\ x_2 = -\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi \cdot 1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

De donde

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{5\pi}{3}, \qquad\qquad x_1, x_2 \in [0^o;\ 360^o]$$

**Respuesta**

$$C_s = \left\{\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}\right\}$$

**545.** Resuelve la siguiente ecuación para $x$, si $0^o \leq x \leq 360^o$:

$$\tan 2x - \sqrt{3} = 0$$

## Resolución

Despejando la incógnita x de la ecuación dada:

$$\tan 2x - \sqrt{3} = 0 \;\Rightarrow\; \tan 2x = \sqrt{3}$$
$$\Rightarrow 2x = \arctan\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{3}$$

**Dato importante**

Regla para hallar las soluciones fundamentales para tangente:

$$\tan x = a \;\Rightarrow\; x = \arctan a + \pi k$$

Donde: $k \in \mathbb{Z}$

Para determinar los valores en la primera vuelta, si $k = 0{,}1{,}2{,}3$ en la solución fundamental se tiene:

$$2x_1 = \arctan\sqrt{3} + \pi \cdot 0 = \frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{6} = 30^o$$

$$2x_2 = \arctan\sqrt{3} + \pi \cdot 1 = \frac{\pi}{3} + \pi \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{2\pi}{3} = 120^o$$

$$2x_3 = \arctan\sqrt{3} + \pi \cdot 2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi \;\Rightarrow\; x_3 = \frac{7\pi}{6} = 210^o$$

$$2x_4 = \arctan\sqrt{3} + \pi \cdot 3 = \frac{\pi}{3} + 3\pi \;\Rightarrow\; x_4 = \frac{10\pi}{6} = 300^o$$

De donde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [0^o;\ 360^o]$

**Respuesta**

$$C_s = \left\{\frac{\pi}{6};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{10\pi}{6}\right\}$$

**546.** Resuelve la siguiente ecuación para $x$, si $0^o \leq x \leq 360^o$:

$$\cot 2x - \sqrt{3} = 0$$

## Resolución

Despejando la incógnita x de la ecuación dada:

$$\operatorname{cotan} 2x - \sqrt{3} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\operatorname{cotan} 2x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \tan 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Si $k = 0{,}1{,}2{,}3$ en la solución fundamental se tiene:

$$2x_1 = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi \cdot 0 = \frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{12} = 15^o$$

$$2x_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi \cdot 1 = \frac{\pi}{6} + \pi \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{7\pi}{12} = 105^o$$

$$2x_3 = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi \cdot 2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{13\pi}{12} = 195^o$$

$$2x_4 = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi \cdot 3 = \frac{\pi}{6} + 3\pi \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{19\pi}{12} = 185^o$$

De donde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [0^o;\ 360^o]$

**Respuesta**
Las soluciones son 15º, 105º, 195º y 185º

**547.** Resuelve la siguiente ecuación para $x$, si $0^o \le x \le 360^o$:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$$

**Resolución**

Observe que el coseno tiene ángulo negativo y por la propiedad de ángulos negativos se tiene:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 \;\Leftrightarrow\; 2\cos\left(-\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow\; 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow\; \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

**Dato Importante**

Identidades de ángulos negativos

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

Para $k = 0{,}1$ en la solución fundamental se tiene:

$$x_1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} = 105^o \;\Rightarrow\; x_1 = 105^o$$

$$x_2 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{23\pi}{12} = 355^o$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 355^o$$

De donde $x_1, x_2 \in [0^o;\ 360^o]$

**Respuesta**
Las soluciones son 105º y 355º

**548.** Resuelve la siguiente ecuación para $x$, si $0^o \leq x \leq 360^o$:

$$2\ \mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

**Resolución**

Despejando la incógnita:

$$2\ \mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Para $k$ = 0,1 en la solución fundamental se tiene:

$$x_1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} = 105^o \quad \Rightarrow \quad x_1 = 105^o$$

$$x_2 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} = 15^o \quad \Rightarrow \quad x_2 = 15^o$$

De donde $x_1, x_2 \in [0^o;\ 360^o]$

**Respuesta**
Las soluciones son 105º y 15º

**549.** Hallar los valores principales de los ángulos que satisfacen la ecuación:

$$2\ \mathrm{sen}\left(\frac{x}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$$

Básico 01

## Resolución

Despejando la incógnita:

$$2\,\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)-\sqrt{3}=0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{3}=\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Para k=0 en la solución fundamental se tiene:

$$\frac{x_1}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad x_1=3\cdot\frac{\pi}{3}=\pi \quad \Rightarrow \quad x_1=\pi$$

$$\frac{x_2}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad x_2=3\pi-3\cdot\frac{\pi}{3}=2\pi \quad \Rightarrow \quad x_2=2\pi$$

**Respuesta**
Las soluciones principales son $\pi$ y $2\pi$.

**550.** Calcular la suma de las dos menores soluciones positivas al resolver la ecuación: $\text{sen}\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\text{sen}\,30^o$

## Resolución

Despejando la incógnita:

$$\text{sen}\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\text{sen}\,30^o \quad \Rightarrow \quad 4x-\frac{\pi}{3}=\text{arcsen}(\text{sen}\,30^o)=\frac{\pi}{6}$$

Para k=0 en la solución fundamental se tiene:

$$4x_1-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad 4x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{\pi}{8}$$

$$4x_2-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad 4x_2=\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{7\pi}{24}$$

Luego, la suma es:

$$x_1+x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{24}=\frac{5\pi}{12} \quad \Rightarrow \quad x_1+x_2=\frac{5\pi}{12}$$

**Respuesta**
La suma de las dos menores soluciones positivas es: $\frac{5\pi}{12}$

## Sistemas de medición de ángulos y longitudes de arco

**551.** Dado el ángulo normal $\theta = 60^o$, encontrar dos ángulos coterminales positivos y dos ángulos coterminales negativos.

### Resolución

Aplicando la propiedad de ángulos coterminales.
Ángulos coterminales positivos:

Si $n = 1$, $\theta = 60^o$ y $\beta = ?$, entonces

$$\beta = 60^o + 1 \cdot 360^o \Rightarrow \beta = 60^o + 360^o = 420^o$$
$$\Rightarrow \beta = 420^o$$

Si $n = 2$, $\theta = 60^o$ y $\beta = ?$, entonces

$$\beta = 60^o + 2 \cdot 360^o \Rightarrow \beta = 60^o + 720^o = 780^o$$
$$\Rightarrow \beta = 780^o$$

Ángulos coterminales negativos:

Si $n = 1$, $\theta = 60^o$ y $\beta = ?$, entonces

$$\beta = 60^o - 1 \cdot 360^o \Rightarrow \beta = 60^o - 360^o = -300^o$$
$$\Rightarrow \beta = -300^\circ$$

Si $n = 2$, $\theta = 60^o$ y $\beta = ?$, el segundo ángulo coterminal negativo es

$$\beta = 60^o - 2 \cdot 360^o \Rightarrow \beta = 60^o - 720^o = -660^o$$
$$\Rightarrow \beta = -660^o$$

**Dato Importante**

Ángulos coterminales

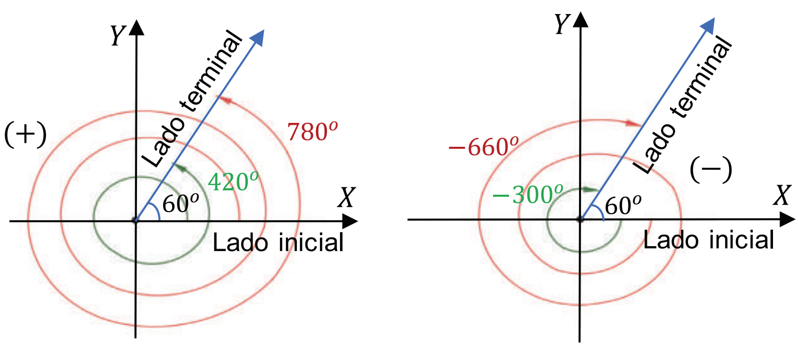
Para $n \in \mathbb{N}$

$\beta$ positivo:

$$\beta = \theta + n \cdot 360^o$$

$\beta$ negativo:

$$\beta = \theta - n \cdot 360^o$$




**Respuesta**

Los ángulos coterminales son: $420^o$, $780^o$, $-300^o$ y $-660^o$

**Intermedio** 02

**552.** Dado un ángulo normal $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ , encontrar dos ángulos coterminales positivos y dos ángulos coterminales negativos en radianes.

**Resolución**

Ángulos coterminales positivos:

Si $n = 1$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ y $\beta = ?$, entonces

$$\beta = \frac{\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi + 6\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{7\pi}{3}$$

Si $n = 2$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ y $\beta = ?$, entonces

$$\beta = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{\pi + 12\pi}{3} = \frac{13\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{13\pi}{3}$$

Ángulos coterminales negativos:

Si $n = 1$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ y $\beta = ?$, luego

$$\beta = \frac{\pi}{3} - 1 \cdot 2\pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3} - 2\pi = \frac{\pi - 6\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{5\pi}{3}$$

Si $n = 2$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ y $\beta = ?$, luego

$$\beta = \frac{\pi}{3} - 2 \cdot 2\pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3} - 4\pi = \frac{\pi - 12\pi}{3} = -\frac{11\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{11\pi}{3}$$

**Respuesta**

Los ángulos coterminales son:

$$\frac{7\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}; \quad -\frac{5\pi}{3}, -\frac{11\pi}{3}$$

**553.** Transformar $135^o$ y $32^o12'25''$.

## Resolución

Por la relación fundamental de conversión de ángulos:

*i)* $S$=$135^o$ en radianes:

$$\frac{S}{180^o}=\frac{R}{\pi\text{ rad}}$$

Despejando radián:

$$R=\frac{S}{180^o}\cdot\pi\text{ rad}=\frac{135^o}{180^o}\cdot\pi\text{ rad}=\frac{3}{4}\cdot\pi\text{ rad}\quad\Rightarrow\quad R=\frac{3}{4}\cdot\pi\text{ rad}$$

*ii)* $S$=$32^o12'25''$ en radianes:

$$R=\frac{S}{180°}\cdot\pi\text{ rad}=\frac{32°12'25''}{180°}\cdot\pi\text{ rad}=\frac{32{,}20694°}{180°}\cdot3{,}14\text{ rad}$$

$$=0{,}56\text{ rad}\quad\Rightarrow\quad R=0{,}56\text{ rad}$$

Conversión de ángulos

$$\frac{S}{360^o}=\frac{C}{400^g}=\frac{R}{2\pi\text{ rad}}$$

O bien

$$\frac{S}{180^o}=\frac{C}{200^g}=\frac{R}{\pi\text{ rad}}$$

**Respuesta**

Las transformaciones son: $\frac{3}{4}\pi$ rad; $0{,}56$ rad

**554.** Transformar $\frac{5\pi}{3}$ en el sistema sexagesimal.

## Resolución

Por la relación fundamental de conversión de ángulos:

$$\frac{S}{180^o}=\frac{R}{\pi\text{ rad}}$$

Luego

$$S=\frac{R}{\pi\text{ rad}}\cdot180^o=\frac{\frac{5\pi}{3}\text{ rad}}{\pi\text{ rad}}\cdot180^o=\frac{5}{3}\cdot180^o=300^o$$

$$\Rightarrow\quad S=300^o$$

**Respuesta**

La transformación es $300^o$

**555.** ¿Qué cantidad de radianes hay entre las agujas de un reloj en una típica escuela en Bolivia, cuando marcan las cinco en punto? además, determinar la distancia que recorre el extremo de la aguja del minutero de un reloj de pared que mide 25 cm, cuando han transcurrido 25 minutos.

## Resolución

A las 5 en punto, el angulo que forman dichas agujas es $150^o$ ya que ambas agujas en una hora forman $30^o$ y por la relación fundamental se tiene:

$$\frac{S}{180^o}=\frac{R}{\pi\text{ rad}}$$

Luego

$$R=\frac{S}{180^o}\cdot\pi\text{ rad}=\frac{150^o}{180^o}\cdot\pi\text{ rad}=\frac{5}{6}\cdot\pi\text{ rad}$$

$$\Rightarrow\quad R=\frac{5}{6}\pi\text{ rad}$$

Ahora la distancia que recorre la aguja minutero es:

$$L=R\cdot\theta\quad\Rightarrow\quad L=\frac{5}{6}\pi\text{ rad}\cdot 25\text{ cm}=\frac{125}{6}\pi\text{ cm}=65{,}45\text{ cm}$$

$$\Rightarrow\quad L=65{,}45\text{ cm}$$

**Respuesta**

Los resultados son $\frac{5}{6}\pi$ rad y 65,45 cm.

**556.** Hallar la medida en el sistema sexagesimal, si se cumple que:

$$3S-2C=42$$

## Resolución

De la relación fundamental se tiene:

$$\frac{S}{180^o}=\frac{C}{200^g}\quad\Rightarrow\quad\frac{S}{180}=\frac{C}{200}\quad\Rightarrow\quad C=\frac{200}{180}S$$

En la condición:

$$3S-2C=42\quad\Rightarrow\quad 3S-2\left(\frac{200}{180}S\right)=42$$

$$\Rightarrow\quad 3S-\frac{20}{9}S=42$$

$$\Rightarrow\quad\frac{7}{9}S=42\quad\Rightarrow\quad S=\frac{378}{7}=54$$

$$\Rightarrow\quad S=54^o$$

**Respuesta**

La mediada en el sistema sexagesimal es $54^o$

**557.** Si $S$, $C$, $R$ representan la mediada de un ángulo en los tres sistemas. Calcular $S$ en grados si se cumple la relación:

$$8^{S+13} = 16^{C}$$

## Resolución

De la relación fundamental se tiene:

$$\frac{S}{180^{o}} = \frac{C}{200^{g}} \Rightarrow \frac{S}{180} = \frac{C}{200} \Rightarrow C = \frac{200}{180}S \qquad (1)$$

En la condición, llevando a la misma base, es decir:

$$8^{S+13} = 16^{C} \Rightarrow 2^{3(S+13)} = 2^{4C}$$

$$\Rightarrow 3(S+13) = 4C \overset{(1)}{\Rightarrow} 3S + 39 = 4 \cdot \left(\frac{200}{180}S\right)$$

$$\Rightarrow S\left(\frac{180 \cdot 3 - 4 \cdot 200}{180}\right) = -39$$

$$\Rightarrow S \cdot \left(\frac{-260}{180}\right) = -39 \Rightarrow S = 27^{o}$$

**Respuesta**

El resultado es $27^{o}$

**558.** Determinar el ángulo, en radianes, en la ecuación siguiente:

$$\frac{S+C}{19} + \frac{C-R}{200-\pi} = \frac{3}{4}$$

## Resolución

De la relación fundamental:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} S = \dfrac{180}{\pi}R \\ C = \dfrac{200}{\pi}R \end{cases} \qquad (1)$$

Conversión de ángulos

$$\frac{S}{180^{o}} = \frac{C}{200^{g}} = \frac{R}{\pi \text{ rad}}$$

Por convención

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

Luego

$$\frac{S+C}{19} + \frac{C-R}{200-\pi} = \frac{3}{4} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\frac{180}{\pi}R + \frac{200}{\pi}R}{19} + \frac{\frac{200}{\pi}R - R}{200-\pi} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{380}{\pi}R}{19} + \frac{\frac{200R - \pi R}{\pi}}{200-\pi} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{380R}{19\pi} + \frac{(200-\pi)R}{(200-\pi)\pi} = \frac{3}{4}$$

Simplificando

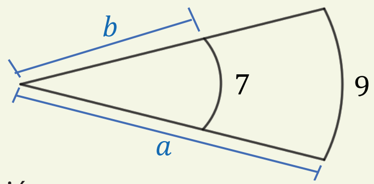
$$\frac{380\,R + 19\,R}{19\,\pi} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{399\,R}{19\,\pi} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{3 \cdot 19}{4 \cdot 399}\,\pi = \frac{1}{28}\,\pi$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\pi}{28}$$

**Respuesta**

El ángulo en radianes es $\dfrac{\pi}{28}$

**559.** Dada la siguiente figura:




Calcular la expresión

$$E = \frac{a+b}{a-b}$$

**Datos:**

$L_1 = 7, \quad r_1 = b$

$L_2 = 9, \quad r_2 = a$

Longitud de arco:

$$L = r \cdot \theta$$

**Resolución**

Por la longitud de arco, calculando para ambos sectores circulares:

$$L_1 = r_1\theta \;\longrightarrow\; 7 = b \cdot \theta \;\Rightarrow\; b = \frac{7}{\theta}$$

$$L_2 = r_2\theta \;\longrightarrow\; 9 = a \cdot \theta \;\Rightarrow\; a = \frac{9}{\theta}$$

Luego, la expresión simplificada será:

$$E = \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{9}{\theta} + \frac{7}{\theta}}{\frac{9}{\theta} - \frac{7}{\theta}} = \frac{\frac{16}{\theta}}{\frac{2}{\theta}} = \frac{16}{2} = 8 \quad \Rightarrow \quad E = 8$$

**Respuesta**

La expresión simplificada de $E$ es 8.

## Razones trigonométricas

**560.** Calcular la siguiente expresión trigonométrica:

$$E = 2\,\text{sen}\,30^o + \sec^2 45^o + \tan^3\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

### Resolución
Notaciones:

$$\sec^2\theta = (\sec\theta)^2; \quad \tan^3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\tan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)^3; \quad \frac{\pi}{4} = 45^o$$

Luego

$$\begin{aligned} E &= 2\,\text{sen}\,30^o + \sec^2 45^o + \tan^3\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\,\text{sen}\,30^o + (\sec 45^o)^2 + (\tan 45^o)^3 \\ &= 2\cdot\frac{1}{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 + (1)^3 = 1 + 2 + 1 = 4 \\ &\Rightarrow \quad E = 4 \end{aligned}$$

**Respuesta**
El valor de la expresión simplificada es 4.

**561.** Dada la expresión:

$$\text{cosec}(4x + 10^o) = \sec(x + 20^o)$$

Calcular el valor de "$x$".

### Resolución
Por razones trigonométricas de ángulos complementarios:

$$\alpha + \beta = 90^o \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \cos\beta \\ \tan\alpha = \text{cotan}\,\beta \\ \sec\alpha = \text{cosec}\,\beta \end{cases}$$

La expresión, se reduce a:

$$\begin{aligned} \text{cosec}(4x + 10^o) = \sec(x + 20^o) \quad &\Rightarrow \quad 4x + 10^o + x + 20^o = 90^o \\ &\Rightarrow \quad 5x = 60^o \\ &\Rightarrow \quad x = 12^o \end{aligned}$$

**Respuesta**
El valor de "$x$" es $12^o$.

**562.** Desde lo más alto de una torre de 80 metros de altura se observa una paloma con un ángulo de depresión de $53^o$. ¿A qué distancia de la base de la torre se encuentra la paloma?

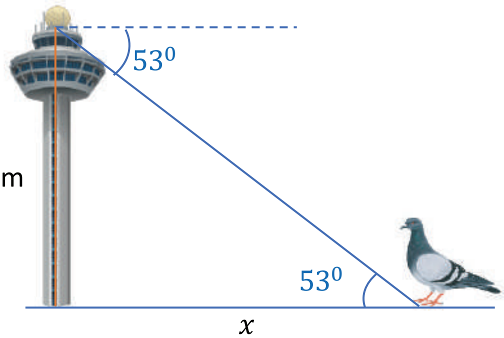
**Datos:**

$h = 80$ m

$\beta = 53^0$, $x = ?$

### Resolución
Para tener una idea clara, se grafica el esquema de acuerdo al problema:

## Gráfica:




En la gráfica, el ángulo de depresión es el mismo que el ángulo de la base.
Por razón trigonométrica y de la gráfica, se tiene:

$$\tan 53^o = \frac{80}{x}$$

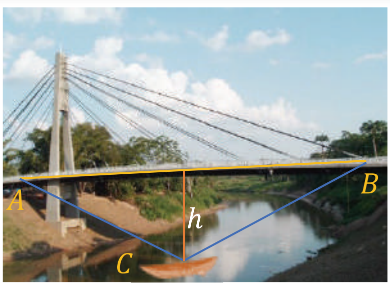
Reemplazando datos y calculando la distancia de la base:

$$\tan 53^o = \frac{80}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{80}{\tan 53^o} = \frac{80}{\frac{4}{3}} = \frac{240}{4} = 60$$

$$\Rightarrow \quad x = 60 \text{ m}$$

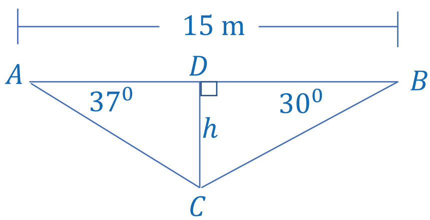
**Respuesta**
La distancia entre la paloma y la base de la torre es de 60 metros.

**563.** Desde los extremos $A$ y $B$, que están a una distancia de 15 m, en un puente se observa una canoa debajo de dicho puente, con ángulos de depresión de $37^o$ y $30^o$ respectivamente. Calcular la altura de la canoa al puente.



*Fuente: Puente de amistad Pando - Bolivia*

## Gráfica:




## Datos:

$d_{AB} = 15$ m
$\angle A = 37^o$
$\angle B = 30^o$
$h = ?$

## Resolución

De la gráfica y por razones trigonométricas, se tiene:

$$\Delta\text{ADC} \longrightarrow \cot 37^o = \frac{AD}{h} \Rightarrow AD = \frac{4}{3}h \qquad \cot 37^0 = \frac{4}{3}$$

$$\Delta\text{BDC} \longrightarrow \cot 30^o = \frac{DB}{h} \Rightarrow DB = \sqrt{3}\,h \qquad \cot 30^o = \sqrt{3}$$

Como la distancia del puente es $d_{AB} = AB = 15$ m, entonces

$$AB = AD + DB \quad \Rightarrow \quad 15 = \frac{4}{3}h + \sqrt{3}\,h = \frac{(4+3\sqrt{3})h}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 15 = \frac{(4+3\sqrt{3})h}{3} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{15\cdot 3}{4+3\sqrt{3}} \approx 4{,}89 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad h = 4{,}89 \text{ m}$$

**Respuesta**
La altura de la canoa al puente es 4,89 metros.

**564.** Hallar el valor de la siguiente expresión:

$$E = \frac{a^2 \cos 0° - ab \operatorname{sen} 90° + b^2 \sec 360°}{a^2 \tan 45° + ab \operatorname{cosec} 270° - b^2 \cos 180°}$$

**Resolución**

Note que los siguientes son ángulos cuadrangulares:

$\cos 0^o = 1$, $\operatorname{sen} 90^o = 1$, $\sec 360^o = 1$, $\operatorname{cosec} 270^o = -1$, $\cos 180^o = -1$

Y $\tan 45^o = 1$ no es cuadrangular.

Luego reemplazando en la expresión:

$$E = \frac{a^2\cdot 1 - ab\cdot 1 + b^2\cdot 1}{a^2\cdot 1 + ab\,(-1) - b^2(-1)} = \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} = 1$$

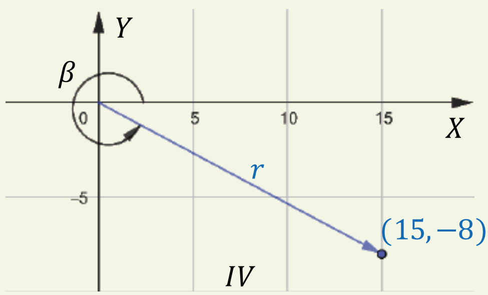
$$\Rightarrow \quad E = 1$$

**Respuesta**
El valor de la expresión $E$ es 1.

**565.** Dado el gráfico:

Hallar:

$F = \operatorname{cotan}\beta - \operatorname{cosec}\beta$




**Resolución**

Para determinar las razones trigonométricas, se debe calcular el radio vector de la gráfica:

$$r = \sqrt{15^2 + (-8)^2} = \sqrt{289} = 17 \quad \Rightarrow \quad r = 17$$

Razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{y}{r} = -\frac{8}{17} \qquad \operatorname{cotan}\beta = \frac{x}{y} = -\frac{15}{8}$$

$$\cos\beta = \frac{x}{r} = \frac{15}{17} \qquad \sec\beta = \frac{r}{x} = \frac{17}{15}$$

$$\tan\beta = \frac{y}{x} = -\frac{8}{15} \qquad \operatorname{cosec}\beta = \frac{r}{y} = -\frac{17}{8}$$

Luego

$$F = \operatorname{cotan}\beta - \operatorname{cosec}\beta = -\frac{15}{8} - \left(-\frac{17}{8}\right) = -\frac{15}{8} + \frac{17}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{1}{4}$$

**Respuesta**

El valor de la expresión F es $\frac{1}{4}$

**566.** Determinar el máximo valor de "$k$" para que la siguiente igualdad exista:

$$\operatorname{sen}\theta = 3k - 2$$

**Resolución**

Se sabe que $\operatorname{sen}\theta$ está limitada entre -1 y 1, es decir:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq 3k - 2 \leq 1 \qquad \text{sumando por 2}$$

$$\Rightarrow \quad -1 + 2 \leq 3k - 2 + 2 \leq 1 + 2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq 3k \leq 3 \qquad \text{dividiendo por 3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq k \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad k = 1 \qquad \text{máximo valor que toma } k$$

**Respuesta**

El máximo valor que toma $k$ es 1.

**567.** Dada la función:

$$\cos\theta = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$$

¿para qué valor de $x$ la función trigonométrica toma su mínimo valor relativo?

**Resolución**

Desarrollando la función dada:

$$\cos\theta = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

Como

$$-1 \le \cos\theta \le 1$$

Luego, el valor mínimo relativo del coseno es -1, entonces

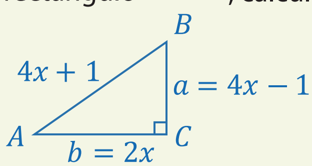
$$\frac{x+1}{x-1} = -1 \quad \Rightarrow \quad x+1 = -(x-1) \quad \Rightarrow \quad x+1 = -x+1$$
$$\Rightarrow \quad 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

**Respuesta**

El valor mínimo que toma la función trigonométrica, cuando $x$ es 0.

## Triángulos rectángulos y oblicuángulos

**568.** Dado un triángulo rectángulo $\Delta ABC$, calcular $a$–$b$.




**Resolución**

De la figura, aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$(4x+1)^2 = (2x)^2 + (4x-1)^2$$
$$\Rightarrow \quad 16x^2 + 8x + 1 = 4x^2 + 16x^2 - 8x + 1$$
$$\Rightarrow \quad 4x^2 - 16x = 0$$
$$\Rightarrow \quad 4x(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \qquad x = 4$$

se considera solo el valor $x$=4:

$$a = 4\cdot 4 - 1 = 15 \quad \Rightarrow \quad a = 15$$
$$b = 2\cdot 4 = 8 \quad \Rightarrow \quad b = 8$$

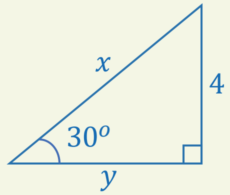
Luego

$$a - b = 15 - 8 = 7 \quad \Rightarrow \quad a - b = 7$$

**Respuesta**

La diferencia $a$-$b$ es 7.

**569.** Calcular el valor de $F = x + y\sqrt{3}$, en la siguiente figura:




## Resolución

De la figura, la función seno es:

$$\text{sen } 30^0 = \frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{\text{sen } 30^o} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 8 \qquad (1)$$

Luego por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = y^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x^2 - 4^2}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad y = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad y = 4\sqrt{3}$$

Luego

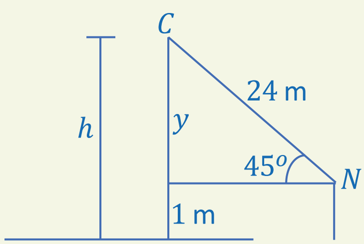
$$F = x + y\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 8 + 12 = 20$$

$$\Rightarrow \quad F = 20$$

**Respuesta**

El valor de F es 20.

**570.** Un niño tiene una cometa de juguete, la cual hace volar sosteniendo una cuerda a un metro del suelo. La cuerda se tensa formando un ángulo de $45^o$ con respecto a la horizontal. Hallar la altura de la cometa con respecto al suelo si el niño suelta 24 metros de cuerda.




## Resolución

De la figura, por la función seno:

$$\text{sen } 45^0 = \frac{y}{24} \quad \Rightarrow \quad y = 24 \cdot \text{sen } 45^o = 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

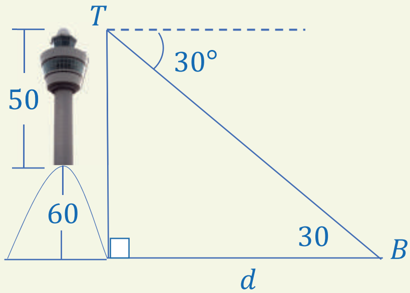
$$\Rightarrow \quad y = 12\sqrt{2}$$

Luego, la altura es

$$h = y + 1 = 12\sqrt{2} + 1 \approx 18 \quad \Rightarrow \quad h = 18\,\text{m}$$

**Respuesta**
La altura de la cometa con respecto al suelo es de 18 metros.

**571.** En una torre de control de 50 m que está sobre una colina de 60 m de alto junto a un lago, se encuentra un observador que mide el ángulo de depresión de $30^o$ de un bote situado en el lago. ¿A qué distancia de la orilla de la colina se encuentra el bote?




**Resolución**

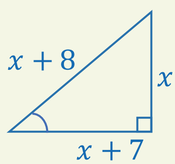
De la figura, por ángulos alternos e internos, se tiene que $\angle B = 30^o$ y basta aplicar la función tangente:

$$\tan 30^0 = \frac{50 + 60}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{110}{\tan 30^o} \approx 190{,}5$$

$$\Rightarrow \quad d = 190{,}5$$

**Respuesta**
La distancia desde el pie de la colina hasta el bote es de 190,5 m

**572.** Hallar el valor de $x$, en el siguiente triángulo dado:




**Resolución**

Aplicando Teorema de Pitágoras:

$$(x + 8)^2 = (x + 7)^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 16x + 64 = x^2 + 14x + 49 + x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x + 3)(x - 5) = 0$$

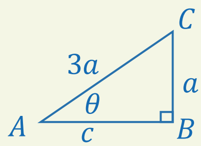
$$\Rightarrow \quad x = -3, \qquad x = 5$$

$x$ = -3 no satisface la solución, pues el lado de un triángulo debe ser positivo.

**Respuesta**

El valor es 5.

**573.** Hallar el valor de los ángulos agudos en la siguiente figura:




## Resolución

En el triángulo ΔABC dado, la función seno es:

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 20°$$

$$\Rightarrow \quad \hat{A} = 20°$$

Por la suma de ángulos internos, se tiene:

$$\hat{C} + \hat{A} + 90° = 180° \quad \Rightarrow \quad \hat{C} = 180° - 20° - 90°$$

$$\Rightarrow \quad \hat{C} = 70°$$

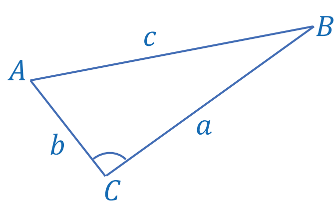
**Respuesta**

Los ángulos agudos son $20^o$ y $70^o$.

**574.** En un triángulo ΔABC, reducir la expresión siguiente:

$$H = \frac{\operatorname{sen} B}{b} - \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

## Resolución




Sea ΔABC un triángulo cualquiera. Por ley de seno se tiene:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

De donde

$$b = \frac{c \cdot \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$$

Luego:

$$H = \frac{\operatorname{sen} B}{b} - \frac{\operatorname{sen} C}{c} = \frac{\operatorname{sen} B}{\frac{c \cdot \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}} - \frac{\operatorname{sen} C}{c} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} - \frac{\operatorname{sen} C}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = 0$$

**Respuesta**

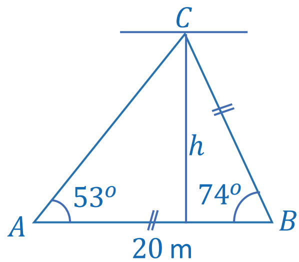
La expresión reducida es 0.

**575.** La distancia entre dos puntos A y B es de 20 m, los ángulos de elevación de un globo respecto a dichos puntos son $53^o$ y $74^o$. ¿A qué altura del suelo se encuentra?

**Datos:**

$d = 20$
$\theta = 53^o$
$\alpha = 74^o$
$h = ?$

**Gráfica:**




**Resolución**

En el triángulo $\Delta ABC$, por ángulos internos:

$$53^o + 74^o + \angle C = 180^o \quad \Rightarrow \quad \angle C = 53^o$$

Así, $\Delta ABC$ es isósceles, entonces BC=20, luego:

$$\operatorname{sen} 74° = \frac{h}{BC} \quad \Rightarrow \quad h = BC \cdot \operatorname{sen} 74° = 20 \cdot (0{,}96) = 19{,}2$$

$$\Rightarrow \quad h = 19{,}2$$

**Respuesta**
El globo se encuentra a una altura de 19,2 m.

## Identidades trigonométricas

**576.** Reducir la expresión:

$$E = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}\,\sqrt{1 + \cot^2 x}\,\sqrt{\sec^2 x - 1}$$

**Resolución**

Aplicando las identidades pitagóricas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \operatorname{cosec}^2 x = \cot^2 x + 1; \quad \sec^2 x = \tan^2 x + 1$$

Luego:

$$E = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}\,\sqrt{1 + \cot^2 x}\,\sqrt{\sec^2 x - 1}$$

$$= \sqrt{\cos^2 x}\,\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x}\,\sqrt{\tan^2 x} = \cos x \operatorname{cosec} x \tan x$$

$$= \cos x \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1 \quad \Rightarrow \quad E = 1$$

**Respuesta**
La expresión reducida es 1.

**577.** Simplificar:

$$M=\frac{\tan^2 x\,\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{cotan}^2 x-\cos^2 x}{\tan^2 x-\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{cotan}^2 x\cos^2 x}$$

## Resolución

Aplicando las identidades pitagóricas y razones trigonometricas:

$$\tan x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x};\qquad \operatorname{cotan} x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Luego:

$$M=\frac{\overbrace{\tan^2 x\,\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{cotan}^2 x-\cos^2 x}^{M_1}}{\underbrace{\tan^2 x-\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{cotan}^2 x\cos^2 x}_{M_2}}\qquad (1)$$

Reduciendo $M_1$:

$$M_1=\tan^2 x\,\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{cotan}^2 x-\cos^2 x=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\cdot\operatorname{sen}^2 x+\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}-\cos^2 x$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^6 x+\cos^4 x-\cos^4 x\,\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x\,\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^6 x+\cos^4 x(1-\operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x\,\operatorname{sen}^2 x}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^6 x+\cos^4 x\cos^2 x}{\cos^2 x\,\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x}{\cos^2 x\,\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\Rightarrow\quad M_1=\frac{\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x}{\cos^2 x\,\operatorname{sen}^2 x}$$

Reduciendo $M_2$:

$$M_2=\tan^2 x-\operatorname{sen}^2 x+\cot^2 x\cos^2 x=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}-\operatorname{sen}^2 x+\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\cdot\cos^2 x$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^4 x-\operatorname{sen}^4 x\cos^2 x+\cos^6 x}{\cos^2 x\,\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^4 x(1-\cos^2 x)+\cos^6 x}{\cos^2 x\,\operatorname{sen}^2 x}$$

$$=\frac{\sin^4 x\ \operatorname{sen}^2 x+\cos^6 x}{\cos^2 x\,\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^6 x\ +\cos^6 x}{\cos^2 x\,\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\Rightarrow\quad M_2=\frac{\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x}{\cos^2 x\,\operatorname{sen}^2 x}$$

Luego, en (1):

$$M=\frac{M_1}{M_2}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x}{\cos^2 x\,\operatorname{sen}^2 x}}{\dfrac{\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x}{\cos^2 x\,\operatorname{sen}^2 x}}=1\qquad\Rightarrow\qquad M=1$$

**Respuesta**
La expresión simplificada es 1.

**578.** Simplificar la expresión:

$$H = 5\,\text{sen}^4 x\,\text{cosec}^4 x + 6\tan^3 x\,\text{cotan}^3 x - 7\cos^2 x\sec^2 x$$

## Resolución

Aplicando las identidades pitagóricas:

$$\text{cosec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x}; \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad \text{cotan}\, x = \frac{1}{\tan x}$$

Luego:

$$H = 5\,\text{sen}^4 x\,\text{cosec}^4 x + 6\tan^3 x\,\text{cotan}^3 x - 7\cos^2 x\sec^2 x$$

$$= 5\,\text{sen}^4 x \cdot \frac{1}{\text{sen}^4 x} + 6\tan^3 x \cdot \frac{1}{\tan^3 x} - 7\cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 5 + 6 - 7 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad H = 4$$

**Respuesta**
La expresión simplificada es 4.

**579.** Verificar:

$$\cos\theta = \text{sen}(30^o + \theta) + \cos(60^o + \theta)$$

## Resolución

Partiendo del lado derecho de la identidad.

$$\text{sen}(30^o + \theta) + \cos(60^o + \theta) =$$

$$= (\text{sen}\, 30^o \cos\theta + \cos 30^o\,\text{sen}\,\theta) + (\cos 60^o \cos\theta - \text{sen}\, 60^o\,\text{sen}\,\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\text{sen}\,\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\theta = \cos\theta$$

**Respuesta**
La expresión dada es una identidad.

**580.** Simplificar la expresión:

$$E=\frac{2\cos(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}+\tan\alpha$$

## Resolución

Por la propiedad, identidad de suma:

$$E=\frac{2\cos(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}+\tan\alpha$$

$$=\frac{2(\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)}{(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)-(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)}+\tan\alpha$$

$$=\frac{2(\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)}{2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}+\tan\alpha$$

$$=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}+\tan\alpha$$

$$=\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}-\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}+\tan\alpha=\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\tan\alpha$$

$$=\operatorname{cotan}\beta-\tan\alpha+\tan\alpha=\operatorname{cotan}\beta \qquad \Rightarrow \qquad E=\operatorname{cotan}\beta$$

**Respuesta**

La expresión simplificada de $E$ es $\operatorname{cotan}\beta$

**581.** Verificar la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{\operatorname{cosec}A\sec B}{\sec(A+B)}=\frac{1}{\tan A}-\frac{1}{\operatorname{cotan}B}$$

## Resolución

Aplicando las identidades inversas:

$$\operatorname{cosec}x=\frac{1}{\operatorname{sen}x};\quad \sec x=\frac{1}{\cos x};\quad \tan x=\frac{1}{\operatorname{cotan}x}$$

Luego:

$$\frac{\operatorname{cosec}A\sec B}{\sec(A+B)}=\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}A}\cdot\frac{1}{\cos B}}{\frac{1}{\cos(A+B)}}=\frac{\cos(A+B)}{\operatorname{sen}A\cos B}$$

$$=\frac{\cos A\cos B-\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A\cos B}$$

$$= \frac{\cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \cos B} - \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A \cos B} = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} - \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B}$$

$$= \operatorname{cotan} A - \tan B = \frac{1}{\tan A} - \frac{1}{\operatorname{cotan} B}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{cosec} A \sec B}{\sec(A+B)} = \frac{1}{\tan A} - \frac{1}{\operatorname{cotan} B}$$

**Respuesta**

La expresión dada es una identidad.

**582.** Simplificar la expresión siguiente:

$$F = \frac{\tan x + \operatorname{cotan} x}{\tan x - \operatorname{cotan} x}$$

**Resolución**

Multiplicando por el conjugado del denominador:

$$F = \frac{\tan x + \operatorname{cotan} x}{\tan x - \operatorname{cotan} x} \cdot \frac{\tan x + \operatorname{cotan} x}{\tan x + \operatorname{cotan} x} = \frac{(\tan x + \operatorname{cotan} x)^2}{\tan^2 x - \operatorname{cotan}^2 x}$$

$$= \frac{\tan^2 x + 2\tan x \operatorname{cotan} x + \operatorname{cotan}^2 x}{\tan^2 x - \operatorname{cotan}^2 x}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 2\tan x \cdot \dfrac{1}{\tan x} + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x} + 2}{\dfrac{\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x + 2\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x}$$

$$= \frac{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2}{(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}$$

$$= \frac{\dfrac{1-\cos 2x}{2} + \dfrac{1+\cos 2x}{2}}{\dfrac{1-\cos 2x}{2} - \dfrac{1+\cos 2x}{2}} = \frac{\dfrac{1-\cos 2x + 1 + \cos 2x}{2}}{\dfrac{1-\cos 2x - 1 - \cos 2x}{2}}$$

$$= \frac{2}{-2\cos 2x} = -\sec 2x$$

$$\Rightarrow \quad F = -\sec 2x$$

**Respuesta**

La expresión simplificada de F es $-\sec 2x$

**583.** Reducir la siguiente expresión:

$$E=\frac{1-\tan^2(45^o-B)}{1+\tan^2(45^o-B)}$$

## Resolución

Por la identidad:

$$\tan^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

Luego:

$$E=\frac{1-\tan^2(45^o-B)}{1+\tan^2(45^o-B)}=\frac{1-\dfrac{1-\cos[2(45^o-B)]}{1+\cos[2(45^o-B)]}}{1+\dfrac{1-\cos[2(45^o-B)]}{1+\cos[2(45^o-B)]}}$$

$$=\frac{\dfrac{1+\cos(90^o-2B)-1+\cos(90^o-2B)}{1+\cos(90^o-2B)}}{\dfrac{1+\cos(90^o-2B)+1-\cos(90^o-2B)}{1+\cos(90^o-2B)}}$$

$$=\frac{2\cos(90^o-2B)}{2}$$

$$=\cos(90^o-2B)=\cos 90^o\cos 2B+\operatorname{sen}90^o\operatorname{sen}2B$$

$$=0\cdot\cos 2B+1\cdot\operatorname{sen}2B=\operatorname{sen}2B$$

$$\Rightarrow\quad E=\operatorname{sen}2B$$

**Respuesta**

La expresión reducida es $\operatorname{sen}2B$

**584.** Verificar:

$$\frac{\operatorname{sen}4\beta+\operatorname{sen}2\beta}{\cos 4\beta+\cos 2\beta}=\tan 3\beta$$

## Resolución

Por las fórmulas suma y producto:

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Luego:

$$\frac{\operatorname{sen}4\beta+\operatorname{sen}2\beta}{\cos 4\beta+\cos 2\beta}=\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{4\beta+2\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\beta-2\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{4\beta+2\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\beta-2\beta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}(3\beta)\cdot\cos(\beta)}{\cos(3\beta)\cdot\cos(\beta)}=\frac{\operatorname{sen}(3\beta)}{\cos(3\beta)}=\tan 3\beta$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\operatorname{sen}4\beta+\operatorname{sen}2\beta}{\cos 4\beta+\cos 2\beta}=\tan 3\beta$$

**Respuesta**

La expresión dada es una identidad.

**585.** Simplificar la siguiente expresión:

$$H=\frac{\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}4x+\operatorname{sen}6x+\operatorname{sen}8x+\operatorname{sen}10x}{1+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x+\cos 10x}$$

## Resolución

Se agrupa los términos de manera conveniente y aplicando las propiedades del ejemplo anterior:

$$H=\frac{(\operatorname{sen}8x+\operatorname{sen}2x)+(\operatorname{sen}6x+\operatorname{sen}4x)+\operatorname{sen}10x}{1+\cos 10x+(\cos 8x+\cos 2x)+(\cos 6x+\cos 4x)}$$

Donde:

$$\operatorname{sen}8x+\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}\left(\frac{8x+2x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{8x-2x}{2}\right)=2\operatorname{sen}5x\cos 3x$$

$$\operatorname{sen}6x+\operatorname{sen}4x=2\operatorname{sen}\left(\frac{6x+4x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{6x-4x}{2}\right)=2\operatorname{sen}5x\cos x$$

$$\operatorname{sen}10x=\operatorname{sen}(2\cdot 5x)=2\operatorname{sen}5x\cos 5x$$

$$1+\cos 10x=1+\cos(2\cdot 5x)=1+2\cos^2 5x-1=2\cos^2 5x$$

$$\cos 8x+\cos 2x=2\cos\left(\frac{8x+2x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{8x-2x}{2}\right)=2\cos 5x\cos 3x$$

$$\cos 6x+\cos 4x=2\cos\left(\frac{6x+4x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{6x-4x}{2}\right)=2\cos 5x\cos x$$

Entonces

$$H = \frac{2\,\text{sen}\,5x\cos 3x + 2\,\text{sen}\,5x\cos x + 2\,\text{sen}\,5x\cos 5x}{2\cos^2 5x + 2\cos 5x\cos 3x + 2\cos 5x\cos x}$$

$$= \frac{2\,\text{sen}\,5x\,(\cos 3x + \cos x + \cos 5x)}{2\cos 5x(\cos 5x + \cos 3x + \cos x)}$$

$$= \frac{\text{sen}\,5x}{\cos 5x} = \tan 5x$$

$$\Rightarrow \quad H = \tan 5x$$

**Respuesta**

La expresión simplificada es $\tan 5x$

## Funciones trigonométricas

**586.** Calcular la amplitud, el periodo y trazar la gráfica de $y = -2\,\text{sen}\,3x$

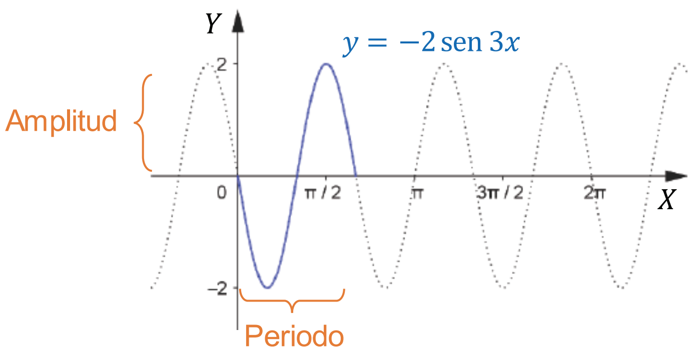
**Resolución**

Considerando la función seno:

$$y = -2\,\text{sen}\,3x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = |-2| = 2 & \leftarrow \quad \text{Amplitud} \\ T = \dfrac{2\pi}{|3|} = \dfrac{2\pi}{3} & \leftarrow \quad \text{Periodo} \end{cases}$$

Luego, la gráfica tiene amplitud 2 y periodo $\dfrac{2\pi}{3}$

**Gráfica:**




**Respuesta**

La amplitud es 2 y el periodo es $\dfrac{2\pi}{3}$

**587.** Calcular la amplitud, el periodo y trazar la gráfica de $y = 3\cos 2x$

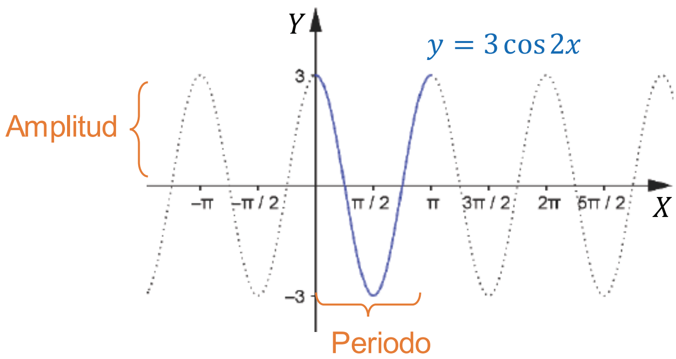
## Resolución

Considerando la función coseno:

$$y = 3\cos 2x \quad \Rightarrow \begin{cases} A = |3| = 3 & \leftarrow \quad \text{Amplitud} \\ T = \dfrac{2\pi}{|2|} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi & \leftarrow \quad \text{Periodo} \end{cases}$$

Luego, la gráfica tiene amplitud 3 y periodo $\pi$.

## Gráfica:




**Respuesta**
La amplitud es 3 y el periodo es $\pi$.

**588.** Calcular la amplitud, el periodo y trazar la gráfica de $y = -3\cos 2x$.

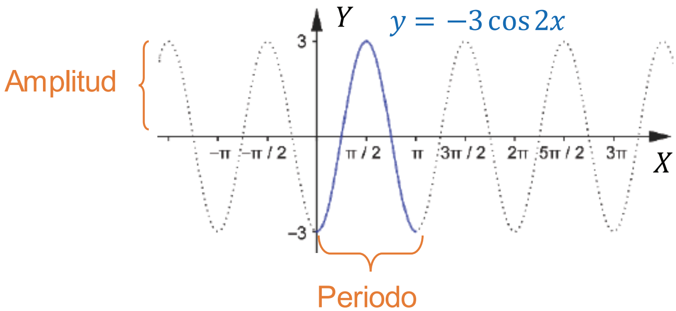
## Resolución

Considerando la función coseno:

$$y = -3\cos 2x \quad \Rightarrow \begin{cases} A = |-3| = 3 & \leftarrow \quad \text{Amplitud} \\ T = \dfrac{2\pi}{|2|} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi & \leftarrow \quad \text{Periodo} \end{cases}$$

Luego, la gráfica tiene amplitud 3 y periodo $\pi$.

**Gráfica:**




**Respuesta**
La amplitud es 3 y el periodo es $\pi$.

**589.** Calcular la amplitud, el periodo y trazar la gráfica de $y = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

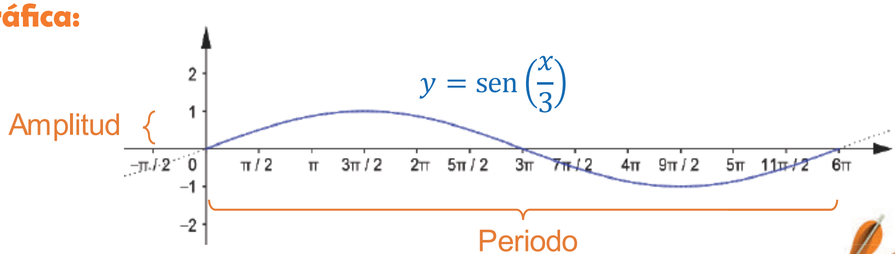
## Resolución

Considerando la función seno:

$$y = \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} A = |1| = 1 & \leftarrow \quad \text{Amplitud} \\ T = \dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi & \leftarrow \quad \text{Periodo} \end{cases}$$

Luego, la gráfica tiene amplitud 1 y periodo $6\pi$.

**Gráfica:**




**Respuesta**
La amplitud es 1 y el periodo es $6\pi$.

**590.** Calcular el periodo, las asíntotas verticales y el desplazamiento de fase de $y = 3\tan(2x)$

## Resolución

Considerando la función tangente.

Periodo:

$$y = 3\tan(2x) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$$

Asíntotas verticales:

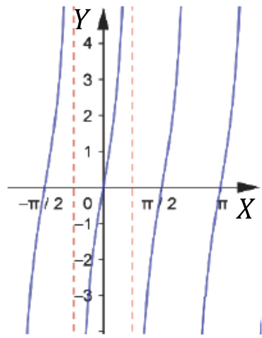
$$2x = \pm\frac{\pi}{2}$$

Entonces

$$x = -\frac{\pi}{4} \qquad \wedge \qquad x = \frac{\pi}{4}$$

Desplazamiento de fase no existe.

**Gráfica:**




**Respuesta**

El periodo es $\frac{\pi}{2}$ y las asíntotas son $-\frac{\pi}{4}$ ; $\frac{\pi}{4}$.

**591.** Graficar la función $y = 2\,\text{sen}\left(\frac{4x}{3}\right) + 1$ , determinar su amplitud y su periodo.

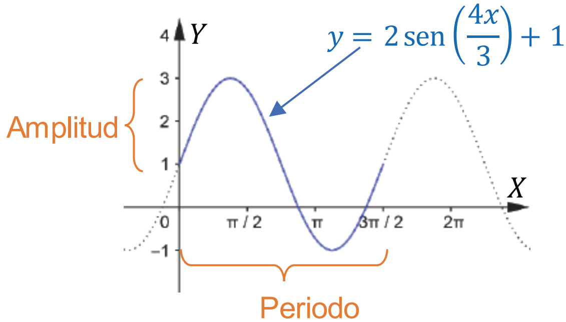
**Resolución**

Considerando la función seno:

$$y = 2\,\text{sen}\left(\frac{4x}{3}\right) + 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = |2| = 2 & \leftarrow \quad \text{Amplitud} \\ T = \dfrac{2\pi}{\left|\frac{4}{3}\right|} = \dfrac{2\pi}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3\pi}{2} & \leftarrow \quad \text{Periodo} \end{cases}$$

Luego, la gráfica tiene amplitud 2 y periodo $\dfrac{3\pi}{2}$.

**Gráfica:**




**Respuesta**

La amplitud es 2 y el periodo es: $\frac{3\pi}{2}$

**592.** Graficar la función $y = 3 - 2\cos 4x$, determinar su amplitud y su periodo.

**Resolución**

Considerando la función coseno:

$$y = 3 - 2\cos 4x$$

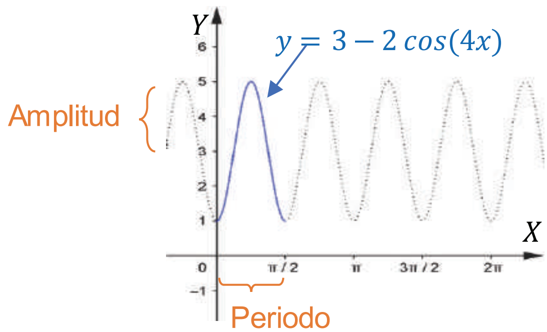
Amplitud:

$$A = |-2| = 2 \quad \Longrightarrow \quad A = 2$$

Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{\pi}{2}$$

Traslación: La gráfica se traslada 3 unidades en el eje "$Y$".




**Respuesta** La amplitud es 2 y el periodo es $\frac{\pi}{2}$.

## Ecuaciones trigonométricas

**593.** Resolver la siguiente ecuación:

$$\operatorname{sen}(2x + 20^o) - \operatorname{sen}(140^o - x) = 0$$

**Resolución**

Por la inversa de seno y despejando la incógnita:

$$\operatorname{sen}(2x + 20^o) - \operatorname{sen}(140^o - x) = 0 \ \Rightarrow \ \operatorname{sen}(2x + 20^o) = \operatorname{sen}(140^o - x)$$

$$\Rightarrow \ \operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}(2x + 20^o)\right) = \operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}(140^o - x)\right)$$

$$\Rightarrow \ 2x + 20^o = 140^o - x$$

$$\Rightarrow \ 3x = 140^o - 20^o = 120^o$$

$$\Rightarrow \ x = \frac{120^o}{3} = 40^o \quad \Rightarrow \quad x = 40^o$$

**Respuesta** La solución de la ecuación es $40^o$.

**594.** Hallar la solución principal de la siguiente ecuación:

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$$

**Resolución**

Aplicando la inversa de coseno y despejando incógnita:

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=0 \;\Rightarrow\; \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \;\Rightarrow\; 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\; 2x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi-3\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{24}$$

**Respuesta**

La solución principal de la ecuación es: $\frac{\pi}{24}$

**595.** Resolver la siguiente ecuación:

$$\operatorname{sen} 2x-\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=0, \qquad 0\le x\le 2\pi$$

**Resolución**

Aplicando $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$:

$$\operatorname{sen} 2x-\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} 2x-(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x)=0$$

$$\Rightarrow\; \operatorname{sen} 2x=1$$

$$\Rightarrow\; 2x=\operatorname{arcsen}(1)=\frac{\pi}{2}$$

Para $k$=0,1, en la solución fundamental, se tiene:

$$2x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 0=\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 2x_1=\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x_1=\frac{\pi}{4}$$

$$2x_2=\pi-\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 1 \;\Rightarrow\; 2x_2=3\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4} \;\Rightarrow\; x_2=\frac{5\pi}{4}$$

De donde

$$x_1, x_2 \in [0;\ 2\pi]$$

**Respuesta**

El conjunto solución de la ecuación es: $C_s=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$

**596.** Resolver la siguiente ecuación:

$$\cos 2x+\cos x=-1, \qquad 0\le x\le 2\pi$$

## Resolución

Aplicando la identidad trigonométrica $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$:

$$\begin{aligned}\cos 2x + \cos x = -1 \quad &\Rightarrow \quad 2\cos^2 x - 1 + \cos x = -1\\ &\Rightarrow \quad \cos x\,(2\cos x + 1) = 0\\ &\Rightarrow \quad \cos x = 0 \quad \vee \quad 2\cos x + 1 = 0\end{aligned}$$

$i)$ $\cos x = 0$, entonces

$$x = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

Para $k$=0,1, en la solución fundamental se tiene:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\cdot 0 = \dfrac{\pi}{2} & \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{\pi}{2}\\ x_2 = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\cdot 1 = \dfrac{3\pi}{2} & \Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{3\pi}{2}\end{cases} \qquad \text{donde; } x_1, x_2 \in [0;\ 2\pi]$$

$ii)$ $2\cos x + 1 = 0$, entonces

$$x = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Para $k$=0,1, en la solución fundamental se tiene:

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi\cdot 0 = \dfrac{2\pi}{3} & \Rightarrow \quad x_3 = \dfrac{2\pi}{3}\\ x_4 = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi\cdot 1 = \dfrac{4\pi}{3} & \Rightarrow \quad x_4 = \dfrac{4\pi}{3}\end{cases} \qquad \text{donde; } x_3, x_4 \in [0;\ 2\pi]$$

**Respuesta**

$$C_s = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$$

**597.** Hallar la solución principal de la siguiente ecuación:

$$\sqrt{3}\tan^2 x - \left(\sqrt{3} + 1\right)\tan x - 1 = 0$$

## Resolución

$$\sqrt{3}\tan^2 x - \left(\sqrt{3} + 1\right)\tan x - 1 = 0$$

Factorizando:

$$\left(\sqrt{3}\tan x - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\tan x - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}\tan x - \sqrt{3} = 0 \quad \vee \quad \sqrt{3}\tan x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tan x = 1 \quad \vee \quad \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$i)$ $\tan x = 1$, entonces

$$x_1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4}$$

$ii)$ $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ entonces

$$x_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{6}$$

**Respuesta** $C_s = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right\}$

**598.** Hallar la solución principal de la siguiente ecuación:

$$3\tan^2 x - \sec^2 x - 1 = 0$$

**Resolución**

Aplicando la identidad trigonométrica $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$:

$$3\tan^2 x - \sec^2 x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\tan^2 x - (1 + \tan^2 x) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\tan^2 x = 2 \quad \Rightarrow \quad (\tan x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \tan x = \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \arctan(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4}$$

**Respuesta** $C_s = \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$

**599.** Hallar la solución principal de la siguiente ecuación:

$$\cos 4x - \cos 2x - 1 - \operatorname{sen}^2 x = 0$$

**Resolución**

Aplicando la identidad trigonométrica:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1; \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Donde: $\cos 4x = \cos(2 \cdot 2x) = 2\cos^2 2x - 1$

Luego, la ecuación se transforma en

$$2\cos^2 2x - 1 - \cos 2x - 1 - \frac{1 - \cos 2x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow\quad 2\cos^2 2x-1-\cos 2x-1-\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}=0$$

$$\Rightarrow\quad 2\cos^2 2x-\frac{\cos 2x}{2}-\frac{5}{2}=0$$

$$\Rightarrow\quad 4\cos^2 2x-\cos 2x-5=0$$

$$\Rightarrow\quad (4\cos 2x-5)(\cos 2x+1)=0$$

$$\Rightarrow\quad \cos 2x=\frac{5}{4}\quad \vee\quad \cos 2x=-1$$

Solo se considera $\cos 2x=-1$, entonces

$$2x=\arccos(-1)=\pi$$

Valores principales, para $k$=0, en la solución fundamental se tiene:

$$\begin{cases} 2x_1=\pi+2\pi\cdot 0=\pi & \Rightarrow\quad x_1=\dfrac{\pi}{2} \\ 2x_2=-\pi+2\pi\cdot 0=-\pi & \Rightarrow\quad x_2=-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

**Respuesta**

$$C_s=\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$$

**600.** Hallar la solución principal de la siguiente ecuación:

$$(\operatorname{sen}x+\cos x)^2-(\operatorname{sen}x-\cos x)^2-1=0$$

**Resolución**

Desarrollando binomio al cuadrado:

$$(\operatorname{sen}x+\cos x)^2-(\operatorname{sen}x-\cos x)^2-1=0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2 x-(\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2 x)=1$$

$$\Rightarrow\quad 2(2\operatorname{sen}x\cos x)=1\quad\Rightarrow\quad 2\operatorname{sen}2x=1\quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}2x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad 2x=\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$$

Para k=0 en la solución fundamental se tiene:

$$2x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 0\quad\Rightarrow\quad x_1=\frac{\pi}{12}$$

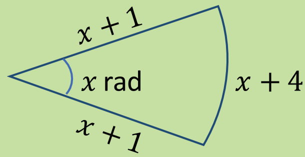
$$2x_2=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 0=\frac{5\pi}{6}\quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{5\pi}{12}$$

**Respuesta**

$$C_s=\left\{\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right\}$$

## Sistemas de medición de ángulos y longitudes de arco

**601.** Hallar el valor de "$x$", en la siguiente figura:




### Datos:

$L = x+4$
$r = x+1$
$\theta = x$ rad

### Resolución

Aplicando la longitud de arco:

$$L = r \cdot \theta$$

Reemplazando datos se obtiene el valor pedido:

$$L = r \cdot \theta \quad \Rightarrow \quad x+4 = (x+1)x \quad \Rightarrow \quad x+4 = x^2 + x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 4 \qquad \text{considerando la parte positiva}$$

$$\Rightarrow \quad x = 2$$

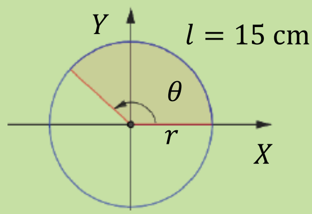
**Respuesta**

El valor de "$x$" es 2.

**602.** En la figura dada, un ángulo central $\theta$ está subtendido por un arco de longitud $l$=30 cm en una circunferencia de radio 5 cm.

a) Hallar la medida de $\theta$ en grados.

b) Determinar el área del sector circular determinado por $\theta$ en grados.




### Datos:

$l = 15$ cm
$r = 5$ cm
$\theta = ?$

### Resolución

a) Medida de θ en grados:

$$L = r \cdot \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{l}{r} = \frac{15}{5} = 3 \quad \Rightarrow \quad \theta = 3 \text{ rad}$$

Transformado en grados

$$\theta = 3(1 \text{ rad}) = 3 \cdot \left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{540°}{\pi} \approx 171{,}9° \quad \Rightarrow \quad \theta = 171{,}9°$$

b) Área del sector circular:

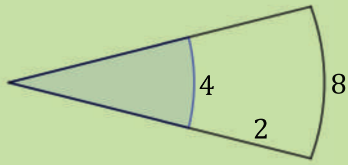
$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot 3 = \; 37{,}5 \quad \Rightarrow \quad A = 37{,}5 \text{ cm}^2$$

**Respuesta**

El ángulo y área son: $171{,}9°$ y $37{,}5 \text{ cm}^2$.

**Avanzado** 03

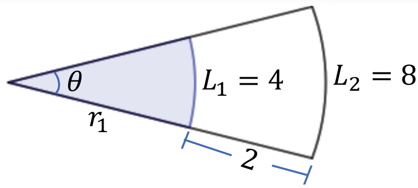
**603.** Calcular el área de la región sombreada, en la siguiente figura:




## Datos:

$L_1 = 4$
$L_2 = 8$
$r_2 = r_1 + 2$

Figura:




## Resolución

Por la longitud de arco:

$$L_1 = r_1 \cdot \theta \quad \Rightarrow \quad 4 = r_1 \cdot \theta \qquad (1)$$
$$L_2 = (r_1 + 2) \cdot \theta \quad \Rightarrow \quad 8 = (r_1 + 2) \cdot \theta \qquad (2)$$

De (1) y (2):

$$\frac{4}{r_1} = \frac{8}{r_1 + 2} \quad \Rightarrow \quad 4(r_1 + 2) = 8r_1 \quad \Rightarrow \quad 4r_1 + 8 = 8r_1$$
$$\Rightarrow \quad 4r_1 = 8 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 2 \qquad (3)$$

Luego, en (1) se tiene el ángulo en radianes:

$$\theta = \frac{4}{r_1} = \frac{4}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \theta = 2\,\text{rad} \qquad (4)$$

Por el área de un sector circular, se obtiene el área de la región sombreada:

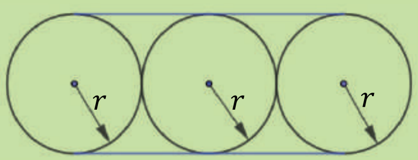
$$A_S = \frac{1}{2} r_1^2 \theta$$

Sustituyendo (3) y (4):

$$A_S = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad A_S = 4\,\text{u}^2$$

**Respuesta** El área sombreada es $4\,\text{u}^2$.

**604.** Andrés tiene las ruedas atadas por una cuerda, si el radio de la rueda es $r = \frac{1}{2}$, determina la longitud de la cuerda que cubre todo el sistema, como se ve en la figura:



**Datos:**

Arcos:

$L_{c_1},\ L_{c_2}$

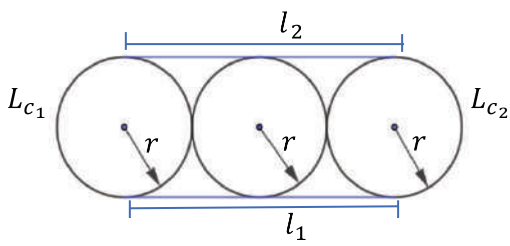
Longitudes:

$l_1,\ l_2$

Radio:

$r = \dfrac{1}{2}\ \text{cm}$

Figura:




**Resolución**

Para calcular la longitud de ambos extremos, se aplica la longitud de la circunferencia:

$$L_c = 2\pi r$$

Longitud de los arcos extremos:

$$\left.\begin{array}{c} L_{c_1} = \pi r \\ \wedge \\ L_{c_2} = \pi r \end{array}\right\} \quad (1)$$

Longitud de los lados paralelos:

$$\left.\begin{array}{c} l_1 = 4r \\ \wedge \\ l_2 = 4r \end{array}\right\} \quad (2)$$

Por (1) y (2), se obtiene la longitud de la cuerda del sistema:

$$L = 2L_{c_1} + 2l_1 = 2\pi r + 2\cdot 4r = 2r(\pi + 4)$$

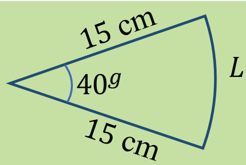
$$= 2\cdot\frac{1}{2}(\pi + 4) = \pi + 4 \qquad \text{por dato}$$

$$\Rightarrow \quad L = (\pi + 4)\ \text{cm}$$

**Respuesta**

La longitud que cubre todo el sistema es $(\pi+4)$ cm.

**605.** Dada la figura:




Determinar la longitud de arco $L$ del sector circular en radianes.

**Datos:**

$r = 15$ cm

$\theta = 40^g$

$L = ?$

**Resolución**

Por longitud de arco:

$$L = r\cdot\theta \qquad (1)$$

Convirtiendo el ángulo $\theta = 40^g$ en radianes, se aplica la relación de los tres sistemas

$$180^o = 200^g = \pi\ \text{rad}$$

dividiendo por 5:

$$36^o = 40^g = \frac{\pi}{5}\ \text{rad} \qquad (2)$$

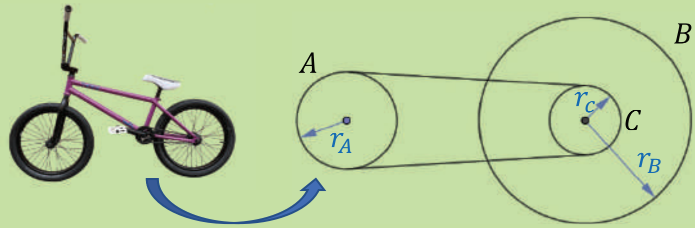
Luego, sustituyendo los datos en (1), se tiene:

$$L = 15 \cdot 40^g \overset{(2)}{\Rightarrow} L = 15 \cdot \frac{\pi}{5} \text{ rad} = 3\pi \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \quad L = 3\pi \text{ rad}$$

**Respuesta**
La longitud de $L$ es $3\pi$ rad.

**606.** En una bicicleta, en el volante del pedal tiene radio $r_A = 10$ cm y radio del piñón $r_C = 5$ cm como se ve en la figura:




Del sistema, determinar cuántas vueltas gira la rueda de atrás de la bicicleta $B$, cuando el volante del pedal $A$ da 24 vueltas.

**Datos:**

$r_A = 10$ cm
$r_C = 5$ cm
$r_B = ?$
\# de vueltas:
$n_A = 24$ vueltas
$n_B = ?$

**Resolución**

Por relación de ruedas y poleas, del sistema se cumple que:

$$n_A r_A = n_C r_C$$

Reemplazando datos:

$$24 \cdot 10 = n_C \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad n_C = \frac{24 \cdot 10}{5} = 48$$

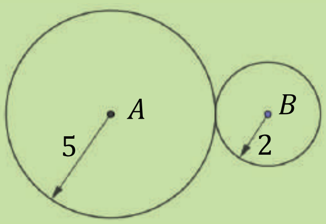
$$\Rightarrow \quad n_C = 48 \qquad (2)$$

Luego, por la relación de poleas concéntricas:

$$n_B = n_C \overset{(2)}{\Rightarrow} n_B = 48$$

**Respuesta**
La rueda B de la bicicleta gira 48 vueltas.

**607.** En la figura, se muestran las ruedas fijas $A$ y $B$, donde la rueda $A$ gira $(2n\text{-}4)$ vueltas y B gira $(3n+4)$ vueltas. Calcular el valor de "$n$".



**Datos:**
# de vueltas:

$$n_A = (2n-4)$$
$$n_B = (3n+4)$$
$$r_A = 5,\ r_B = 2$$

**Resolución**

Por relación de ruedas y poleas, de la figura se tiene:

$$n_A r_A = n_B r_B$$

Reemplazando datos:

$$(2n-4)\cdot 5 = (3n+4)\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 10n - 20 = 6n + 8$$
$$\Rightarrow \quad 4n = 28$$
$$\Rightarrow \quad n = 7$$

**Respuesta** El valor de "$n$" es 7.

**608.** Los radios de la rueda de un tractor son $(x+1)$ m y $(x-1)$ m. Si la rueda mayor da $(x-2)$ vueltas y la menor $(x-1)$ vueltas, ¿Cuántas vueltas en total darán las dos ruedas?

**Datos:**
Radios:

$$r_A = (x+1)\ \text{m}$$
$$r_B = (x-1)\ \text{m}$$
$$n_A = (x-2)\ \text{vueltas}$$
$$n_B = (x-1)\ \text{vueltas}$$

Número total de vueltas de ambas ruedas:

$$N_T = n_A + n_B = ?$$

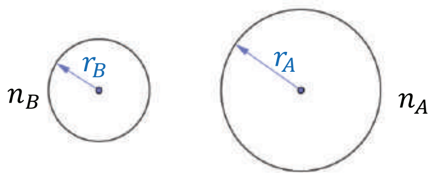
*Fuente: Gobierno municipal de Sacaba*

**Resolución**

De la imagen, las ruedas del tractor representadas como círculos:

Por relación de ruedas se tiene:

$$n_A r_A = n_B r_B$$




Reemplazando datos:

$$(x-2)(x+1) = (x-1)(x-1) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - 2x + 1$$
$$\Rightarrow \quad x = 3 \qquad (1)$$

En el dato, tenemos:

$$n_A = (x-2) \overset{(1)}{\Rightarrow} n_A = 3 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad n_A = 1$$
$$n_B = (x-1) \overset{(1)}{\Rightarrow} n_B = 3 - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad n_B = 2$$

Luego

$$N_T = n_A + n_B = 1 + 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad N_T = 3 \text{ vueltas}$$

**Respuesta**
Las dos ruedas del tractor darán 3 vueltas.

**609.** El extremo de un péndulo de 60 cm de longitud describe un arco de 30 cm. ¿Cuál es el ángulo de oscilación del péndulo?

**Datos:**

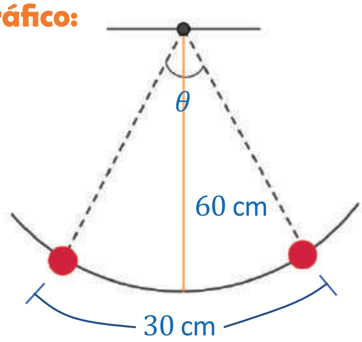
$l = 60$ cm (longitud)

$L = 30$ cm (arco)

Ángulo de oscilación:

$\theta = ?$

**Gráfico:**




**Resolución**

Por longitud de arco:

$$L = l \cdot \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{L}{l}$$

Reemplazando datos

$$\theta = \frac{30 \text{ cm}}{60 \text{ cm}} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0{,}5 \text{ rad} \quad \longrightarrow \quad R = 0{,}5 \text{ rad}$$

Ahora, de la relación fundamental de sistemas:

$$\frac{S}{180^o} = \frac{R}{\pi \text{ rad}} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{180^o \cdot R}{\pi \text{ rad}} = \frac{180^o \cdot 0{,}5 \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} = 28^o 38' 52''$$

$$\Rightarrow \quad S = 28^o 38' 52''$$

**Respuesta**
El ángulo de oscilación es de $28^o 38' 52''$.

## Razones trigonométricas

**610.** Calcular el valor de "$y$" en la siguiente ecuación:

$$\frac{y + \sec 60^o}{y - \sec 60^o} = \tan 60^o$$

## Resolución

Reemplazando los ángulos notables, se tiene:

$$\frac{y+\sec 60^o}{y-\sec 60^o}=\tan 60^o \;\Rightarrow\; \frac{y+2}{y-2}=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; y+2=\sqrt{3}(y-2)$$

$$\Rightarrow\; y+2=\sqrt{3}y-2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\; y\left(\sqrt{3}-1\right)=2\left(1+\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow\; y=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

Racionalizando el denominador

$$y=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\frac{2\left(1+2\sqrt{3}+3\right)}{3-1}$$

$$=\frac{2\left(4+2\sqrt{3}\right)}{2}=4+2\sqrt{3} \;\Rightarrow\; y=4+2\sqrt{3}$$

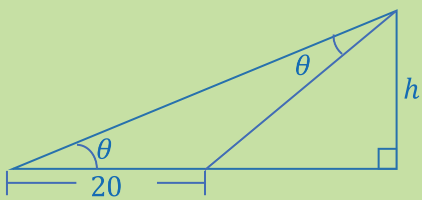
**Respuesta** El valor de "$y$" es $4+2\sqrt{3}$

**611.** Dada la figura siguiente:

Se cumple que:

$\tan(30^o-\theta)=\cot an(30^o+3\cdot\theta)$

Calcular el valor de "$h$".

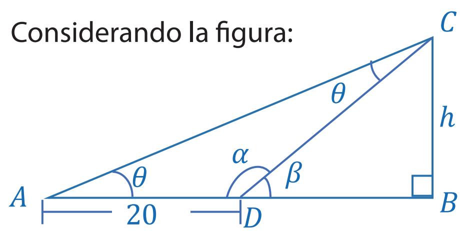



## Resolución

De la figura, el triangulo $\Delta ADC$ es isósceles, ya que dos de sus ángulos son iguales, entonces los lados adyacentes son iguales:

$$AD=20=DC$$

Considerando la figura:




Propiedad por ángulos complementarios:

$$x+y=90^o \iff \tan x=\cot an\, y$$

Luego, de enunciado

$$\tan(30^o-\theta)=\cot an(30^o+3\cdot\theta) \;\Rightarrow\; 30^o-\theta+30^o+3\cdot\theta=90^o$$

$$\Rightarrow \quad 2\cdot\theta = 90^o - 60^o \quad \Rightarrow \quad \theta = 15^o$$

Por otro lado, por la suma de ángulos internos en el triangulo $\Delta ADC$:

$$2\theta + \alpha = 180^o \quad \Rightarrow \quad \alpha = 180^o - 2\cdot 15^o = 150^o \quad \Rightarrow \quad \alpha = 150^o$$

Ahora en el segmento AB, por ángulos suplementarios:

$$\alpha + \beta = 180^o \quad \Rightarrow \quad \beta = 180^o - 150^o = 30^o \quad \Rightarrow \quad \beta = 30^o$$

Luego, de la figura se tiene:

$$\text{sen } 30^o = \frac{h}{20} \quad \Rightarrow \quad h = 20\cdot \text{sen } 30^o = 20\cdot\frac{1}{2} = 10$$

$$\Rightarrow \quad h = 10$$

**Respuesta**

El valor de "$h$" es 10.

**612.** Un hombre de 1,67 m que se encuentra a 9 m de un árbol, observa la parte alta con un ángulo de elevación $\theta$. Luego se acerca 5 m en dirección al árbol y vuelve a observar el mismo punto con un ángulo de elevación $90^o$-$\theta$. Calcule la altura del árbol.

**Datos:**

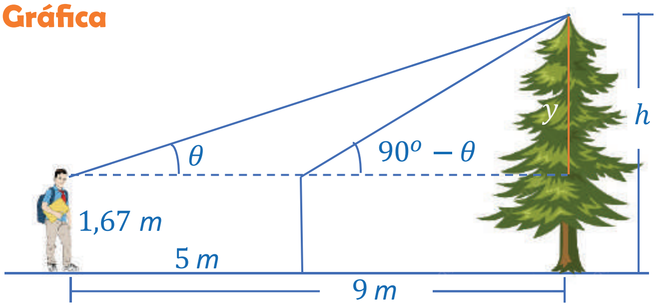
$H = 1.67$ m

$d_1 = 9$ m

$d_2 = 5$ m

$h = ?$

**Gráfica**




**Resolución**

De la gráfica, por razón geométrica:

$$\tan(90^o - \theta) = \frac{y}{9-5} = \frac{y}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{cotan}\,\theta = \frac{y}{4} \qquad (1)$$

Por otro lado

$$\cot\theta = \frac{9}{y} \qquad (2)$$

Luego igualando (1) y (2):

$$\frac{y}{4} = \frac{9}{y} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{36} = 6 \quad \Rightarrow \quad y = 6$$

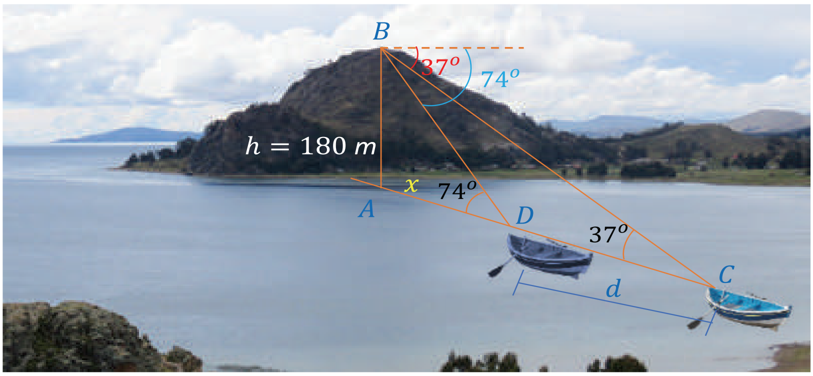
Altura de árbol:

$$h = H + y = 1{,}67 + 6 = 7{,}67 \quad \Rightarrow \quad h = 7{,}67$$

**Respuesta**
La altura del árbol es 7,67 m.

**613.** Desde una montaña de 180 metros de altura un hombre observa dos botes. El ángulo de depresión de los botes que están situados en la dirección sur del observador son $37^o$ y $74^o$: Hallar la distancia que los separa.

Gráfica:




*Fuente: Bolivia andando - Dragon dormido*

**Datos:**

$h = 180$ m

$\theta = 74^o$

$\beta = 37^o$

$AD = x$

$d = DC = ?$

**Resolución**

De la figura, en los triángulos $\Delta ABD$ y $\Delta ABC$, se tiene:

$$\tan 74^o = \frac{180}{x} \quad \Rightarrow x = \frac{180}{\tan 74^o} = \frac{180}{\frac{24}{7}} = 52,5$$

$$\Rightarrow \quad x = 52,5 \text{ m} \qquad (1)$$

$$\tan 37^o = \frac{180}{x+d} \quad \Rightarrow \quad x + d = \frac{180}{\tan 37^o} = \frac{180}{\frac{3}{4}} = 240$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \; 52,5 + d = 240$$

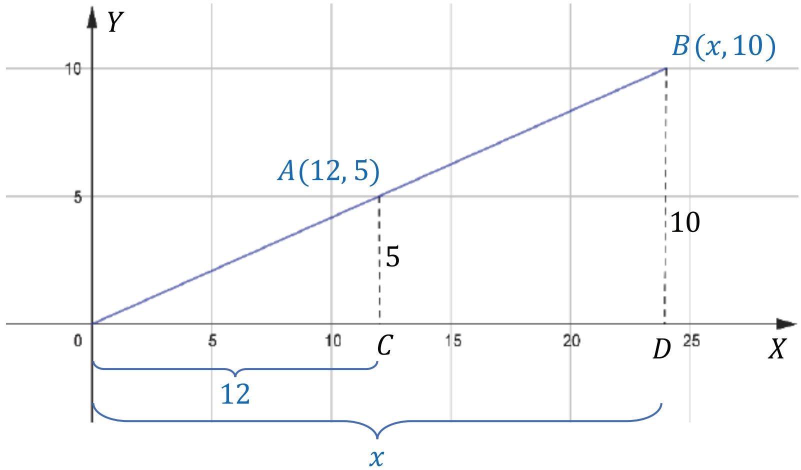
$$\Rightarrow \; d = 187,5 \text{ m}$$

**Respuesta**
La distancia de separación entre botes es de 187,5 metros.

**614.** Si los puntos A(12,5) y B($x$,10) están alineados con el origen, hallar la abscisa de B y su radio vector.

**Resolución**

Graficando los puntos en un plano cartesiano, donde se debe calcular la abscisa $x$ de $B$ y su radio vector $r$.




En el gráfico, los triángulos ΔOAC y ΔOBD son semejantes, entonces

$$\frac{OD}{OC}=\frac{DB}{CA} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{12}=\frac{10}{5}=2 \quad \Rightarrow \quad x=24$$

Cálculo del radio vector:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{24^2+10^2}=\sqrt{676}=26$$

$$\Rightarrow \quad r=26$$

**Respuesta**

La abscisa de $B$ es 24 y su radio vector es 26.

**615.** Calcular el valor de la siguiente expresión trigonométrica:

$$E=\frac{2\cos 2\pi-\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\tan \pi}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sec \pi+3\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$$

**Resolución**

Convirtiendo radianes a grados, como $\pi$=180$^o$, entonces

$$2\pi=360^o; \quad \frac{3\pi}{2}=270^o; \quad \frac{\pi}{2}=90^o$$

Luego:

$$E=\frac{2\cos 360°-\operatorname{cosec} 270°+\tan 180°}{\cos 90°-\sec 180°+3\operatorname{sen} 270°}$$

Reemplazando los valores numéricos

$$E = \frac{2 \cdot 1 - (-1) + 0}{0 - (-1) + 3(-1)} = \frac{2+1}{1-3} = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E = -\frac{3}{2}$$

**Respuesta**

El valor de la expresión reducida es $-\frac{3}{2}$.

**616.** Determinar el máximo valor de la función $f$ si:

$$f(t) = (2\,\text{sen}\, t - 1)(2\,\text{sen}\, t + 1)$$

**Resolución**

Desarrollando la función

$$f(t) = (\text{sen}\, t - 1)(2\,\text{sen}\, t + 1) = 4\,\text{sen}^2\, t - 1 \qquad (1)$$

Pero, se cumple que:

$$0 \leq \text{sen}^2\, t \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 4\,\text{sen}^2\, t \leq 4$$

sumando -1

$$\Rightarrow \quad -1 \leq 4\,\text{sen}^2\, t - 1 \leq 3$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad -1 \leq f(t) \leq 3$$

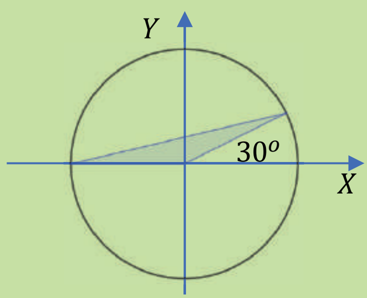
$f$ toma valor de 3

$$\Rightarrow \quad f(t) = 3$$

**Respuesta**

El máximo valor que toma $f$ es 3.

**617.** Hallar el área de la región sombreada inscrita en la circunferencia unitaria, como se ve en la figura.

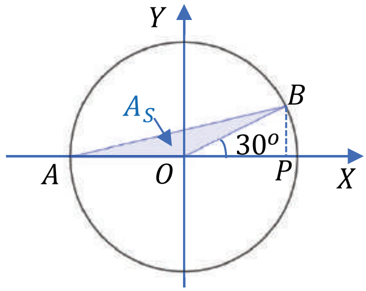


**Resolución**

El área de la región sombreada es de un triángulo ΔAOB y su área es dada por:

$$A_S = \frac{1}{2}(AO \cdot PB) \qquad (1)$$

considerando la figura:




Por razón trigonométrica se calcula:

$$\text{sen } 30^o = \frac{PB}{1} \quad \Rightarrow \quad PB = \frac{1}{2}$$

Luego, en (1):

$$A_S = \frac{1}{2}\left(1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \quad A_S = \frac{1}{4}\ \text{u}^2$$

**Respuesta**

El área de la región sombreada es $\frac{1}{4}$ u$^2$.

**618.** Dado un triángulo ΔABC, si los lados miden 5, 7 y 8. Hallar la suma de los ángulos interiores.

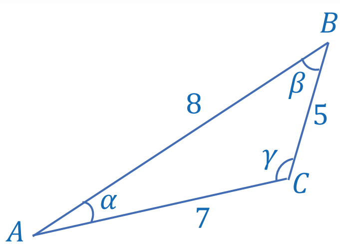
**Datos:**

$a = 5$

$b = 7$

$c = 8$

**Figura:**




**Resolución**

Aplicando ley de cosenos en el triángulo ΔABC:

Para el ángulo $\alpha$:

$$5^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad 112\ \cos\alpha = 113 - 25$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{88}{112} = \frac{11}{14}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{11}{14}\right) \approx 38{,}2^o$$

Para el ángulo $\gamma$:

$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad 70\ \cos\gamma = 74 - 64$$

$$\Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) \approx 81{,}8^o$$

Para el ángulo $\beta$:

$$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos\beta \quad \Rightarrow \quad 80 \, \cos\beta = 89 - 49$$

$$\Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

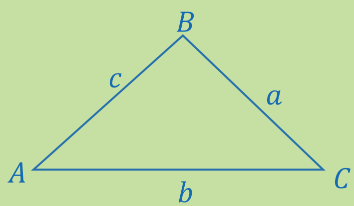
$$\Rightarrow \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^o$$

Luego:

$$\alpha + \gamma + \beta = 38{,}2^o + 81{,}8^o + 60^o = 180^o$$

**Respuesta**
La suma de los ángulos interiores es $180^o$.

**619.** Dado un triángulo ΔABC, reducir la siguiente expresión:




$$H = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

## Resolución

Por ley de cosenos en el triángulo ΔABC, con respecto al ángulo $\angle A$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Rightarrow \quad b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos A \qquad (1)$$

Luego

$$H = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \overset{(1)}{\Rightarrow} H = \frac{2bc\cos A}{2bc} = \cos A$$

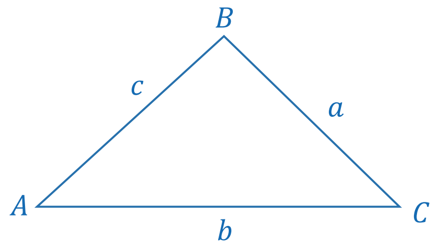
$$\Rightarrow \quad H = \cos A$$

**Respuesta**
La expresión reducida es $\cos A$.

**620.** En un triángulo ΔABC, simplificar la siguiente expresión:

$$E = \frac{a \operatorname{sen} B + b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A}$$

Considerando la figura:




**Resolución**

Por ley de senos en el triángulo ΔABC:

$$\frac{b}{\text{sen } B}=\frac{a}{\text{sen } A} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a}=\frac{\text{sen } B}{\text{sen } A} \qquad (1)$$

Luego

$$E=\frac{a \text{ sen } B+b \text{ sen } A}{\text{sen } A}=\frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A}+\frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } A}=a\cdot\frac{\text{sen } B}{\text{sen } A}+b$$

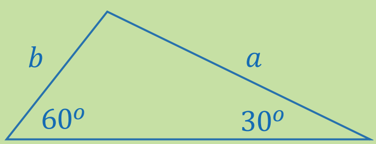
$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \ E=a\cdot\frac{b}{a}+b=b+b=2b$$

$$\Rightarrow \ E=2b$$

**Respuesta**

La expresión simplificada es $2b$.

**621.** En el siguiente triángulo dado, hallar el valor de:




$$G=\frac{a-b}{a+b}$$

**Resolución**

Aplicando ley de senos en el triángulo dado:

$$\frac{a}{\text{sen } 60^o}=\frac{b}{\text{sen } 30^o} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{\text{b sen } 60^o}{\text{sen } 30^o}=b\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=b\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \ a=b\sqrt{3} \qquad (1)$$

Luego

$$G=\frac{a-b}{a+b} \ \overset{(1)}{\Rightarrow} \ G=\frac{b\sqrt{3}-b}{b\sqrt{3}+b}=\frac{b\left(\sqrt{3}-1\right)}{b\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

Racionalizando el denominador

$$G=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}$$

$$=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\quad G=2-\sqrt{3}$$

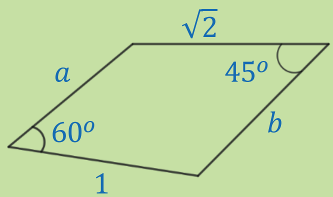
**Respuesta**

El valor de $G$ es $2-\sqrt{3}$.

**622.** Determinar el valor de

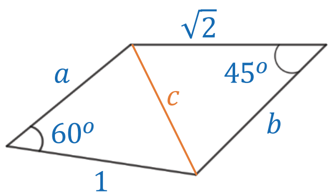
$$N=a^2-b^2+2b-a$$

en el siguiente cuadrilátero:




**Resolución**

Considerando el cuadrilátero:




Por ley de cosenos, con respecto a los ángulos $60^o$ y $45^o$.

$$c^2=a^2+1^2-2a\cos 60^o$$

$$=a^2+1-2a\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad c^2=a^2+1-a\qquad (1)$$

$$c^2=b^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2b\sqrt{2}\cos 45^o$$

$$=b^2+2-2b\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=b^2+2-2b\quad\Rightarrow\quad c^2=b^2+2-2b\qquad (2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2):

$$a^2+1-a=b^2+2-2b\quad\Rightarrow\quad a^2-b^2+2b-a=1\qquad (3)$$

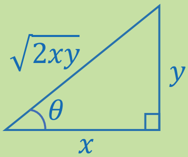
Luego (3) en la condición:

$$N=a^2-b^2+2b-a=1\quad\Rightarrow\quad N=1$$

**Respuesta**

El valor de $N$ es 1.

**623.** Determinar el valor de $M = 2\,\mathrm{sen}(\theta - 15^o) + \sec(\theta + 15^o)$, en el triángulo dado:




## Resolución

Por Teorema de Pitágoras, del triángulo se tiene:

$$\left(\sqrt{2xy}\right)^2 = x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; 2xy = x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; x^2 - 2xy + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow\; (x - y)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = y \qquad (1)$$

La función tangente en el triángulo es:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \overset{(1)}{\Rightarrow} \tan\theta = \frac{x}{x} = 1 \;\Rightarrow\; \theta = \tan^{-1}(1) = 45^o$$

$$\Rightarrow\; \theta = 45^0 \qquad (2)$$

Con (2) en la condición:

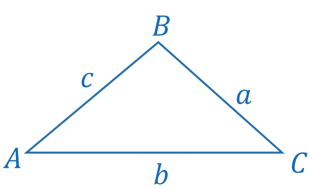
$$\begin{aligned} M &= 2\,\mathrm{sen}(\theta - 15^o) + \sec(\theta + 15^o) \\ &= 2\,\mathrm{sen}(45^o - 15^o) + \sec(45^o + 15^o) \\ &= 2\,\mathrm{sen}(30^o) + \sec(60^o) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 1 + 2 = 3 \;\Rightarrow\; M = 3 \end{aligned}$$

**Respuesta**

El valor de $M$ es 3.

**624.** En un triángulo escaleno $\Delta ABC$, si $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, hallar el ángulo $\angle A$.

Considerando el triángulo ΔABC:




## Resolución

Por ley de cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow\; 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\Rightarrow\; \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Como $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, entonces

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - (b^2 + c^2 - bc)}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - b^2 - c^2 + bc}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$$

De donde:

$$\cos A = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \angle A = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^o \quad \Rightarrow \quad \angle A = 60^o$$

**Respuesta**
La mediada del ángulo pedido es $60^o$.

**625.** ¿Cuál es la longitud de un lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 3 centímetros de radio?

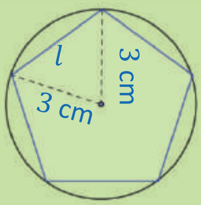
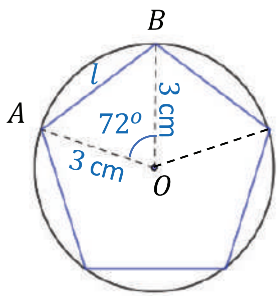



**Figura:**




Angulo interior de un polígono regular

$$i = \frac{(n-2)180^o}{n}$$

Donde:
$n$ : número de lados
$i$ : ángulo interior

**Resolución**

Como el pentágono es regular tiene $n$=5 lados, entonces la medida de cada ángulo interior es:

$$i = \frac{(n-2)180^o}{n} = \frac{(5-2)180^o}{5} = \frac{540}{5} = 108^o \quad \Rightarrow \quad i = 108^o$$

El ángulo que biseca en sus vértices es la mitad de su ángulo interior, es decir, $\angle ABO = 54^o$ y $\angle BAO = 54^o$. Por la suma de ángulos internos en el triangulo $\Delta$AOB se obtiene:

$$\angle AOB + 2 \cdot 54^o = 180^o \quad \Rightarrow \quad \angle AOB = 72^o$$

Ahora, por ley de cosenos, se obtiene el lado del pentágono:

$$l^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3\cos 72^o \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{18 - 18(0{,}31)} \approx 3{,}5$$

$$\Rightarrow \quad l = 3{,}5 \text{ cm}$$

**Respuesta**
La longitud de un lado del pentágono es 3,5 centimetros.

# Identidades trigonométricas

**626.** Simplificar la siguiente expresión:

$$N = \frac{\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x}{\operatorname{sen} x - \cos x} - \cos x$$

## Resolución

Aplicando la diferencia de cuadrados y la identidad pitagórica:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Luego:

$$\begin{aligned} N &= \frac{\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x}{\operatorname{sen} x - \cos x} - \cos x \\ &= \frac{(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\operatorname{sen} x - \cos x} - \cos x \\ &= \frac{(\operatorname{sen} x - \cos x)(\operatorname{sen} x + \cos x)(1)}{\operatorname{sen} x - \cos x} - \cos x \\ &= \operatorname{sen} x + \cos x - \cos x = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad N = \operatorname{sen} x$$

**Respuesta**

La expresión simplificada es $\operatorname{sen} x$.

**627.** Verificar la siguiente identidad:

$$\frac{\cot^2\theta}{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta} - \operatorname{cosec}^2\theta\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

## Resolución

Empezando por el lado izquierdo de la identidad:

$$\begin{aligned} \frac{\cot^2\theta}{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta} - \operatorname{cosec}^2\theta\cot^2\theta &= \cot^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta} - \operatorname{cosec}^2\theta\right) \\ &= \cot^2\theta(\sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta) \\ &= \cot^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta(\sec^2\theta - 1) \\ &= \cot^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta(\tan^2\theta) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\tan^2\theta} \cdot \operatorname{cosec}^2\theta \cdot \tan^2\theta$$

$$= \operatorname{cosec}^2\theta$$

**Respuesta**

La identidad dada es correcta.

**628.** Verificar la siguiente identidad:

$$(x \operatorname{sen}\beta \cos\theta)^2 + (x \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\theta)^2 + (x\cos\beta)^2 = x^2$$

## Resolución

Empezando por el lado izquierdo de la identidad:

$$(x \operatorname{sen}\beta \cos\theta)^2 + (x \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\theta)^2 + (x\cos\beta)^2 =$$

$$= x^2 \operatorname{sen}^2\beta \cos^2\theta + x^2 \operatorname{sen}^2\beta \operatorname{sen}^2\theta + x^2\cos^2\beta$$

$$= x^2[\operatorname{sen}^2\beta \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\beta \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\beta]$$

$$= x^2\left[\operatorname{sen}^2\beta\,\underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{1} + \cos^2\beta\right]$$

$$= x^2\,\underbrace{[\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta]}_{1} = x^2$$

**Respuesta**

La identidad dada es correcta.

**629.** Verificar la siguiente identidad:

$$\tan\beta = \frac{\tan\theta + \tan(\beta-\theta)}{1 - \tan\theta \cdot \tan(\beta-\theta)}$$

## Resolución

Empezando por el lado derecho de la identidad y la propiedad:

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$$

Luego:

$$\frac{\tan\theta + \tan(\beta-\theta)}{1 - \tan\theta \cdot \tan(\beta-\theta)} = \frac{\tan\theta + \dfrac{\tan\beta - \tan\theta}{1 + \tan\beta \cdot \tan\theta}}{1 - \tan\theta \cdot \dfrac{\tan\beta - \tan\theta}{1 + \tan\beta \cdot \tan\theta}}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan\theta(1+\tan\beta\cdot\tan\theta)+\tan\beta-\tan\theta}{1+\tan\beta\cdot\tan\theta}}{\dfrac{1+\tan\beta\cdot\tan\theta-\tan\theta(\tan\beta-\tan\theta)}{1+\tan\beta\cdot\tan\theta}}$$

$$=\frac{\tan\theta+\tan\beta\tan^2\theta+\tan\beta-\tan\theta}{1+\tan\beta\cdot\tan\theta-\tan\theta\cdot\tan\beta+\tan^2\theta}$$

$$=\frac{\tan\beta\tan^2\theta+\tan\beta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\tan\beta(\tan^2\theta+1)}{1+\tan^2\theta}$$

$$=\tan\beta$$

**Respuesta**

La identidad dada es correcta.

**630.** Si $f(x)=\cos x$ y $h\neq 0$, verifique:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\cos x\cdot\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)-\sin x\cdot\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

**Resolución**

Aplicando la definición de la función $f$ y la fórmula de la suma para coseno:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos h-\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}h-\cos x}{h}$$

$$=\frac{\cos x\cdot(\cos h-1)-\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}h}{h}$$

$$=\frac{\cos x\cdot(\cos h-1)}{h}-\frac{\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}h}{h}$$

$$=\cos x\cdot\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)-\operatorname{sen}x\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}h}{h}\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\cos x\cdot\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)-\operatorname{sen}x\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}h}{h}\right)$$

**Respuesta**

La identidad dada es correcta.

**631.** Determinar el valor de $H = \operatorname{sen} x \cos x + 1$, si $3 \operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{10}$

## Resolución

De la condición, elevando al cuadrado:

$$3 \operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{10} \;\Rightarrow\; (\cos x)^2 = \left(3 \operatorname{sen} x - \sqrt{10}\right)^2$$

$$\Rightarrow\; \cos^2 x = 9 \operatorname{sen}^2 x - 6\sqrt{10} \operatorname{sen} x + 10$$

$$\Rightarrow\; 1 - \operatorname{sen}^2 x = 9 \operatorname{sen}^2 x - 6\sqrt{10} \operatorname{sen} x + 10$$

$$\Rightarrow\; 10 \operatorname{sen}^2 x - 6\sqrt{10} \operatorname{sen} x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow\; \left(\sqrt{10} \operatorname{sen} x - 3\right)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Ahora, reemplazando en la condición:

$$3 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - \cos x = \sqrt{10} \qquad \Rightarrow \qquad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Luego:

$$H = \sin x \cos x + 1 = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + 1 = -\frac{3}{10} + 1 = \frac{7}{10}$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{7}{10}$$

**Respuesta**

El valor de H es $\frac{7}{10}$.

**632.** Verificar la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{2\cos^2 A - 1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4} - A\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + A\right)} = 1$$

## Resolución

Aplicando las identidades de suma y resta se tiene:

$$\frac{2\cos^2 A - 1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4} - A\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + A\right)} = \frac{2\cos^2 A - 1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4} - A\right)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + A\right)\right]^2}$$

$$= \frac{2\cos^2 A - (\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A)}{2\left(\dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan A}{1 + \tan\frac{\pi}{4} \cdot \tan A}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \cos A + \operatorname{sen} A \cdot \cos\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 A - \text{sen}^2 A}{2\left(\frac{1-\tan A}{1+1\cdot\tan A}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos A + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\text{sen } A\right)^2}$$

$$= \frac{(\cos A - \text{sen } A)(\cos A + \text{sen } A)}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{1-\frac{\text{sen } A}{\cos A}}{1+\frac{\text{sen } A}{\cos A}}\right)(\cos A + \text{sen } A)^2}$$

$$= \frac{\cos A - \text{sen } A}{\left(\frac{\frac{\cos A - \text{sen } A}{\cos A}}{\frac{\cos A + \text{sen } A}{\cos A}}\right)(\cos A + \text{sen } A)}$$

$$= \frac{\cos A - \text{sen } A}{\frac{\cos A - \text{sen } A}{\cos A + \text{sen } A}\cdot(\cos A + \text{sen } A)}$$

$$= \frac{\cos A - \text{sen } A}{\cos A - \text{sen } A} = 1$$

**Respuesta**
La ecuación trigonométrica dada es una identidad.

**633.** Si $x + y + z = 90^o$, reducir la siguiente expresión:

$$G = \frac{5}{\cot x \cot y} + \frac{5}{\cot x \cot z} + \frac{5}{\cot y \cot z}$$

**Resolución**
Por las identidades reciprocas se tiene:

$$G = \frac{5}{\cot x \cot y} + \frac{5}{\cot x \cot z} + \frac{5}{\cot y \cot z}$$

$$= 5\tan x \tan y + 5\tan x \tan z + 5\tan y \tan z$$

$$= 5\underbrace{(\tan x \tan y + \tan x \tan z + \tan y \tan z)}_{1} = 5\cdot 1 = 5$$

Donde: $x + y + z = 90^o \quad \Rightarrow \quad \tan x \tan y + \tan x \tan z + \tan y \tan z = 1$

$\Rightarrow \quad G = 5$

**Respuesta**
La expresión reducida de $G$ es 5.

**634.** Si $x+y+z=90^o$, entonces se cumple:

$$\tan x \tan y + \tan x \tan z + \tan y \tan z = 1$$

**Resolución**

De la condición y aplicando la función tangente:

$$x+y+z=90^o \Rightarrow x+y=90-z \Rightarrow \tan(x+y)=\tan(90-z)$$

$$\Rightarrow \tan(x+y)=\tan(90-z)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y}=\cotan z$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y}=\frac{1}{\tan z}$$

$$\Rightarrow (\tan x+\tan y)\tan z = 1-\tan x\cdot\tan y$$

$$\Rightarrow \tan x\tan z+\tan y\tan z=1-\tan x\cdot\tan y$$

$$\Rightarrow \tan x\cdot\tan y+\tan x\tan z+\tan y\tan z=1$$

**Respuesta**

La ecuación dada es una identidad.

**635.** Simplificar la siguiente función compuesta:

$$f(\beta)=\frac{1}{4}-\frac{\operatorname{sen}\beta}{2\operatorname{sen}\beta-\cfrac{1}{2\operatorname{sen}\beta-\cfrac{1}{2\operatorname{sen}\beta}}}$$

**Resolución**

$$f(\beta)=\frac{1}{4}-\frac{\operatorname{sen}\beta}{2\operatorname{sen}\beta-\cfrac{1}{2\operatorname{sen}\beta-\cfrac{1}{2\operatorname{sen}\beta}}}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{\operatorname{sen}\beta}{2\operatorname{sen}\beta-\cfrac{1}{\cfrac{4\operatorname{sen}^2\beta-1}{2\operatorname{sen}\beta}}} \quad =\frac{1}{4}-\frac{\operatorname{sen}\beta}{2\operatorname{sen}\beta-\cfrac{2\operatorname{sen}\beta}{4\operatorname{sen}^2\beta-1}}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{sen}\beta}{\dfrac{2\operatorname{sen}\beta \cdot (4\operatorname{sen}^2\beta - 1) - 2\operatorname{sen}\beta}{4\operatorname{sen}^2\beta - 1}}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{sen}\beta \cdot (4\operatorname{sen}^2\beta - 1)}{2\operatorname{sen}\beta \cdot (4\operatorname{sen}^2\beta - 1) - 2\operatorname{sen}\beta}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{sen}\beta \cdot (4\operatorname{sen}^2\beta - 1)}{2\operatorname{sen}\beta \cdot (4\operatorname{sen}^2\beta - 1 - 1)}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{4\operatorname{sen}^2\beta - 1}{4(2\operatorname{sen}^2\beta - 1)} = \frac{2\operatorname{sen}^2\beta - 1 - 4\operatorname{sen}^2\beta + 1}{4(2\operatorname{sen}^2\beta - 1)}$$

$$= \frac{-2\operatorname{sen}^2\beta}{-4(1 - 2\operatorname{sen}^2\beta)} = \frac{\dfrac{1 - \cos 2\beta}{2}}{2\cos 2\beta}$$

$$= \frac{1 - \cos 2\beta}{4\cos 2\beta} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 2\beta} - 1\right) = \frac{1}{4} \cdot (\sec 2\beta - 1)$$

**Respuesta**

La función simplificada es $\frac{1}{4} \cdot (\sec 2\beta - 1)$.

## Funciones trigonométricas

**636.** Calcula la amplitud, periodo y desplazamiento de fase y trazar la gráfica de:

$$y = \frac{4}{3}\operatorname{sen}\left(-\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\pi\right)$$

### Resolución

Considerando la función seno:

$$y = \frac{4}{3}\operatorname{sen}\left(-\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\pi\right)$$

Amplitud:

$$A = \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{4}{3}$$

Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\left|-\frac{2}{3}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi \quad \Rightarrow \quad T = 3\pi$$

Desplazamiento de fase:

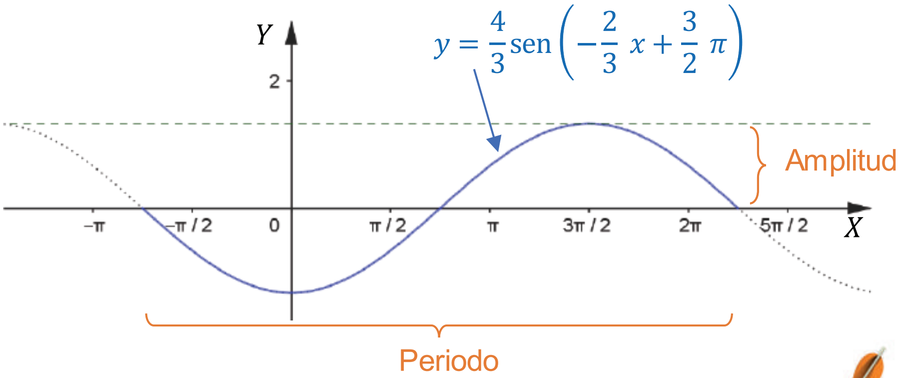
$$-\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}\pi=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{9}{4}\pi$$

y

$$-\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}\pi=2\pi \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{3}{4}\pi$$

Luego, la gráfica tiene amplitud $\frac{4}{3}$, periodo $3\pi$ y desface $\frac{9\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$.

**Gráfica:**




**Respuesta**

$$A=\frac{4}{3};\;\; T=3\pi;\; x_1=-\frac{3\pi}{4};\;\; x_2=\frac{9\pi}{4}$$

**637.** Calcular la amplitud, periodo y desplazamiento de fase, además de la gráfica de:

$$y=4\cos\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)$$

## Resolución

Considerando la función coseno:

$$y=4\cos\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)$$

Amplitud:

$$A=|4|=4 \quad \Longrightarrow \quad A=4$$

Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{|1|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad T = 2\pi$$

Desplazamiento de fase:

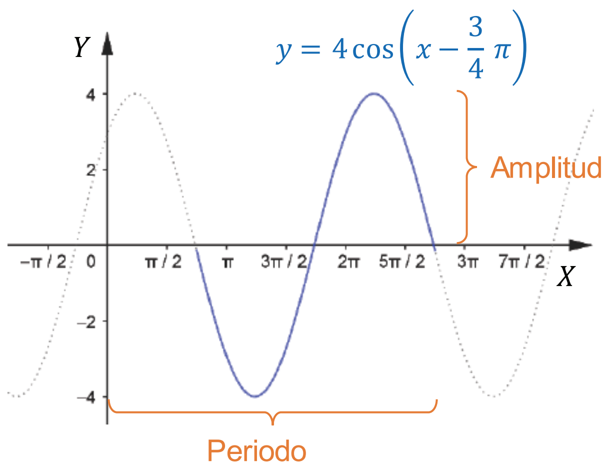
$$x - \frac{3}{4}\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{4}\pi$$

y

$$x - \frac{3}{4}\pi = 2\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{11}{4}\pi$$

Luego, la gráfica tiene amplitud 4, periodo $2\pi$ y desface $\frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$.

**Gráfica:**




**Respuesta**

$$A = 4;\quad T = 2\pi;\ x_1 = \frac{3\pi}{4};\quad x_2 = \frac{11\pi}{4}$$

**638.** Calcula la amplitud, periodo y desplazamiento de fase y traza la gráfica de:

$$y = -\operatorname{sen}(3x + \pi) - 2$$

**Resolución**

Considerando la función seno:

$$y = -\operatorname{sen}(3x + \pi) - 2$$

Amplitud:

$$A = |-1| = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = 1$$

Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{3}$$

Desplazamiento de fase:

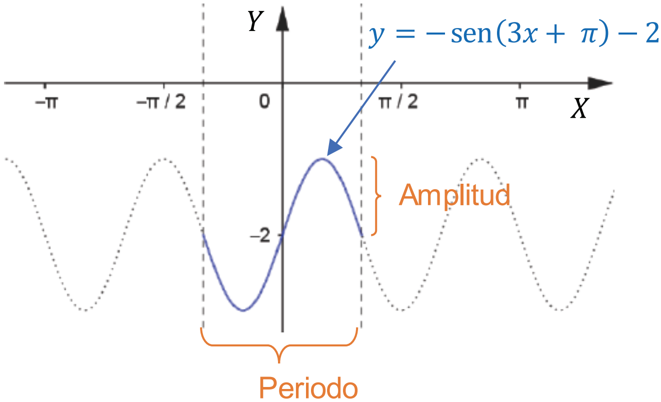
$$3x + \pi = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{3}$$

y

$$3x + \pi = 2\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}$$

Luego, la gráfica tiene amplitud 1, periodo $\frac{2\pi}{3}$ y desface $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

**Gráfica:**




**Respuesta**

$$A = 1; \quad T = \frac{2\pi}{3}; \; x_1 = -\frac{\pi}{3}; \; x_2 = \frac{\pi}{3}$$

**639.** Calcular la amplitud, periodo, desplazamiento de fase y trazar la gráfica de:

$$y = \cos(2x - \pi) + 2$$

**Resolución**

Considerando la función coseno:

$$y = \cos(2x - \pi) + 2$$

Amplitud:

$$A = |1| = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = 1$$

Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \Longrightarrow \quad T = \pi$$

Desplazamiento de fase:

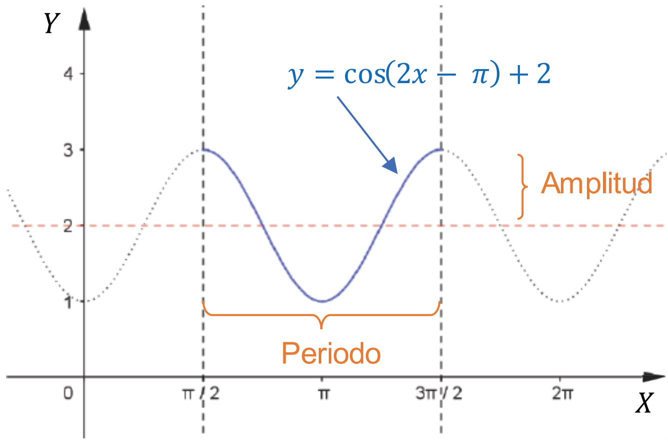
$$2x - \pi = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$$

y

$$2x - \pi = 2\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

Luego, la gráfica tiene amplitud 1, periodo $\pi$ y desface $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

**Gráfica:**




**Respuesta**

$$A = 1; \quad T = \pi; \; x_1 = \frac{\pi}{2}; \; x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

**640.** Si $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{n}{2} - 1\right)$ pertenece a la gráfica de la función de $y = \operatorname{sen} x$, hallar el valor de "$n$".

**Resolución**

como

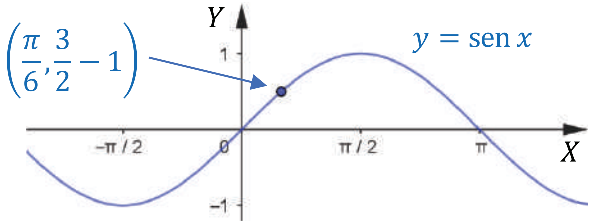
$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{n}{2} - 1\right) \in Graf(f) = \{(x, y) : \; y = \operatorname{sen} x\}$$

Entonces

$$\frac{n}{2} - 1 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{2} - 1 = \operatorname{sen} 30^o$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} - 1 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad n = 3$$

**Gráfica:**




**Respuesta**

El valor de $n$ es 3.

**641.** Calcular el valor del siguiente ángulo:

$$\beta = \operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{7}\right)\right) + \arccos\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right)$$

**Resolución**

Por la función inversa de seno y coseno:

$$\beta = \frac{13\pi}{7} - \frac{8\pi}{7}$$

$$= \frac{13\pi - 8\pi}{7} = \frac{5\pi}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \frac{5\pi}{7}$$

Función inversa de seno:

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Función inversa de coseno:

$$\arccos(\cos x) = x, \qquad x \in [0, \pi]$$

**Respuesta**

El valor del ángulo es $\frac{5\pi}{7}$.

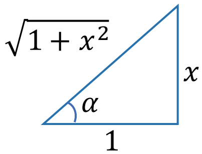
**642.** Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$E = \sec^2(\arctan x) + \operatorname{sen}^2(\arccos x)$$

**Resolución**

Por la función inversa de tangente y coseno:

$$\alpha = \arctan x \iff \tan\alpha = x$$




$$\theta = \arccos x \iff \cos\theta = x$$

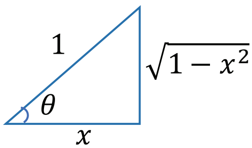
Función inversa de tangente y coseno:

$$y = \arctan x \iff x = \tan y$$

$$x \in \mathbb{R}, \qquad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \arccos x \iff x = \cos y$$

$$x \in [-1,1], \qquad y \in [0,\pi]$$




$$\sec\alpha = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1} = \sqrt{1+x^2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$$

Luego:

$$E = \sec^2(\arctan x) + \operatorname{sen}^2(\arccos x)$$

$$= \sec^2(\arctan(\tan\alpha)) + \operatorname{sen}^2(\arccos(\cos\theta)) = \sec^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\theta)$$

$$= \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = 1 + x^2 + 1 - x^2 = 2$$

$$\Rightarrow \qquad E = 2$$

**Respuesta**

El valor de la expresión dada es 2.

## Ecuaciones trigonométricas

**643.** Resolver la siguiente ecuación:

$$\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x - 1 = 0\,, \qquad 0 \le x \le 2\pi$$

### Resolución

Dividiendo entre dos a la ecuación dada:

$$\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Note que:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego, en (1):

$$\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{3}+x=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Para $k$=0,1,1, en la solución fundamental se tiene:

$$\frac{\pi}{3}+x_1=\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0$$

$$\frac{\pi}{3}+x_2=-\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 1 \quad \Rightarrow \quad x_4=2\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3}+x_3=\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 1 \quad \Rightarrow \quad x_3=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2\pi \quad \Rightarrow \quad x_3=2\pi$$

Donde:

$$x_1, x_2, x_3 \in [0;\ 2\pi]$$

**Respuesta**
El conjunto solución de la ecuación es:

$$C_s=\left\{0;\ \frac{4\pi}{3};\ 2\pi\right\}$$

**644.** Hallar la solución principal de la siguiente ecuación:

$$\log \operatorname{sen} x-\log\cos x=0$$

## Resolución

Aplicando la propiedad de logaritmos:

$$\log A-\log B=\log\left(\frac{A}{B}\right); \qquad \log_b x=y \quad \Rightarrow \quad x=b^y$$

Luego:

$$\log \operatorname{sen} x-\log\cos x=0 \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=10^0=1 \quad \Rightarrow \quad \tan x=1$$

$$\Rightarrow \quad x=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$$

Para $k$=0 en la solución fundamental se tiene:

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi\cdot 0=\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{4}$$

**Respuesta**
La solución principal de la ecuación es $\frac{\pi}{4}$.

**645.** Hallar el valor principal del ángulo $\theta$ en la siguiente ecuación:

$$\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotan} x-\sqrt{3}=0$$

## Resolución

Llevando la ecuación en términos de seno y coseno:

$$\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotan} x-\sqrt{3}=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\sqrt{3} \qquad (1)$$

Aplicando identidades del ángulo doble:

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\cos x}{2} \;\rightarrow\; \cos x=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1$$

$$\operatorname{sen} x=2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Luego en (1):

$$\frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \frac{1+2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\; \frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\; \operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3} \qquad \Rightarrow\; \tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow\; \frac{x}{2}=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$$

Valor principal se obtiene, para $k$=0 en la solución fundamental:

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+\pi\cdot 0=\frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; x=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3} \qquad \Rightarrow\; x=\frac{\pi}{3}$$

**Respuesta**

La solución principal de la ecuación es $\frac{\pi}{3}$.

**646.** Resolver el sistema de ecuación:

$$\begin{cases}\tan x+\tan y=2\\ \cos x\cos y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

**Resolución**

De la primera ecuación se tiene:

$$\tan x + \tan y = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y = 2\cos x \cos y$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(x+y) = 2\cos x \cos y$$

Luego el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = 2\cos x \cos y & (1) \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

La ecuación (1) en (2):

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(x+y) = 1 \quad \Rightarrow \quad x + y = \operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} - x \qquad (3)$$

Ahora la ecuación (3) en (2):

$$\cos x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x\left(\cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos x(0 \cdot \cos x + 1 \cdot \operatorname{sen} x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos x \operatorname{sen} x = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2x = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \qquad (4)$$

Luego, la ecuación (4) en (3):

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi - \pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{4}$$

**Respuesta**

Las soluciones del sistema son $\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}$.

**647.** Resolver el sistema de ecuación:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

## Resolución

Transformando la primera ecuación en producto:

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=1 \quad \Rightarrow\; 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=1$$

Por la segunda ecuación se tiene:

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=1 \quad \Rightarrow \quad 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=1$$

$$\Rightarrow \quad 2\cdot\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=1 \quad \Rightarrow \; \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-y}{2}=\arccos(1)=0$$

$$\Rightarrow \quad x=y$$

En la segunda ecuación:

$$x+x=\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{6}=y$$

**Respuesta**

La solución del sistema es $\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}$.

**648.** Hallar la solución particular del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\cos(x+y)=\dfrac{1}{2}\\ x-y=20^o\end{cases}$$

## Resolución

De la primera ecuación se tiene:

$$\cos(x+y)=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x+y=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}=60^o$$

$$\Rightarrow \quad y=60^o-x \qquad (1)$$

Luego, (1) en la segunda ecuación del sistema:

$$x-60^o+x=20^o \quad \Rightarrow \quad 2x=80^o \quad \Rightarrow \quad x=40^o$$

Finalmente $x$=$40^o$, en la ecuación (1):

$$y=60^o-40^o=20^o \quad \Rightarrow \quad y=20^o$$

**Respuesta**

Las soluciones del sistema son $40^o$ y $20^o$.

**649.** Hallar la solución principal del sistema:

$$\begin{cases}\cos x + \cos y = \sqrt{2} \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \sqrt{2}\end{cases}$$

## Resolución

Transformando las ecuaciones del sistema a producto:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$\cos x + \cos y = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Luego, el sistema se transforma en:

$$\begin{cases}2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sqrt{2} \qquad (1) \\ 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sqrt{2} \qquad (2)\end{cases}$$

Ahora dividiendo (1) y (2):

$$\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+y}{2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} - x \qquad (3)$$

Luego, (3) en (2):

$$2\cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\right)\cos\left(\frac{x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = \arccos(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \qquad (4)$$

Finalmente (4) en la ecuación (3):

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi - \pi}{4} = \frac{\pi}{4} \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{4}$$

**Respuesta**

Las soluciones del sistema son:

$$x=\frac{\pi}{4};y=\frac{\pi}{4}$$

**650.** Resolver el siguiente sistema de ecuación:

$$\begin{cases}\arccos x+\arccos y=0 & (1)\\ \arccos y+\arccos z=\dfrac{\pi}{3} & (2)\\ \arccos z+\arccos x=\dfrac{\pi}{6} & (3)\end{cases}$$

## Resolución

Sumando las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$2\arccos x+2\arccos y+2\arccos z=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\quad 2(\arccos x+\arccos y+\arccos z)=\frac{\pi}{2}\ \overset{(1)}{\Rightarrow}\ \arccos z=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\quad z=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad z=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ahora, $\arccos z=\dfrac{\pi}{4}$ en la ecuación (2):

$$\arccos y+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}\quad\Rightarrow\quad \arccos y=\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow\quad y=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Ahora, $\arccos y=\dfrac{\pi}{12}$ en la ecuación (1):

$$\arccos x+\frac{\pi}{12}=0\quad\Rightarrow\quad \arccos x=-\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow\quad x=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

**Respuesta**

Las soluciones del sistema son: $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};\ \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**651.** Se tiene la siguiente ecuación de ángulos trigonométricos:

$$C = S + 40^o$$

Dónde: $C$ en grados centesimales y S en grados sexagesimales
Determinar el ángulo en radianes.

a) $2\pi$ rad  b) $7\pi$ rad  c) $5\pi$ rad  d) $\pi$ rad

**Resolución**

De la relación fundamental:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C = \dfrac{200}{\pi} R \\ S = \dfrac{180}{\pi} R \end{cases} \qquad (1)$$

Luego

$$C = S + 40 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \frac{200}{\pi} R = \frac{180}{\pi} R + 40$$

$$\Rightarrow \frac{200}{\pi} R - \frac{180}{\pi} R = 40 \quad \Rightarrow \quad \frac{20}{\pi} R = 40$$

$$\Rightarrow R = \frac{40}{20} \pi = 2\pi \quad \Rightarrow \quad R = 2\pi \text{ rad}$$

**Respuesta:** $2\pi$ rad

**652.** La longitud de una circunferencia es $100$ m. El diámetro de esta circunferencia es igual a:

a) $2\pi$  b) $\frac{50}{\pi}$  c) $\frac{100}{\pi}$  d) $\frac{150}{\pi}$

**Resolución**

De la figura, donde $r$ es el radio de la circunferencia, $L$=100 m es arco y el diámetro de la circunferencia es

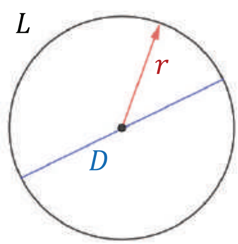
$$D = 2\,r \qquad (1)$$

La longitud de la circunferencia:

$$L = 2\pi\, r \quad \Rightarrow \quad 100 = 2\pi\, r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{50}{\pi}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} D = 2 \cdot \frac{50}{\pi} = \frac{100}{\pi} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{100}{\pi}$$

**Figura:**




**Respuesta:** $\frac{100}{\pi}$

**653.** Dados

$$A=\left(\frac{2x+3}{5}\right)^{o} \quad \wedge \quad B=\left(\frac{3x-5}{400}\right)\pi$$

Determinar "$x$" para que los ángulos $A$ y $B$ sean iguales.

a) 3 b) 7 c) 5 d) 2

## Resolución

Como $A$ y $B$ deben ser iguales, entonces:

$$A=B \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2x+3}{5}\right)^{o}=\left(\frac{3x-5}{400}\right)\pi$$

Llevando al mismo sistema sexagesimal

$$\left(\frac{2x+3}{5}\right)^{o}=\left(\frac{3x-5}{400}\right)180^{o} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x+3}{5}=\frac{3x-5}{400}\cdot 180$$

$$\Rightarrow \quad 2x+3=\frac{45}{20}(3x-5) \quad \Rightarrow \quad 40x+60=135x-225$$

$$\Rightarrow \quad 95x=285 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

**Respuesta:** 3

**654.** Determinar el valor de "$z$" en la siguiente ecuación:

$$\tan 3z=\operatorname{cotan} 2z$$

a) $9^{o}$ b) $18^{o}$ c) $36^{o}$ d) $60^{o}$

## Resolución

Por ángulos complementarios:

$$\tan 3z=\operatorname{cotan} 2z \quad \Rightarrow \quad 3z+2z=90^{o} \quad \Rightarrow \quad 5z=90^{o}$$

$$\Rightarrow \quad z=\frac{90^{o}}{5}=18^{o} \quad \Rightarrow \quad z=18^{o}$$

**Respuesta:** $18^{o}$

**655.** Dadas las ecuaciones trigonométricas siguientes:

$$\operatorname{sen} 2x=\cos 40^{o}, \qquad \tan 3x\cdot \operatorname{cotan} y=1$$

Hallar el valor de $y$ -$x$.

a) $9^{o}$ b) $18^{o}$ c) $36^{o}$ d) $60^{o}$

## Resolución

De la ecuación dada y por ángulos complementarios, se tiene:

$$\sin 2x = \cos 40^o \;\Rightarrow\; 2x + 40^o = 90^o \;\Rightarrow\; 2x = 50^o$$

$$\Rightarrow\; x = 25^o \qquad (1)$$

Por razones trigonométricas reciprocas: $\tan\alpha \cdot \text{cotan}\,\alpha = 1$
Como

$$\tan 3x \cdot \text{cotan}\, y = 1 \;\Rightarrow\; 3x = y \overset{(1)}{\Rightarrow} 3\cdot 25^o = y \;\Rightarrow\; y = 75^o$$

Luego

$$y - x = 75^o - 25^o = 50^o \;\Rightarrow\; y - x = 50^o$$

**Respuesta:** $50^o$

**656.** Desde la punta de una torre de 100 metros se observa un avión con un ángulo de elevación de $53^o$. Si la altura a la que vuela el avión es de 1300 metros, calcular la distancia del avión a la punta de la torre.

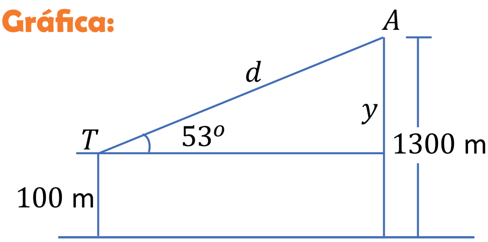
a) 1000 m b) 1800 m c) 1500 m d) 1400 m

## Resolución

**Datos:**

$h_T = 100$ m
$h_A = 1300$ m
$\theta = 53^o$
$d = ?$

**Gráfica:**




De la gráfica, se calcula la altura $y$:

$$y = 1300 - 100 = 1200 \;\Rightarrow\; y = 1200 \text{ m}$$

Por razón trigonométrica:

$$\text{cosec}\, 53^o = \frac{d}{1200} \;\Rightarrow\; d = 1200\cdot \text{cosec}\,53^o = 1200\cdot\frac{5}{4} = 1500$$

$$\Rightarrow\; d = 1500 \text{ m}$$

**Respuesta:** 1500 m

**657.** Si $\text{sen}\, 90^o + \cos 90^o = n$, determinar el valor de

$$F = \text{cotan}(n + 89^o) + \sin(90\,n)^o$$

a) 3 b) 8 c) 4 d) 1

## Resolución

Sustituyendo ángulos notables en la condición del problema:

$$\text{sen } 90^o + \cos 90^o = n \quad \Rightarrow \quad 1 + 0 = n \quad \Rightarrow \quad n = 1$$

Luego

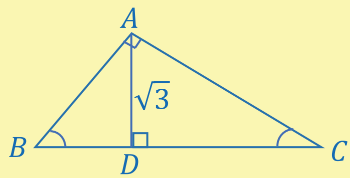
$$F = \cot an(n + 89^o) + \text{sen}(90\ n)^o = \cot an(1^0 + 89^o) + \text{san}(90 \cdot 1)^o$$

$$= \cot an(90^o) + \text{sen } 90^o = 0 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad F = 1$$

**Respuesta:** 1

**658.** Si $\angle A = 90^o$ y $3 \tan C = \tan B$, determinar la hipotenusa $BC$ del triángulo rectángulo ΔABC dada en la siguiente figura:




a) 3 b) 8 c) 4 d) 1

## Resolución

De la figura, en los triángulos $\Delta ABD$ y $\Delta ACD$, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \cot an B = \dfrac{BD}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad BD = \sqrt{3}\cot an B \\ \cot an C = \dfrac{DC}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad DC = \sqrt{3}\cot an C \end{array}\right\} \Rightarrow \quad BC = BD + DC$$

$$\Rightarrow \quad BC = \sqrt{3}(\cot an B + \cot an C) \qquad (1)$$

Por razones trigonométricas de ángulos complementarios:

$$\angle B + \angle C = 90^o \quad \Rightarrow \quad \tan B = \cot an C \qquad (2)$$

De la condición:

$$3 \tan C = \tan B \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \frac{3}{\cot an C} = \cot an C \quad \Rightarrow \quad (\cot an C)^2 = 3$$

$$\Rightarrow \quad \cot an C = \sqrt{3} \qquad (3)$$

$$3 \tan C = \tan B \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{\cot an C} = \frac{1}{\cot an B} \quad \Rightarrow \quad \cot an B = \frac{\cot C}{3}$$

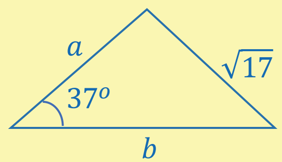
$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \quad \cot an B = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad (4)$$

Luego, (3) y (4) en (1):

$$BC = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right) = \frac{3}{3} + 3 = 1 + 3 = 4 \quad \Rightarrow \quad BC = 4$$

**Respuesta:** 4

**659.** Determinar el valor de $a^2+b^2$, si $ab=10$ en la figura dada:




a) 33 *b*) 81 c) 44 d) 17

**Resolución**

De la figura, aplicando ley de cosenos:

$$\left(\sqrt{17}\right)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 37^o \quad \Rightarrow \quad 17 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \quad 17 = a^2 + b^2 - \frac{8}{5}\,ab \qquad \text{de la condición } ab=10$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 17 + \frac{8}{5} \cdot 10 = 17 + 16 = 33$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 33$$

**Respuesta:** 33

**660.** Si $a = 3\,\text{sen}\,x\cos y$, $b = 3\,\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y$, $c = 3\cos x$, calcular:

$$S = a^2 + b^2 + c^2$$

a) 4 b) 9 c) 6 d) 10

**Resolución**

Reemplazando los valores dados en $S$:

$$S = a^2 + b^2 + c^2 = (3\,\text{sen}\,x\cos y)^2 + (3\,\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y)^2 + (3\cos x)^2$$

$$= 3^2 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 y + 3^2 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \text{sen}^2 y + 3^2 \cdot \cos^2 x$$

$$= 3^2(\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 y + \text{sen}^2 x \cdot \text{sen}^2 y + \cos^2 x)$$

$$= 9[\text{sen}^2 x\,(\cos^2 y + \text{sen}^2 y) + \cos^2 x]$$

$$= 9[\text{sen}^2 x\,(1) + \cos^2 x] = 9[\text{sen}^2 x + \cos^2 x]$$

$$= 9 \cdot 1 = 9 \quad \Rightarrow \quad S = 9$$

**Respuesta:** 9

**661.** Si $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$, calcular:

$$F = 20\operatorname{sen}(x + 45^o)$$

a) 4 b) 6 c) 1 d) 12

**Resolución**

Por la identidad de suma de ángulos:

$$F = 20\operatorname{sen}(x + 45^o) = 20(\operatorname{sen} x \cdot \cos 45^o + \cos x \cdot \operatorname{sen} 45^o)$$

$$= 20\left(\operatorname{sen} x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$= 2 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad F = 4$$

**Respuesta:** 4

**662.** Calcular el valor de $\operatorname{sen} 75^o$.

a) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ c) $\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{4}$ d) $\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{4}$

**Resolución**

Descomponiendo en suma $75^o = 45^o + 30^o$, luego:

$$\operatorname{sen} 75^o = \operatorname{sen}(45^o + 30^o) = \operatorname{sen} 45^o \cos 30^o + \cos 45^o \operatorname{sen} 30^o$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} 75^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

**Respuesta:** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

**663.** Simplificar la expresión:

$$F = \operatorname{sen}^2 x + \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x$$

a) $\cos x$ b) $1$ c) $\cos^2 x$ d) $\operatorname{sen}^2 x$

## Resolución

Factorizando:

$$F = \operatorname{sen}^2 x + \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x \;\Rightarrow\; F = \operatorname{sen}^2 x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \cos^4 x$$

$$\Rightarrow\; F = \operatorname{sen}^2 x\,(\cos^2 x) + \cos^4 x$$

$$\Rightarrow\; F = \cos^2 x\,\underbrace{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}_{1}$$

$$\Rightarrow\; F = \cos^2 x$$

**Respuesta:** $\cos^2 x$

**664.** Dado:

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} \quad \wedge \quad \tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$$

Calcular: $A = 8\tan(\alpha - \beta)$.

a) $-5$ b) $-3$ c) $5$ d) $3$

## Resolución

Por suma y diferencia de ángulos en tangente:

$$A = 8\tan(\alpha-\beta) = 8\left[\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\cdot\tan\beta}\right]$$

$$= 8\left[\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}}{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}}\right] = 8\left[\frac{\dfrac{\sqrt{3}(4+\sqrt{3}) - \sqrt{3}(4-\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})}}{\dfrac{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3}) + 3}{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})}}\right]$$

$$= 8\left[\frac{4\sqrt{3} + 3 - 4\sqrt{3} + 3}{16 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 3 + 3}\right] = 8\left[\frac{6}{16}\right] = \frac{6}{2} = 3$$

$$\Rightarrow\; A = 3$$

**Respuesta:** 3

**665.** Si $x - y = 60^o$, calcular $B = (\cos x + \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)^2$

a) 3  b) $-3$  c) 2  d) 4

**Resolución**

Desarrollando binomio al cuadrado:

$$B = (\cos x + \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)^2$$

$$= \cos^2 x + 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}^2 y$$

$$= \underbrace{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}_{1} + \underbrace{(\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y)}_{1} + 2(\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)$$

$$= 1 + 1 + 2\cos(x - y) = 2 + 2\cos 60^o = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow \quad B = 3$$

**Respuesta:** 3

**666.** Si $\left(\frac{\pi}{6}, 2n + 1\right)$ pertenece a la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$, hallar el valor de "$n$".

a) $-\frac{1}{4}$  b) $\frac{1}{4}$  c) $\frac{1}{2}$  d) 4

**Resolución**

Como

$$\left(\frac{\pi}{6}, 2n + 1\right) \in Graf(f) = \left\{(x, y) : \; y = \operatorname{sen} x\right\}$$

Entonces

$$2n + 1 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2n + 1 = \operatorname{sen} 30^o$$

$$\Rightarrow \; 2n + 1 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \; 2n = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \; \Rightarrow \; n = -\frac{1}{4}$$

**Respuesta:** $-\frac{1}{4}$

**667.** Hallar la segunda solución positiva de la ecuación:

$$\tan^2 x - \tan x = 0$$

a) $-\pi$  b) $3\pi$  c) $2\pi$  d) $\pi$

### Resolución

Factorizando:

$$\tan^2 x - \tan x = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(\tan x - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \tan x = 0 \quad \vee \quad \tan x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \tan x = 0 \quad \vee \quad \tan x = 1$$

Primera solución, cuando $k$=0:

Si $\tan x = 0$, entonces

$$x_1 = \arctan(0) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$$

Segunda solución cuando $k$=1:

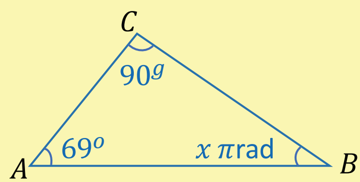
$$x_2 = 0 + \pi \cdot 1 = \pi \;\Rightarrow\; x_2 = \pi$$

**Respuesta:** $\pi$

## Intermedio

**668.** Determinar "$x$" en la siguiente figura:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{3}{2}$




### Resolución

En la figura, convirtiendo los ángulos $90^g$ y $\pi$ al sistema sexagesimal:

$$180^o = 200^g = \pi \text{ rad} \quad \longrightarrow \quad 90^g = 81^o$$
$$x\,\pi \text{ rad} \quad \longrightarrow \quad \pi = 180^o$$

Luego, por la suma de ángulos internos en el triangulo $\Delta ABC$:

$$69^o + 90^g + x\pi = 180^o \quad \Rightarrow \quad 69^o + 81^o + x \cdot 180^o = 180^o$$
$$\Rightarrow \quad x \cdot 180^o = 180^o - 150^o = 30^o$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{30^o}{180^o} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{6}$$

**Respuesta:** $\frac{1}{6}$

**669.** Determinar el ángulo en el sistema radial, si para un ángulo se cumple:

$$S = 5n + 1 \text{ y } C = 6n - 2.$$

a) $\dfrac{\pi}{3}$  b) $\dfrac{\pi}{5}$  c) $\dfrac{\pi}{7}$  d) $\dfrac{3\pi}{2}$

### Resolución

De la relación fundamental:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R = \dfrac{\pi}{180}\,S \\ R = \dfrac{\pi}{200}\,C \end{cases} \qquad (1)$$

Como $S = 5n + 1$ y $C = 6n - 2$:

$$\frac{\pi}{180}\,S = \frac{\pi}{200}\,C \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\pi}{180}(5n+1) = \frac{\pi}{200}(6n-2)$$

$$\Rightarrow \quad 5n + 1 = \frac{9}{10}(6n-2)$$

$$\Rightarrow \quad 50n + 10 = 54n - 18$$

$$\Rightarrow \quad 4n = 28 \quad \Rightarrow \quad n = 7$$

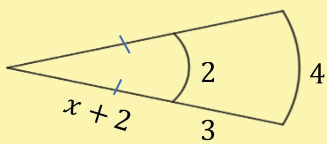
Luego, en la ecuación (1):

$$R = \frac{\pi}{200}(6 \cdot 7 - 2) = \frac{\pi}{200} \cdot 40 = \frac{\pi}{5} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\pi}{5}$$

**Respuesta:** $\dfrac{\pi}{5}$

**670.** Hallar el valor de "$x$" en la siguiente figura:

a) 2  b) 3  c) $-2$  d) 1




### Resolución

**Datos:**

$L_1 = 2, \qquad r_1 = x + 2$

$L_2 = 4$

$r_2 = (x+2) + 3 = x + 5$

Por la longitud de arco:

$$L = r \cdot \theta$$

Longitud de arco para sectores circulares:

$$L_1 = r_1 \cdot \theta \quad \longrightarrow \quad \theta = \frac{L_1}{r_1} = \frac{2}{x+2} \qquad (1)$$

$$L_2 = r_2 \cdot \theta \quad \longrightarrow \quad \theta = \frac{L_2}{r_2} = \frac{4}{x+5} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

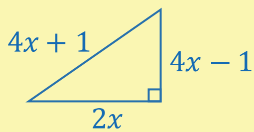
$$\frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+5} \quad \Rightarrow \quad x+5 = 2(x+2)$$

$$\Rightarrow \quad x+5 = 2x+4 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

**Respuesta: 1**

**671.** Calcular la tangente del mayor ángulo agudo de la siguiente figura:

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{15}{4}$ d) $\frac{15}{8}$




### Resolución

En la figura dada aplicando el Teorema de Pitágoras:

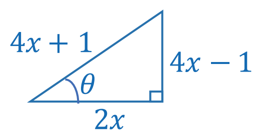
$$(4x+1)^2 = (2x)^2 + (4x-1)^2$$

$$\Rightarrow \quad 16x^2 + 8x + 1 = 4x^2 + 16x^2 - 8x + 1$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - 16x = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4x(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0, \qquad x = 4$$




Se descarta $x$=0 y solo se toma $x$=4, luego la tangente del mayor ángulo agudo es:

$$\tan\theta = \frac{4x-1}{2x}$$

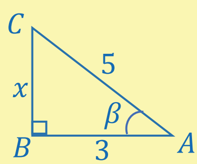
Luego

$$\tan\theta = \frac{4\cdot 4-1}{2\cdot 4} = \frac{16-1}{8} = \frac{15}{8} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{15}{8}$$

**Respuesta:** $\frac{15}{8}$

**672.** Dado el gráfico, calcular el valor de la siguiente expresión:

$$H = \frac{12(\tan\beta + \operatorname{cotan}\beta)}{5\sec\beta}$$




a) 1 b) 3 c) $-4$ d) 5

## Resolución

Calculando el lado opuesto del triángulo ΔABC, por el Teorema de Pitágoras:

$$5^2 = x^2 + 3^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Las razones trigonométricas serán:

$$\tan\beta = \frac{4}{3}, \qquad \operatorname{cotan}\beta = \frac{3}{4}, \qquad \sec\beta = \frac{5}{3} \qquad (1)$$

Luego

$$H = \frac{12(\tan\beta + \operatorname{cotan}\beta)}{5\sec\beta} \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad H = \frac{12\left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4}\right)}{5 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{12\left(\frac{16+9}{12}\right)}{\frac{25}{3}}$$

$$= \frac{25 \cdot 3}{25} = 3 \quad \Rightarrow \quad H = 3$$

**Respuesta:** 3

**673.** Si $a \neq b$, calcular:

$$A = \frac{(a+b)^2 \operatorname{sen} 90^o - 6ab\cos 270^o + 4ab\cos 180^o}{a^2\cos 360^o + b^2 \operatorname{sen} 90^o + 2ab \operatorname{sen} 270^o}$$

a) $a + b$ b) $a - b$ c) $1$ d) $-1$

## Resolución

Con ángulos notables, se tiene:

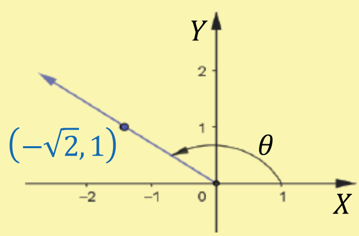
$$A = \frac{(a+b)^2 \cdot 1 - 6ab \cdot 0 + 4ab \cdot (-1)}{a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 1 + 2ab \cdot (-1)} = \frac{(a+b)^2 - 0 - 4ab}{a^2 + b^2 - 2ab}$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{a^2 + b^2 - 2ab} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2 - 2ab} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

**Respuesta:** 1

**674.** Del gráfico dado, calcular el valor de:

$$H = \operatorname{cosec}\theta - \operatorname{cotan}\theta.$$




a) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ b) $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

### Resolución

De la gráfica, $x = -\sqrt{2}, y = 1$ y el radio vector será:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{3}$$

Calculando las razones trigonométricas:

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \quad \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotan}\theta = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{2}}{1} = -\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \quad \operatorname{cotan}\theta = -\sqrt{2}$$

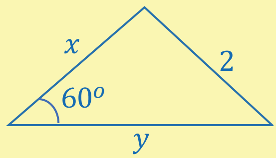
Luego

$$H = \operatorname{cosec}\theta - \operatorname{cotan}\theta = \sqrt{3} - \left(-\sqrt{2}\right) = \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad H = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

**Respuesta:** $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

**675.** Dada la figura, hallar el valor de:

$$E = \frac{x^2 + y^2}{4 + xy}$$




a) 3 b) 1 c) $-1$ d) 0

### Resolución

De la figura, aplicando ley de cosenos:

$$2^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^o \quad \Rightarrow \quad 4 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4 + xy$$

Luego

$$E = \frac{x^2 + y^2}{4 + xy} = \frac{4 + xy}{4 + xy} = 1 \quad \Rightarrow \quad E = 1$$

**Respuesta: 1**

**676.** Si $\tan x + \operatorname{cotan} x = 5\sqrt{2}$, calcular:

$$B = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$$

a) 30 b) 25 c) $-50$ d) 50

### Resolución

Aplicando las identidades:

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x; \quad \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotan}^2 x \qquad (1)$$

Ahora de la condición, elevando al cuadrado:

$$\tan x + \operatorname{cotan} x = 5\sqrt{2} \;\Rightarrow\; (\tan x + \operatorname{cotan} x)^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + 2\tan x \operatorname{cotan} x + \operatorname{cotan}^2 x = 25 \cdot 2$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + 2\tan x \cdot \frac{1}{\tan x} + \operatorname{cotan}^2 x = 50$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + 2 + \operatorname{cotan}^2 x = 50$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + \operatorname{cotan}^2 x = 48 \qquad (2)$$

Luego:

$$B = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x \overset{(1)}{\Rightarrow} B = 1 + \tan^2 x + 1 + \operatorname{cotan}^2 x$$

$$\Rightarrow B = \tan^2 x + \operatorname{cotan}^2 x + 2$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} B = 48 + 2 = 50 \quad \Rightarrow \quad B = 50$$

**Respuesta:** 50

**677.** Dada la expresión:

$$E = \operatorname{sen}(15^o + x) \cdot \cos x - \cos(15^o + x) \cdot \operatorname{sen} x$$

Su valor es:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ c) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ d) $\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{4}$

**Resolución**

Por propiedad de seno y coseno de suma de ángulos:

$$E = \operatorname{sen}(15^o + x) \cdot \cos x - \cos(15^o + x) \cdot \operatorname{sen} x$$

$$= (\operatorname{sen} 15^o \cos x + \cos 15^o \operatorname{sen} x)\cos x - (\cos 15^o \cos x - \operatorname{sen} 15^o \operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x$$

$$= \operatorname{sen} 15^o \cos^2 x + \cos 15^o \operatorname{sen} x \cos x - \cos 15^o \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 15^o \operatorname{sen}^2 x$$

$$= \operatorname{sen} 15^o (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen} 15^o = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

**Respuesta:** $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

**678.** Simplificar la expresión:

$$E=\left(\frac{\sec x}{\cos x}-\frac{\tan x}{\operatorname{cotan} x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cosec} x}+\cos^2 x\right)$$

a) $-1$ b) $1$ c) $0$ d) $2$

**Resolución**

Por propiedad de identidades trigonométricas:

$$E=\left(\frac{\sec x}{\cos x}-\frac{\tan x}{\operatorname{cotan} x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cosec} x}+\cos^2 x\right)$$

$$=(\sec x\sec x-\tan x\ \tan x)(\operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} x+\cos^2 x)$$

$$=(\sec^2 x-\tan^2 x)\underbrace{(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)}_{1}=(\tan^2 x+1-\tan^2 x)\cdot 1$$

$$=1\cdot 1=1 \quad\Rightarrow\quad E=1$$

**Respuesta:** 1

**679.** Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$F=2\operatorname{sen}(30^o-x)+\tan 60^o\operatorname{sen} x-\cos x$$

a) $0$ b) $\sin x$ c) $\cos x$ d) $-2$

**Resolución**

Por propiedad de identidades trigonométricas:

$$F=2\operatorname{sen}(30^o-x)+\tan 60^o\operatorname{sen} x-\cos x$$

$$=2(\operatorname{sen} 30^o\cos x-\cos 30^o\operatorname{sen} x)+\tan 60^o\operatorname{sen} x-\cos x$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{sen} x\right)+\sqrt{3}\operatorname{sen} x-\cos x$$

$$=\cos x-\sqrt{3}\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\operatorname{sen} x-\cos x=0 \quad\Rightarrow\quad F=0$$

**Respuesta:** 0

**680.** Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$G=\frac{(\operatorname{sen} 30^o+\cos 30^o)^2}{\tan 60^o\operatorname{cotan} 30^o}-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\sqrt{3}$

### Resolución

Evaluando ángulos notables:

$$G=\frac{(\text{sen } 30^o+\cos 30^o)^2}{\tan 60^o \text{ cotan } 30^o}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\frac{1+2\sqrt{3}+3}{4}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+4}{12}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}+2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{6}$$

$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad G=\frac{1}{3}$$

**Respuesta:** $\frac{1}{3}$

**681.** Hallar la suma de soluciones de la siguiente ecuación:

$$\text{sen } 2x-\cos^2 x-\text{sen}^2 x=0, \qquad 0\leq x\leq 2\pi$$

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{3\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{2}$

### Resolución

$$\text{sen } 2x-\cos^2 x-\text{sen}^2 x=0 \;\Rightarrow\; \text{sen } 2x-(1-\text{sen}^2 x)-\text{sen}^2 x=0$$

$$\Rightarrow\; \text{sen } 2x-1=0 \;\Rightarrow\; \text{sen } 2x=1$$

$$\Rightarrow\; 2x=\text{arcsen}(1)=\frac{\pi}{2}$$

Para $k$=0,1, en la solución fundamental se tiene:

$$2x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 0=\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 2x_1=\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x_1=\frac{\pi}{4}$$

$$2x_2=\pi-\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 1 \;\Rightarrow\; 2x_2=3\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4} \;\Rightarrow\; x_2=\frac{5\pi}{4}$$

De donde: $x_1,x_2\in[0;\ 2\pi]$

Luego, la suma de soluciones es:

$$x_1+x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}=\frac{6\pi}{4}=\frac{3\pi}{2} \;\Rightarrow\; x_1+x_2=\frac{3\pi}{2}$$

**Respuesta:** $\frac{3\pi}{2}$

**682.** Determine la amplitud y periodo de la siguiente ecuación:

$$y = -5\,\text{sen}\left(\frac{4x}{5}\right) - 2$$

a) $4;\ \frac{\pi}{5}$ b) $-5;\ \frac{3\pi}{2}$ c) $2;\ \frac{\pi}{4}$ d) $5;\ \frac{5\pi}{2}$

**Resolución**

Considerando la función coseno:

$$y = -5\,\text{sen}\left(-\frac{4x}{5}\right) - 2$$

Amplitud:

$$A = |-5| = 5 \quad \Rightarrow \quad A = 5$$

Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\left|-\frac{4}{5}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{5\pi}{2}$$

**Respuesta:** $5;\ \frac{5\pi}{2}$

**683.** Hallar la suma de las soluciones principales de la ecuación:

$$3\tan^2 x - \sec^2 x - 1 = 0$$

a) $0$ b) $-5$ c) $2$ d) $-2$

**Resolución**

$$3\tan^2 x - \sec^2 x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\tan^2 x - (1 + \tan^2 x) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3\tan^2 x - 1 - \tan^2 x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\tan^2 x = 2 \quad \Rightarrow \quad (\tan x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \tan x = \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \arctan(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4}$$

Luego, la suma de soluciones es:

$$S = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad S = 0$$

**Respuesta:** $0$

**684.** Determinar la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación:

$$\cos(2x - 14^0) = \frac{1}{2}$$

a) 421º  b) 391º  c) 401º  d) 411º

**Resolución**

$$\cos(2x - 14^0) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x - 14^0 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^o$$

Para $k$=0,1, en la solución fundamental se tiene:

$$2x_1 - 14^0 = 60^o + 2\pi \cdot 0 = 60^o \quad \Rightarrow \quad 2x_1 - 14^0 = 60^o \quad \Rightarrow \quad x_1 = 37^o$$

$$2x_2 - 14^0 = 60^o + 360^o \cdot 1 = 420^o \quad \Rightarrow \quad 2x_2 - 14^0 = 420^o$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 217^o$$

$$2x_3 - 14^0 = -60^o + 360^o \cdot 1 = 300^o \quad \Rightarrow \quad 2x_3 - 14^0 = 300^o$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = 157^o$$

Luego, la suma pedida es:

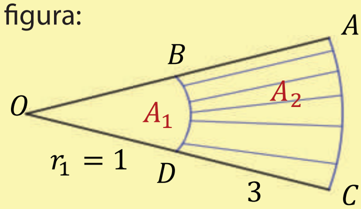
$$S = x_1 + x_2 + x_3 = 37^o + 217^o + 157^o = 411^o \quad \Rightarrow \quad S = 411^o$$

**Respuesta:** $411^o$

## Avanzado

**685.** Calcular la relación $\frac{A_1}{A_2}$, en la siguiente figura:

a) 21  b) 15  c) 14  d) 26




**Resolución**

En primer lugar, se calcula el área total del sector circular, es decir:

$$A_T = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Donde: $r$=1+3=4 y $\theta$ en radianes.
Luego

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \theta = \frac{16}{2} \cdot \theta = 8 \cdot \theta \quad \Rightarrow \quad A_T = 8 \cdot \theta \qquad (1)$$

Calculo de regiones restantes:

$$A_1 = \frac{1}{2}r_1^2\theta = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\theta = \frac{1}{2}\cdot\theta \quad\Rightarrow\quad A_1 = \frac{1}{2}\cdot\theta \qquad (2)$$

$$A_2 = A_T - A_1 \qquad \text{por} \quad (1), (2)$$

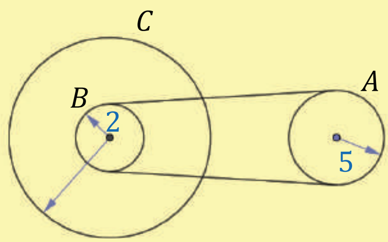
$$= 8\cdot\theta - \frac{1}{2}\cdot\theta = \frac{15}{2}\cdot\theta \quad\Rightarrow\quad A_2 = \frac{15}{2}\cdot\theta \qquad (3)$$

Finalmente, de (3) y (2) se obtiene:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{15}{2}\cdot\theta}{\frac{1}{2}\cdot\theta} = 15 \quad\Rightarrow\quad \frac{A_1}{A_2} = 15$$

**Respuesta:** 15

**686.** Dado el sistema, determinar cuántas vueltas gira la rueda $C$, si la rueda $A$ da 12 vueltas.




a) 30 b) 15 c) 40 d) 25

**Resolución**

**Datos:**

$r_A = 5$

$r_B = 2$

\# de vueltas:

$n_A = 12$ vueltas

$n_C = ?$

Por relación de ruedas y poleas, del sistema se cumple:

$$n_A r_A = n_B r_B \quad\Rightarrow\quad n_B = \frac{n_A r_A}{r_B}$$

Reemplazando datos:

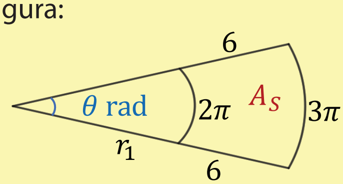
$$n_B = \frac{12\cdot 5}{2} = 30 \quad\Rightarrow\quad n_B = 30$$

Además, se cumple:

$$n_B = n_C \quad\Rightarrow\quad n_C = 30$$

**Respuesta:** 30

**687.** Calcular la relación $\frac{A_S}{\theta}$, en la siguiente figura:




a) 50 b) 90 c) 40 d) 80

## Resolución

**Datos:**

$L_1 = 2\pi,\ r_1 = ?$

$L_2 = 3\pi,\ r_2 = r_1 + 6$

Longitud de arco:

$$L = r \cdot \theta$$

Longitud de arco para sectores circulares:

$$L_1 = r_1 \cdot \theta \quad \longrightarrow \quad \theta = \frac{L_1}{r_1} = \frac{2\pi}{r_1} \qquad (1)$$

$$L_2 = r_2 \cdot \theta \quad \longrightarrow \quad \theta = \frac{L_2}{r_2} = \frac{3\pi}{r_2} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$\frac{2\pi}{r_1} = \frac{3\pi}{r_2} \quad \Rightarrow \quad 2(r_1 + 6) = 3r_1 \ \Rightarrow \ 2r_1 + 12 = 3r_1 \ \Rightarrow \ r_1 = 12$$

Luego en (1):

$$\theta = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6} \qquad (3)$$

Por otro lado, por la fórmula del trapecio circular:

$$A_S = \frac{1}{2}(3\pi + 2\pi) \cdot 6 = 3(5\pi) = 15\pi \quad \Rightarrow \quad A_S = 15\pi \qquad (4)$$

De (3) y (4), se obtiene:

$$\frac{A_S}{\theta} = \frac{15\pi}{\frac{\pi}{6}} = 90 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{A_S}{\theta} = 90$$

**Respuesta:** 90

**687.** Dada la ecuación exponencial trigonométrica:

$$64^{\tan x} = 16^{3\tan x - 6}$$

Determinar el valor de la expresión: $F = \sec^2 x + \tan^2 x$

a) 33 b) 44 c) 55 d) 66

## Resolución

Llevando a la misma base:

$$64^{\tan x} = 16^{3\tan x - 6} \quad \Rightarrow \quad 2^{6\tan x} = 2^{4(3\tan x - 6)} \quad \text{bases son iguales}$$

$$\Rightarrow \quad 6\tan x = 4(3\tan x - 6)$$

$$\Rightarrow \quad 3\tan x = 12 \quad \Rightarrow \quad \tan x = 4$$

Por identidades pitagóricas se tiene: $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

Luego

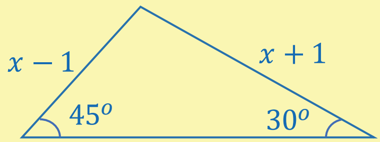
$$F = \sec^2 x + \tan^2 x = 1 + \tan^2 x + \tan^2 x$$

$$= 1 + 2\tan^2 x = 1 + 2(\tan x)^2$$

$$= 1 + 2 \cdot 4^2 = 1 + 32 = 33 \quad \Rightarrow \quad F = 33$$

**Respuesta:** 33

**689.** Dada la figura, calcular el valor de "$x$".




a) $2\sqrt{2}$ b) $3+3\sqrt{2}$ c) $3+2\sqrt{2}$ d) $2+2\sqrt{2}$

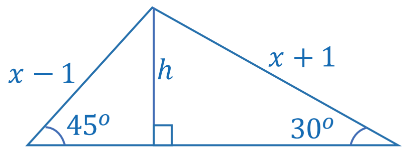
## Resolución

Por razones trigonométricas y ángulos notables:

$$\text{sen } 45^o = \frac{h}{x-1} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{x-1}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{2}(x-1)}{2} \qquad (1)$$

Considerando la figura:




$$\text{sen } 30^o = \frac{h}{x+1} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{x+1} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{x+1}{2} \qquad (2)$$

Ahora igualando (1) y (2):

$$\frac{\sqrt{2}(x-1)}{2} = \frac{x+1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}x - \sqrt{2} = x+1$$

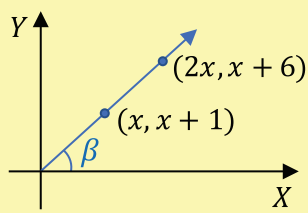
$$\Rightarrow \quad x\left(\sqrt{2}-1\right) = 1+\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

Racionalizando el denominador:

$$x = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{1+2\sqrt{2}+2}{2-1} \quad \Rightarrow \quad x = 3+2\sqrt{2}$$

**Respuesta:** $3+2\sqrt{2}$

**690.** Dada la gráfica, calcular cotan $\beta$.




a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{4}$

## Resolución

En la gráfica los dos puntos están en una misma línea, la razón cotangente será:

$$\cot\beta = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x+6} \qquad (1)$$

Luego

$$\frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x+6} \quad \Rightarrow \quad x(x+6) = 2x(x+1)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 6x = 2x^2 + 2x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \qquad x = 4$$

Considerando $x$=4, luego en (1):

$$\cot\beta = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \cot\beta = \frac{4}{5}$$

**Respuesta:** $\frac{4}{5}$

**691.** Si sen $90^o$+cos $90^o$=$n$, calcular:

$$F = 5[\operatorname{cosec}(n + 89^o) + \operatorname{sen}(90n)^o]$$

a) 10 b) 13 c) 12 d) 11

## Resolución

Sustituyendo valor numérico de ángulos notables en la condición:

$$\operatorname{sen} 90^o + \cos 90^o = n \quad \Rightarrow \quad 1 + 0 = n \quad \Rightarrow \quad n = 1 \qquad (1)$$

Luego

$$F = 5[\operatorname{cosec}(n + 89^o) + \operatorname{sen}(90n)^o]$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad F = 5[\operatorname{cosec}(1^o + 89^o) + \operatorname{sen}(90 \cdot 1)^o]$$

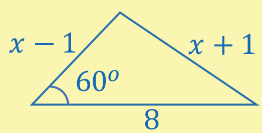
$$= 5[\operatorname{cosec}(90^o) + \operatorname{sen} 90^o] = 5[1 + 1] = 5 \cdot 2 = 10$$

$$\Rightarrow \quad F = 10$$

**Respuesta:** 10

**692.** Calcular el perímetro del triangulo $\Delta ABC$ dado:

a) 30 b) 20 c) 15 d) 60



## Resolución

De la figura, aplicando ley de cosenos:

$$(x+1)^2 = 8^2 + (x-1)^2 - 2\cdot 8(x-1)\cos 60^o$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 64 + x^2 - 2x + 1 - 2\cdot 8(x-1)\cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 64 + x^2 - 2x + 1 - 8x + 8$$

$$\Rightarrow \quad 12x = 72 \qquad \Rightarrow \quad x = 6$$

Cálculo del perímetro:

$$P = 8 + (x-1) + (x+1) = 8 + (6-1) + (6+1)$$

$$= 8 + 5 + 7 = 20 \qquad \Rightarrow \quad P = 20$$

**Respuesta:** 20

**693.** Simplificar la expresión:

$$E = (\text{cotan}\, x - \tan x)[\tan(45^o + x) - \tan(45^o - x)]$$

a) 4 b) 2 c) 5 d) 6

## Resolución

Aplicando la identidad:

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\cdot\tan B}; \qquad \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\cdot\tan B}$$

Luego:

$$E = (\text{cotan}\, x - \tan x)[\tan(45^o + x) - \tan(45^o - x)]$$

$$= (\text{cotan}\, x - \tan x)\left[\frac{\tan 45^o + \tan x}{1 - \tan 45^o\cdot\tan x} - \frac{\tan 45^o - \tan x}{1 + \tan 45^o\cdot\tan x}\right]$$

$$= (\text{cotan}\, x - \tan x)\left[\frac{1 + \tan x}{1 - 1\cdot\tan x} - \frac{1 - \tan x}{1 + 1\cdot\tan x}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\tan x} - \tan x\right)\left[\frac{(1+\tan x)^2 - (1-\tan x)^2}{(1-\tan x)(1+\tan x)}\right]$$

$$= \left(\frac{1-\tan^2 x}{\tan x}\right)\left[\frac{1 + 2\tan x + \tan^2 x - (1 - 2\tan x + \tan^2 x)}{1-\tan^2 x}\right]$$

$$= \frac{1}{\tan x}\cdot 4\tan x = 4$$

**Respuesta:** 4

**694.** Simplificar la expresión:

$$N = \frac{\cot\left(\frac{x}{2}\right) - 2\cot x}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \cot x} + \cos x$$

a) 4 b) 2 c) 1 d) 6

**Resolución**

Aplicando las identidades:

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \csc x + \cot x; \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \csc x - \cot x$$

Luego:

$$N = \frac{\cot\left(\frac{x}{2}\right) - 2\cot x}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \cot x} + \cos x = \frac{\csc x + \cot x - 2\cot x}{\csc x - \cot x + \cot x} + \cos x$$

$$= \frac{\csc x - \cot x}{\csc x} + \cos x = 1 - \operatorname{sen} x \cot x + \cos x$$

$$= 1 - \operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \cos x = 1 - \cos x + \cos x = 1$$

$$\Rightarrow \quad N = 1$$

**Respuesta:** 1

**695.** Calcular la amplitud, periodo, desplazamiento de desfase y traslación en la siguiente ecuación:

$$y = -3\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 4$$

a) $-3; \frac{2\pi}{5}; \frac{\pi}{2}; 4$ b) $3; \frac{2\pi}{5}; \frac{\pi}{10}; 4$ c) $3; \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{10}; 4$ d) $3; \frac{2\pi}{5}; \frac{\pi}{2}; 4$

**Resolución**

Considerando la función seno:

$$y = -3\operatorname{sen}\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) + 4$$

Amplitud:

$$A = |-3| = 3 \quad \Longrightarrow \quad A = 3$$

Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{|5|} = \frac{2\pi}{5} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{5}$$

Desplazamiento de fase:

$$5x-\frac{\pi}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{10}$$

Traslación en eje "$Y$":

$$y=4$$

**Respuesta:** $3;\ \frac{2\pi}{5};\ \frac{\pi}{10};4$

**696.** Dada la ecuación:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1\,, \qquad 0^o\leq x\leq 360^o$$

Si $x_1$,$x_2$ son las soluciones principales de la ecuación, hallar $x_2-x_1$.

a) $355^o$ b) $200^o$ c) $250^o$ d) $105^o$

**Resolución**

Observe que el coseno tiene ángulo negativo y por la propiedad de ángulos negativos se tiene:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1 \Leftrightarrow 2\cos\left(-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \quad \Rightarrow \quad \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Para $k=0{,}1$ se tiene las soluciones principales:

$$x_1-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}=105^o \quad \Rightarrow \quad x_1=105^o$$

$$x_2-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 1 \quad \Rightarrow \quad x_2=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{23\pi}{12}=355^o$$

$$\Rightarrow \quad x_2=355^o$$

Luego:

$$x_2-x_1=355^o-105^o=250^o \quad \Rightarrow \quad x_2-x_1=250^o$$

**Respuesta:** $250^o$

**697.** Hallar la suma de las primeras dos soluciones principales en la ecuación:

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 - 1 = 0$$

a) $40^o$ b) $90^o$ c) $50^o$ d) $60^o$

**Resolución**

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - (\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x) = 1$$

$$\Rightarrow 2(2\operatorname{sen} x \cos x) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\operatorname{sen} 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Para $k$=0 se tiene, las dos primeras soluciones principales:

$$2x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{\pi}{12}$$

$$2x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 0 = \frac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{5\pi}{12}$$

Luego:

$$x_1 + x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi + 5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2} = 90^o$$

**Respuesta:** $90^o$

**698.** Hallar una solución positiva principal de la ecuación:

$$\log(\operatorname{sen} x) + \log(\cos x) = \log(\tan x) - \log 2$$

a) $45^o$ b) $35^o$ c) $25^0$ d) $70^o$

**Resolución**

Aplicando las propiedades de logaritmos:

$$\log A + \log B = \log(A \cdot B)\,; \quad \log A - \log B = \log\left(\frac{A}{B}\right); \quad -k \log a = \log a^{-k}$$

Luego:

$$\log(\operatorname{sen} x) + \log(\cos x) = \log(\tan x) - \log 2$$

$$\Rightarrow \log(\operatorname{sen} x \cdot \cos x) - \log(\tan x) = -\log 2$$

$$\Rightarrow \ \log\left(\frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{\tan x}\right)=\log 2^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{\tan x} = 2^{-1}$$

$$\Rightarrow \ \frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \ \cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \ x=\arccos\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pm\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{4}=45^o$$

**Respuesta:** $45^o$

**699.** Hallar una solución principal positiva del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3^{\operatorname{cosec}^2 x+\sec y}=81 \\ 2^{\operatorname{cosec}^2 x-\sec y}=1 \end{cases}$$

a) $45^o$; $63^o$ b) $43$; $60^o$ c) $45^o$; $20^o$ d) $45^o$; $60^o$

## Resolución

Llevando a la misma base cada ecuación:

$$\begin{cases} 3^{\operatorname{cosec}^2 x+\sec y}=81 \\ 2^{\operatorname{cosec}^2 x-\sec y}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{\operatorname{cosec}^2 x+\sec y}=3^4 \\ 2^{\operatorname{cosec}^2 x-\sec y}=2^0 \end{cases}$$

Por la propiedad: $a^x=a^y \ \Rightarrow \ x=y, \quad x,y\in\mathbb{R}, \quad a>0, a\in\mathbb{R}$
El sistema se transforma en:

$$\begin{cases} \operatorname{cosec}^2 x+\sec y=4 & (1) \\ \operatorname{cosec}^2 x-\sec y=0 & (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1) y (2):

$$2\operatorname{cosec}^2 x=4 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cosec}^2 x=2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cosec} x=\pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \ \operatorname{sen} x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \ x=\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}=45^0 \quad \Rightarrow \quad x=45^0$$

Ahora $x=45^o$ en (2):

$$\operatorname{cosec}^2(45^0)-\sec y=0 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{2})^2-\sec y=0 \quad \Rightarrow \quad \sec y=2$$

$$\Rightarrow \quad y = \operatorname{arcsec}(2) = \frac{\pi}{3} = 60^o \qquad \Rightarrow \qquad y = 60^0$$

**Respuesta:** $45^o$; $60^o$

**700.** Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \arctan x + \arctan y = 0 & (1) \\ \arctan y + \arctan z = \dfrac{\pi}{3} & (2) \\ \arctan z + \arctan x = \dfrac{\pi}{6} & (3) \end{cases}$$

Hallar $x+y+z$.

a) 3 b) 0 c) 1 d) $\pi$

## Resolución

Sumando las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$2\arctan x + 2\arctan y + 2\arctan z = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad 2(\arctan x + \arctan y + \arctan z) = \frac{\pi}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \arctan z = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad z = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad z = 1$$

Ahora, $\arctan z = 1$ en la ecuación (2):

$$\arctan y + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \qquad \Rightarrow \quad \arctan y = \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \quad y = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad y = 2 - \sqrt{3}$$

Ahora, $\arctan y = 2 - \sqrt{3}$ en la ecuación (1):

$$\arctan x + \frac{\pi}{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \arctan x = -\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \quad x = \tan\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\left(2 - \sqrt{3}\right) \quad \Rightarrow \quad x = -\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

Luego:

$$x + y + z = -\left(2 - \sqrt{3}\right) + 2 - \sqrt{3} + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x + y + z = 1$$

**Respuesta:** 1

## Trigonometría - Básico

**701.** Encuentre las medidas exactas de los siguientes ángulos: $450^o$ y $100^o$ en radianes.

a) $\frac{5\pi}{2};\frac{5\pi}{9}$   b) $\frac{5\pi}{3};\frac{5\pi}{9}$   c) $\frac{4\pi}{2};\frac{5\pi}{9}$   d) $\frac{5\pi}{2};\frac{5\pi}{3}$

**Respuesta: ......**

**702.** Encuentre la medida exacta de los siguientes ángulos: $7\pi$ y $\frac{\pi}{9}$ en grados.

a) $1000^o;\ 20^o$   b) $1260^o;\ 30^o$   c) $1260^o;\ 20^o$   d) $1200^o;\ 20^o$

**Respuesta: ......**

**703.** Exprese $\theta$=5 rad en grados, minutos y segundos, al segundo más cercano.

a) $285^o 38' 44''$   b) $280^o 28' 44''$   c) $200^o 28' 44''$   d) $286^o 28' 44''$

**Respuesta: ......**

**704.** Dado un triángulo rectángulo $\Delta ABC$, si se cumple que $AB$=$AC$ y $\cos\hat{C} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , calcular $\tan\hat{B}$.

a) 1   b) 7   c) 3   d) 6

**Respuesta: ......**

**705.** Dado un triángulo $\Delta ABC$, si $\angle B = 137^o$, $c$=4 y $a$=7. Calcular el valor del lado $b$.

a) 12   b) 10,3   c) 12,5   d) 11,3

**Respuesta: ......**

**706.** En un triángulo ΔABC, si $\angle A = 35^o$, $\angle B = 68^o$ y $c$=25. Hallar la suma de sus lados $a$ y $b$.

a) 29   b) 25   c) 39   d) 30

**Respuesta: ......**

**707.** En un triángulo $\Delta ABC$, si los lados son $a$=5, $c$=8 y $\angle B = 77^o$. Calcular el ángulo $\angle C$.

a) $55^o$ b) $68^o$ c) $60^o$ d) $85^o$

**Respuesta: ......**

**708.** En un triángulo oblicuángulo $\Delta ABC$, se cumple la relación de sus lados $a^2$=$b^2$+$c^2$+$bc$, calcular el ángulo $\angle A$.

a) $60^o$ b) $95^o$ c) $110^o$ d) $120^o$

**Respuesta: ......**

**709.** Determinar el área del triángulo $\Delta ABC$ si los lados son $a$=5 cm, $b$=3 cm y $\angle A = 37^o$.

a) $6{,}4\ \text{cm}^2$ b) $7{,}5\ \text{cm}^2$ c) $5{,}4\ \text{cm}^2$ d) $7\ \text{cm}^2$

**Respuesta: ......**

**710.** El ángulo en una esquina de un terreno triangular es $73^o40'$ y los lados que se encuentran en esta esquina miden 175 y 150 metros de largo. Calcule la longitud del tercer lado.

a) 189 m b) 116 m c) 196 m d) 156 m

**Respuesta: ......**

**711.** Calcular el valor de la expresión:

$$E = \frac{\cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x \cos x$$

a) $-1$ b) $1$ c) $2$ d) $7$

**Respuesta: ......**

**712.** Simplificar:

$$E = \tan x(1 - \cot an^2 x) + \cot an\, x(1 - \tan^2 x)$$

a) $-1$ b) $0$ c) $1$ d) $3$

**Respuesta: ......**

**713.** Simplificar:

$$F = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)$$

a) $0$ b) $-1$ c) $2$ d) $4$

**Respuesta:** ......

**714.** Calcular

$$M = \frac{2\cos\beta}{\sec\beta} - \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$$

Si $2\beta+\theta=90^{o}$.

a) $-2$ b) $2$ c) $-1$ d) $1$

**Respuesta:** ......

**715.** Simplificar:

$$f(x) = \tan x + \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$$

a) $\tan x$ b) $\cos x$ c) $\operatorname{sen} x$ d) $\sec x$

**Respuesta:** ......

**716.** Determinar amplitud, periodo de la función:

$$f(x) = \frac{1}{4}\cos 3x$$

a) $\frac{1}{4};\ \frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{1}{4};\ \frac{2\pi}{4}$ c) $\frac{1}{2};\ \frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{1}{3};\ \frac{2\pi}{3}$

**Respuesta:** ......

**717.** Determinar la solución principal de la ecuación:

$$2\ \cos x + 1 = 0$$

a) $\frac{2\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}$ b) $\frac{2\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}$

**Respuesta:** ......

**718.** Calcule la medida, en grados, del ángulo formado por tres quintas partes de una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

a) $158^o$ b) $216^o$ c) $213^o$ d) $200^o$

**Respuesta:** .....

**719.** Simplificar la siguiente expresión:

$$E = \frac{72^o + \frac{\pi}{10}\text{ rad}}{50^g}$$

a) 5 b) 3 c) 1 d) 2

**Respuesta:** .....

**720.** Hallar un ángulo en el sistema radial, si se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\frac{12}{\pi} + C}{\frac{4}{\pi} + S} = 2$$

a) $\frac{1}{30}$ rad b) $\frac{1}{40}$ rad c) $\frac{2}{17}$ rad d) $\frac{1}{8}$ rad

**Respuesta:** .....

**721.** Hallar el ángulo $x$ en:

$$\tan 30^o \tan 40^o \tan 50^o \tan x = 1$$

a) $60^o$ b) $26^o$ c) $55^o$ d) $70^o$

**Respuesta:** .....

**722.** Calcular por ángulos notables:

$$H = \frac{2\tan 0^o + 3\cot 270^o - 3\sec 180^o - \operatorname{sen} 90^o}{\frac{3}{4}\operatorname{cosec} 90^o + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 270^o}$$

a) $-3$ b) $-2$ c) 2 d) 4

**Respuesta:** .....

**723.** En un triángulo rectángulo $\Delta ABC$, si $\theta$ es un ángulo agudo y el lado adyacente e hipotenusa miden 4 y 7 unidades, respectivamente, encuentre tan $\theta$.

a) $\frac{\sqrt{33}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{33}}{4}$ c) $\frac{3\sqrt{33}}{4}$ d) $\sqrt{33}$

**Respuesta: .....**

**724.** Un hombre de 2 m de estatura observa la base de un árbol con un ángulo de depresión de $30^o$ y la parte superior con un ángulo de elevación de $60^o$, hallar la altura del árbol.

a) 10 m b) 12 m c) 8 m d) 7 m

**Respuesta: .....**

**725.** Calcular el área de una región triangular donde dos de sus lados miden 12 m y 14 m, además la medida que forman dichos lados es $30^o$.

a) $40\ m^2$ b) $44\ m^2$ c) $22\ m^2$ d) $42\ m^2$

**Respuesta: .....**

**726.** En un triángulo rectángulo $\Delta ABC$, recto en $\angle C$, se conoce $\angle B=50^o$ y el cateto $BC$=7 cm. Calcule $\angle A$.

a) $58^o$ b) $26^o$ c) $40^o$ d) $20^o$

**Respuesta: .....**

**727.** Dado un rombo cuyas diagonales son 8 cm y 12 cm respectivamente. ¿Cuánto mide el lado del rombo?

a) 5,20 b) 6,3 c) 6,25 d) 7,21

**Respuesta: .....**

**728.** Simplificar:

$$g(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} + x\right)$$

a) $-1$ b) $0$ c) $2$ d) $\pi$

**Respuesta: .....**

**729.** Simplificar la expresión:

$$B=\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}$$

a) $\cos x$ b) $\sec^2 x$ c) $2\operatorname{cosec}^2 x$ d) $\operatorname{cosec}^2 x$

**Respuesta: .....**

**730.** Simplificar la expresión:

$$Q=\frac{\tan x}{1+\sec x}+\frac{1+\sec x}{\tan x}$$

a) $\operatorname{sen} x$ b) $2\operatorname{cosec} x$ c) $\operatorname{cosec} x$ d) $\tan x$

**Respuesta: .....**

**731.** Simplificar la siguiente expresión:

$$R=(a\cos x-b\operatorname{sen} x)^2+(a\operatorname{sen} x+b\cos x)^2$$

a) $a^2+2b^2$ b) $4a^2+b^2$ c) $a^2+b^2$ d) $a^2$

**Respuesta: .....**

**732.** Determinar la amplitud, periodo de la siguiente ecuación:

$$y=-2\cos x+1$$

a) $2;2\pi$ b) $-2;2\pi$ c) $2;\pi$ d) $1;3\pi$

**Respuesta: .....**

**733.** Calcular la solución principal de la ecuación:

$$\tan^2 x-\tan x=0$$

a) $45^o$ b) $60^o$ c) $30^o$ d) $55^o$

**Respuesta: .....**

**734.** Hallar la solución principal de la ecuación:

$$2\operatorname{sen}^2 x-\cos x-1=0$$

a) $35^o;150^o$ b) $27^o;180^o$ c) $50^o;120^o$ d) $60^o;180^o$

**Respuesta: .....**

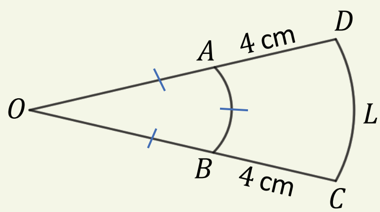
## Trigonometría - Avanzado

**735.** Calcule la medida circular de un ángulo en radianes, si $C=2a+b$; $S=a+b$; $R=7\pi\text{-}\pi\cdot a$.

a) $\frac{\pi}{2}$ rad   b) $\frac{\pi}{5}$ rad   c) $\frac{\pi}{3}$ rad   d) $\frac{\pi}{4}$ rad

**Respuesta: ......**

**736.** Hallar el valor de $L$ en la figura dada, si el área del trapecio $ABCD$ circular es 20 $m^2$.




a) 5   b) 7   c) 3   d) 6

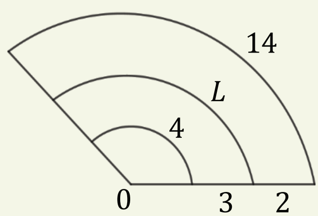
**Respuesta: ......**

**737.** Se tiene un sector circular de 6 cm de radio y 12 cm de longitud de arco, si el radio aumenta en 2 cm sin que el ángulo varíe. ¿Cuánto será la nueva longitud de arco?

a) 13 cm   b) 15 cm   c) 16 cm   d) 18 cm

**Respuesta: ......**

**738.** Determinar el valor de la longitud de arco $L$, en la figura:




a) 5   b) 20   c) 12   d) 10

**Respuesta: ......**

**739.** Dada una circunferencia de 24 cm de radio, encontrar la longitud de arco que subtiende un ángulo central de $\frac{2}{3}$ radianes.

a) 17 cm b) 19 cm c) 16 cm d) 18 cm

**Respuesta: ......**

**740.** Los radios de las ruedas de una bicicleta, son entre sí como 3 es a 4, determinar el número de vueltas que da la rueda mayor cuando la rueda menor gire $8\pi$ radianes.

a) 3 b) 4 c) 6 d) 8

**Respuesta: ......**

**741.** Se tienen dos ruedas en contacto cuyos radios están en la relación de 2 a 5, hallar el angulo que gira la rueda menor, cuando la rueda mayor de 4 vueltas.

a) $35\,\pi$ b) $20\,\pi$ c) $25\,\pi$ d) $10\,\pi$

**Respuesta: ......**

**741.** Se tienen dos ruedas en contacto cuyos radios están en la relación de 2 a 5, hallar el angulo que gira la rueda menor, cuando la rueda mayor de 4 vueltas.

a) $35\,\pi$ b) $20\,\pi$ c) $25\,\pi$ d) $10\,\pi$

**Respuesta: ......**

**742.** Calcular la longitud de la diagonal de un rectángulo, si la tangente del ángulo que forman dicha diagonal con uno de los lados del rectángulo es $\frac{8}{15}$, además el perímetro del rectángulo es de 276 cm.

a) 72 cm b) 82 cm c) 102 cm d) 100 cm

**Respuesta: ......**

**743.** Simplificar: $G = (1 + \cot^2\theta)(1 - \operatorname{sen}^2\theta)(\sec^2\theta - 1)$

a) 5 b) $-2$ c) 2 d) 1

**Respuesta: ......**

**744.** Un avión que vuela horizontalmente sobre la línea que une un punto en tierra P y la base de un edificio, es observado desde P con un ángulo de elevación $\theta$ y una visual de 45 m. Además, y desde la parte superior del edificio con un ángulo de elevación que es complemento de $\theta$ y una visual de 24 m. Determinar la distancia entre los puntos de observación.

a) 51 m  b) 41 m  c) 30 m  d) 61 m

**Respuesta:** ......

**745.** Simplificar la siguiente expresión:

$$E=\left(\sqrt{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}-\cos\theta\right)^2+2\left[\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sec^2\theta}+\cos^3\theta}\right]$$

a) 2  b) 3  c) 4  d) 9

**Respuesta:** ......

**746.** Reducir la expresión:

$$F=\frac{2(\operatorname{sen}2\beta+2\cos^2\beta-1)}{\cos\beta-\operatorname{sen}\beta-\cos3\beta+\operatorname{sen}3\beta}$$

a) $\tan\beta$  b) $\operatorname{cosec}\beta$  c) $\operatorname{cotan}\beta$  d) $\operatorname{sen}\beta$

**Respuesta:** ......

**747.** Hallar el periodo de la siguiente función trigonométrica:

$$f(x)=-\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)$$

a) $-\pi$  b) $3\pi$  c) $\pi$  d) $2\pi$

**Respuesta:** ......

**748.** Calcular la suma de las soluciones positivas de la ecuación:

$$2(1-\text{sen } x-\cos x)(1+\text{sen } x+\cos x)-1=0, \qquad 0^o \leq x \leq 360^o$$

a) $480^o$ b) $650^o$ c) $700^o$ d) $900^o$

**Respuesta:** ......

**749.** Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tan\theta+\tan\beta=\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ \cot an\theta+\cot an\beta=\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

determinando los valores menores de $\theta$ y $\beta$. Calcular $\theta+\beta$.

a) $\dfrac{\pi}{6}$ b) $\dfrac{\pi}{2}$ c) $\dfrac{\pi}{3}$ d) $\dfrac{2\pi}{3}$

**Respuesta:** ......

**750.** Si $f(x)=x+\text{sen } 2x$, hallar el conjunto solución en $[0,2\pi]$ tal que $f(x)=0$. Dar como respuesta la suma de sus soluciones.

a) $\dfrac{7\pi}{6}$ b) $\dfrac{5\pi}{2}$ c) $\dfrac{3\pi}{2}$ d) $\dfrac{2\pi}{3}$

**Respuesta:** ......

# COMBINATORIA

### Principios del conteo

Son reglas y técnicas utilizadas para contar el número de formas en que pueden ocurrir eventos. Esto implica el principio multiplicativo y el principio aditivo, ambos se aplican según el contexto del problema.

**1**

Adición, sea $m$ un evento y $n$ otro evento, entonces pueden ocurrir eventos de $m + n$ maneras.
Multiplicación, puede ocurrir de m maneras y una segunda de n maneras entonces los eventos pueden ocurrir de $m \cdot n$ maneras.

El número de permutaciones de $n$ objetos distintos siempre puede ser calculado por n! es decir:

$$\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)(\boldsymbol{n}-2)\cdots 2\cdot 1$$

donde $\boldsymbol{n \geq 1}$

**2**

### Factorial

El factorial de un número entero positivo $n$ denotado por $n!$, es el producto e todos los enteros positivos desde 1 hasta $n$.

### Permutaciones y variaciones

Las permutaciones son arreglos ordenados de objetos donde el orden importa. Las variaciones son permutaciones de un subconjunto de objetos donde el orden importa.

**3**

Las variaciones de $n$ elementos tomados de $r$ en $r$ serán:

$$\boldsymbol{V_n^r = V_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

donde $\boldsymbol{1 \leq r \leq n}$

El número combinatorio, si tenemos $n$ elementos y vamos a formar grupos o subconjuntos de $r$ elementos, se tendrá la fórmula:

$$\boldsymbol{C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

donde: $\boldsymbol{0 \leq r \leq n}$

**4**

### Combinaciones

Son los diferentes grupos o subconjuntos que se pueden formar con una parte o con todos los elementos de un conjunto determinado.

### Binomio de Newton

Expresa la expansión binomial de la suma o resta de dos términos elevados a una potencia entera.

**5**

Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{0} b^n$$

## Usos y aplicaciones en la vida cotidiana

Al programar horarios de minibuses o micros, es importante contar el número de pasajeros, calcular la frecuencia de los servicios y determinar la capacidad necesaria para satisfacer demanda en diferentes rutas y horarios.

*Fuente: Prensa Asociada Nacional*

*Fuente: HANNA Instruments Bolivia*

En fábricas y plantas industriales, se utilizan factoriales para calcular el número de formas en que diferentes factores, como la mano de obra y los materiales pueden influir en la producción y calidad de productos.

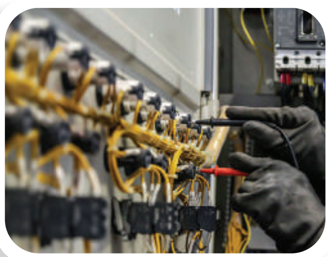
Al organizar torneos o competiciones deportivas, se utilizan permutaciones y variaciones para determinar el orden de los equipos o jugadores en los sorteos y programar los enfrentamientos con las posibles combinaciones.

*Fuente: Bolivia.com*

*Fuente: Arsenio Manila*

En gastronomía al crear menús o preparar recetas se utilizan combinaciones de ingredientes y sabores para ofrecer una variedad de platos, satisfacer los gustos y preferencias de los comensales.

En el ámbito tecnológico y las telecomunicaciones se emplea la decodificación de datos y la corrección de errores en sistemas de transmisión en información, lo que garantiza una comunicación eficiente y fiable en las redes.



*Fuente: Yandex*

## Principios del conteo

**751.** En la biblioteca hay 36 libros de matemática y 36 libros de física. Si un estudiante elige 1 libro por materia. ¿Cuántas opciones tiene para elegir los libros que tóma?

### Resolución

**Datos**

$M = 36$: Matemática
$F = 36$: Física
$N$: Número de operaciones

Por la regla de la suma si una primera tarea puede realizarse de m formas y una segunda de n formas y no es posible realizar ambas de manera simultánea entonces puede llevarse a cabo cualquiera de ellas de m + n formas:

$$N = M + F \Longrightarrow N = 36 + 36$$
$$\Longrightarrow N = 72$$

**Respuesta**

Si un estudiante toma 2 libros, tiene 72 opciones para poder elegirlos.

**752.** En la promoción se quiere elegir al presidente de curso entre 5 mujeres y 4 varones, ¿cuántos candidatos se pueden tomar en cuenta para elegir al presidente de curso?

### Resolución

**Datos**

$M = 5$ Mujeres
$H = 4$ Hombres
$N$: Número posibilidades

Por la regla de la suma:

$$N = M + H$$
$$\Longrightarrow N = 5 + 4$$
$$\Longrightarrow N = 9$$

**Respuesta**

Habrían 9 candidatos para presidente de curso.

**753.** Un turista visita la ciudad de Cochabamba y quiere almorzar. Pasando por Sacaba encuentra un lugar que tiene 4 tipos de platos, nota también que al lado tiene 3 platos diferentes y en otro lugar tienen otros 3 platos diferentes. ¿Cuántas opciones tiene para elegir un plato?

### Resolución

**Datos**

$P_1 = 4$ Primer puesto
$P_2 = 3$ Segundo puesto

Por la regla de la suma:

$$N = P_1 + P_2 + P_3 \Longrightarrow N = 4 + 3 + 3$$
$$\Longrightarrow N = 10$$

$P_3 = 3$ Tercer puesto

$N$: Número posibilidades

**Respuesta**

Tiene 10 posibilidades de elegir un plato.

**754.** Carmen quiere entrar a cursos de baile, tienes 3 cursos de danza nacional y 4 cursos de danza moderna. ¿Cuántas opciones tiene para elegir?

**Resolución**

**Datos**

$B = 3$ Danza nacional

$M = 4$ Danza moderna

$N$: Número de posibilidades

Si tiene 3 opciones en danza nacional y 4 en danza moderna. Por la regla de la suma:

$$N = B + M$$
$$\Longrightarrow N = 3 + 4$$
$$\Longrightarrow N = 7$$

**Respuesta**

Tiene 7 opciones para tomar un curso.

**755.** Un estudiante puede elegir una asignatura electiva de ciencia como biología, química, física y geología o electivas en arte como pintura, música, dibujo o teatro. ¿Cuántas opciones tiene, en total, para elegir una asignatura?

**Resolución**

**Datos**

$C = 4$ Ciencia

$A = 4$ Arte

$N$: Número posibilidades

Como se tiene 4 materias de ciencia y 3 de arte, por la regla de la suma:

$$N = C + A \Longrightarrow N = 4 + 4$$
$$\Longrightarrow N = 8$$

**Respuesta**

Tiene un total de 8 asignaturas para elegir.

**756.** Para las olimpiadas de matemática, la promoción 2025 tiene 40 estudiantes, de los cuales 19 son hombres y 21 son mujeres, se tiene que elegir una pareja que sea un hombre y una mujer. ¿Cuántas posibilidades tienen para elegir dicha pareja?

**Resolución**

**Datos**

$M = 21$ Mujeres
$H = 19$ Hombres
$N$: Número posibilidades

Como son 19 hombres y 21 mujeres, por la regla del producto:

$$N = M \cdot H \Longrightarrow N = 21 \cdot 19$$
$$\Longrightarrow N = 399$$

**Respuesta**
Existen 399 posibilidades de elegir una pareja de estudiantes que sean una mujer y un hombre.

**757.** Una escuela en Pando tiene tres materias: matemática, física y química; cuatro horarios disponibles: mañana, tarde, noche y fin de semana. ¿Cuántas combinaciones diferentes se puede elegir?

**Resolución**

**Datos**

$M = 4$ Horarios
$F = 4$ Horarios
$Q = 4$ Horarios
$N$: Número posibilidades

Hay 4 horarios para matemática, 4 horarios para física y 4 horarios para química, por la regla del producto:

$$N = M \cdot F \cdot Q \Longrightarrow N = 4 \cdot 4 \cdot 4$$
$$\Longrightarrow N = 64$$

**Respuesta**
Habrán 64 diferentes combinaciones de horarios.

**758.** En el colegio de Jorge, los estudiantes pueden elegir entre 6 actividades deportivas y 4 actividades culturales durante un día de campo, ¿cuántas combinaciones de actividades puede elegir cada estudiantes?

**Resolución**

**Datos**

$D = 6$ Deportivas
$C = 4$ Culturales
$N$: Número de posibilidades

Se tiene 6 actividades deportivas y 4 actividades culturales, se quiere la combinación, por la regla del producto:

$$N = D \cdot C \Longrightarrow N = 6 \cdot 4$$
$$\Longrightarrow N = 24$$

**Respuesta**
Pueden elegir entre 24 combinaciones para sus actividades.

**759.** En una feria escolar hay 3 eventos de ciencia, 4 eventos de arte y 4 eventos de historia. Si un estudiante quiere participar en cada uno de los eventos. ¿cuántas combinaciones posibles tiene?

**Resolución**

**Datos**

$C = 3$ Eventos de ciencia
$A = 4$ Eventos de arte
$H = 3$ Eventos de historia
$N$: Número de posibilidades

Hay 3 actividades de ciencia, 4 de arte y 3 de historia. Por la regla del producto:

$$N = C \cdot A \cdot H$$
$$\Rightarrow N = 3 \cdot 4 \cdot 3$$
$$\Rightarrow N = 36$$

**Respuesta**
Pueden elegir entre 36 combinaciones para sus actividades.

**760.** Julián tiene estilos de zapatos entre botas, tenis, sandalias que son de colores diferentes entre negro, blanco, azul y verde. ¿cuántos pares de zapatos diferentes puede armar Julián?

**Resolución**

**Datos**

$Z = 3$ Zapatos
$C = 4$ Colores
$N$: Número de posibilidades

Tiene 3 estilos de zapatos y 4 colores diferentes, por la regla del producto:

$$N = Z \cdot C$$
$$\Rightarrow N = 3 \cdot 4$$
$$\Rightarrow N = 12$$

**Respuesta**
Julián puede formar 12 pares de zapatos diferentes.

## Factorial

**761.** La maestra de matemática le pide a Andrea calcular el número 4!.

**Resolución**

Recordando que un número factorial es de la forma:

$$\forall a \in \mathbb{N}, a! = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

**Respuesta**
Andrea desarrolla el número y encuentra: 24

**762.** René debe calcular el número 5!.

**Resolución**

Recordando que un número factorial es de la forma:

$$\forall a \in \mathbb{N}, a! = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

**Respuesta**

Desarrollando el problema encontró 120.

**763.** ¿De cuántas maneras se puede ordenar 4 libros diferentes en un estante?

**Resolución**

$$P_n = n!$$

$$n = 3 \Rightarrow P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

**Respuesta**

Se pueden ordenar los libros de 6 maneras diferentes.

**764.** En una carrera de atletismo participan 5 corredores. ¿de cuántas maneras pueden salir en un único puesto los 5 corredores?

**Resolución**

Recordando que un número factorial es de la forma: $P_n = n!$

$$n = 5 \Rightarrow P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

**Respuesta**

5 corredores pueden salir de 120 maneras en un único puesto.

**765.** ¿De cuántas maneras se puede ordenar las letras de la palabra SOL?

**Resolución**

Las palabras son: $n = 3 \Rightarrow P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

SOL, OSL, LOS, SLO, OLS y LSO

**Respuesta**

Se pueden ordenar de 6 maneras.

**766.** ¿De cuántas maneras se puede ordenar las letras de la palabra GATO?

**Resolución**

La palabra GATO tiene 4 letras entonces:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

**Respuesta**

Se puede ordenar la palabra GATO de 24 maneras.

**767.** ¿De cuántas maneras diferente se puede ordenar los dígitos 1, 2, 3 y 4?

**Resolución**

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

**Respuesta**

Se puede ordenar de 24 maneras diferentes.

**768.** La mamá de Paola le dejó 3 tareas para la casa. ¿de cuántas maneras diferentes puede realizar las tareas?

**Resolución**

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

**Respuesta**

Se puede realizar de 6 maneras diferentes las tareas.

**769.** Hay 5 estudiantes en la promoción y se los quiere ordenar en una fila. ¿de cuantas maneras diferentes se los puede ordenar?

**Resolución**

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

**Respuesta**

Se los puede ordenar de 120 maneras diferentes.

**770.** Hay 4 roles diferentes en una obra de teatro y 4 actores. ¿de cuántas maneras diferentes se puede asignar los roles?

**Resolución**

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

**Respuesta**
Se pueden asignar roles de 24 maneras diferentes..

## Números combinatorios

**771.** ¿De cuántas maneras se puede elegir 3 estudiantes de un grupo de 5 estudiantes?

**Resolución**

El número combinatorio $\binom{n}{k}$ representa la cantidad de formas en que se pueden elegir $(\mathrm{k})$ elementos de un conjunto de $(\mathrm{n})$ elementos sin importar el orden. Se calcula utilizando la fórmula: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$n = 5$
$k = 3$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!}$$

$$\Rightarrow \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

$$\Rightarrow \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1}$$ simplificando términos semejantes

$$\Rightarrow \binom{5}{3} = 5 \cdot 2$$

$$\Rightarrow \binom{5}{3} = 10$$

**Respuesta**
Hay 10 maneras de elegir 3 elemtos de un conjunto de 5.

**772.** En la promoción se quiere formar un equipo de fútbol y postulan siete arqueros. ¿de cuántas formas se puede seleccionar dos jugadores, un arquero titular y uno suplente?

**Resolución**

Se calcula utilizando la fórmula: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Es claro ver que se quiere 2 jugadores de un grupo de 7, entonces

$n = 7$

$k = 2$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,(7-2)!}$$

$$\Rightarrow \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!}$$

$$\Rightarrow \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!}$$

$$\Rightarrow \binom{7}{2} = 7 \cdot 3$$

simplificando términos semejantes

$$\Rightarrow \binom{7}{2} = 21$$

**Respuesta**

Existen 21 maneras de seleccionar 2 arqueros en un grupo de 7.

**773.** Carolina tiene ocho libros de razonamiento matemático y quiere elegir cuatro para estudiarlos con el fin de agilizar su mente. ¿de cuántas formas se puede escoger los cuatro libros?

**Resolución**

Es claro ver, que se quiere escoger 4 libros de un grupo de 8, entonces:

$n = 8$

$k = 4$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\,(8-4)!}$$

$$\Rightarrow \binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!}$$

$$\Rightarrow \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!}$$

$$\Rightarrow \binom{8}{4} = 7 \cdot 2 \cdot 5$$

simplificando términos semejantes

$$\Rightarrow \binom{8}{4} = 70$$

**Respuesta**

Carolina tiene 70 maneras de seleccionar 4 libros de un grupo de 8.

**774.** En una unidad educativa de La Paz, hay 5 estudiantes que quieren formar un grupo de 3. ¿de cuántas maneras se pueden formar estos equipos si uno de ellos debe ser el líder?

**Resolución**

Primero se elige al líder:

$n = 5$

$k = 1$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{5}{1} = \frac{5!}{1!\,(5-1)!}$$

$$\Rightarrow \binom{5}{1} = \frac{5!}{4!}$$

$$\Rightarrow \binom{5}{1} = \frac{5 \cdot 4!}{4!}$$

simplificando términos semejantes

$$\Rightarrow \binom{5}{1} = 5$$

Se tiene 5 posibilidades de elegir un líder. Como ya se eligió al líder tomemos a los otros 2 estudiantes, es decir:

$n = 4$

$k = 2$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!}$$

$$\Rightarrow \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

$$\Rightarrow \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!}$$

$$\Rightarrow \binom{4}{2} = 2 \cdot 3$$

simplificando términos semejantes

$$\Rightarrow \binom{4}{2} = 6$$

*Fuente: Cámara de senadores*

Como hay 5 posibilidades elegir a un líder y 6 posibilidades de elegir a los otros 2 integrantes.

$$N = \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2} = 5 \cdot 6 = 30$$

**Respuesta**

Se pueden formar 30 equipos conformado por un lider y dos integrantes en un grupo de 5.

**775.** En una fiesta hay 20 personas, 10 hombres y 10 mujeres. ¿de cuántas maneras se pueden formar parejas mixtas con 10 hombres y 10 mujeres ?

**Resolución**

Para cada pareja elijamos un hombre.

$n = 10$

$k = 1$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{10}{1} = 10$$

Para cada pareja elijamos una mujer.

$n = 10$

$k = 1$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{10}{1} = 10$$

*Fuente: Revista La Época*

Como hay 10 posibilidades tanto para hombres y mujeres, por la regla del producto se tiene:

$$N = \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} = 10 \cdot 10 = 100$$

**Respuesta**
Hay 100 maneras en que se puede conformar parejas entre hombres y mujeres.

**776.** En un examen de matemática los estudiantes deben resolver 4 preguntas de un total de 8. ¿cuántas combinaciones de preguntas pueden elegir si es obligatorio hacer la pregunta 1 y 2?

## Resolución

Como la preguntas uno y dos son preguntas obligatorias se eligen dos preguntas de un grupo de seis preguntas, es decir:

$n = 6$

$k = 2$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Longrightarrow \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 1\cdot 4!} = 3\cdot 5$$

$$\Longrightarrow \binom{6}{2} = 15$$

**Respuesta**
Hay 15 combinaciones para elegir las 4 preguntas, teniendo elegidas las preguntas 1 y 2.

**777.** En una tienda de abarrotes hay 4 tipos de fideos. Si una persona quiere comprar 6 tipos de fideos, ¿de cuántas formas los puede comprar?

## Resolución

Se calcula utilizando la fórmula:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Como se quiere comprar 6 tipos de fideos entre 4 tipos de fideos entonces:

$$\Rightarrow \binom{4+6-1}{6} = \frac{(4+6-1)!}{6!\cdot(4-1)!}$$
$$= \frac{9!}{6!\cdot 3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$
$$= 3\cdot 4\cdot 7$$
$$= 84$$

*Fuente: Fabrica la Estrella S.R.L.*

**Respuesta**
Hay 84 maneras diferentes de comprar 6 tipos de fideos.

**778.** Una carpintería tiene 2 tipos de madera. Se quiere elegir 4 tablas para construir un estante. ¿de cuántas maneras se puede escoger las tablas?

## Resolución

Como se quiere elegir 4 tipos de tablas entre un grupo de 2:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$
$$\binom{2+4-1}{4} = \frac{5!}{4!\,(2-1)!} = \frac{5!}{4!\cdot 1!}$$
$$= \frac{5\cdot 4!}{4!}$$
$$= 5$$


*Fuente: Madera Velásquez*

**Respuesta**
Hay 5 formas diferentes de elegir 2 tablas.

**779.** En una tienda de dulces hay 3 tipos de dulces. Si un estudiante quiere comprar 8 dulces para él y sus amigos. ¿de cuántas formas puede comprarlos?

## Resolución

Como se quiere comprar 8 dulces entre un grupo de 3.

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

$$\Rightarrow \binom{3+8-1}{8} = \frac{(3+8-1)!}{8!\,(3-1)!} = \frac{10!}{8!\cdot 2!}$$

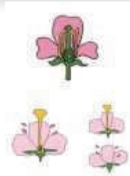
$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 2} = 5\cdot 9 = 45$$

**Respuesta**
Existen 45 maneras de comprar los dulces.

**780.** Un vendedor de flores tiene 2 tipos de rosas, si quiere armar un ramo con 6 rosas. ¿de cuántas formas puede hacerlo?

**Resolución**

Se quiere armar un ramo de 6 flores entre un grupo de 2 flores, entonces:



$$\binom{2+6-1}{6} = \frac{(2+6-1)!}{6!\,(2-1)!} = \frac{7!}{6!\cdot 1!} = 7$$

**Respuesta**
Hay 7 maneras de armar el ramo de rosas.

## Permutaciones, variaciones

**781.** ¿Cuál es el número de permutaciones de las vocales?

**Resolución**

Las vocales son 5: $\{a,e,i,o,u\}$

$$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$$

**Respuesta**
Las vocales tienen 120 permutaciones.

**782.** ¿Cuál es el número de permutaciones entre salteñas, tucumanas y rellenos?

**Resolución**

Son 3 aperitivos de media mañana, por tanto:

$$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$$

**Respuesta**
Las permutaciones de los 3 aperitivos son 6.

**783.** Encuentre el número de permutaciones de las letra en la palabra COCOA.

**Resolución**

Es una permutación con repeticiones pues las letras C y O se repiten 2 veces, la fórmula para un conjunto con (n) elementos donde algunos se repiten es:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_r!} \Longrightarrow \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = 30$$

**Respuesta**
Las letras de la palabra COCOA tiene 30 permutaciones.

**784.** ¿Cuántas permutaciones se forman con la palabra ABBA?

**Resolución**

Es una permutación con repeticiones pues las letras A y B se repiten 2 veces, luego:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_r!} \Longrightarrow \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = 6$$

**Respuesta**
Las letras de la palabra ABBA tienen 6 permutaciones.

**785.** Determine el número de permutaciones de las letras en la palabra LEVEL.

**Resolución**

Es una permutación con repeticiones, las letras L y E se repiten 2 veces luego:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_r!} \Longrightarrow \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = 30$$

**Respuesta**
Las letras de la palabra LEVEL tiene 30 permutaciones.

**786.** Calcular el número de variaciones de 2 danzas nacionales entre morenada, caporales y diablada.

**Resolución**

Para encontrar el número de variaciones de un subconjunto de k elementos de un conjunto de n elementos, tiene la notación P(n,k) y se calcula con:

$$V(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}\Rightarrow V(3,2)=\frac{3!}{(3-2)!}=\frac{3!}{1!}=3\cdot 2=6$$

**Respuesta**

El número de variaciones de 2 danzas es 6.

**787.** Calcular el número de variaciones de 2 estudiantes entre un grupo de 5 estudiantes.

**Resolución**

$$V(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}\Rightarrow V(5,2)=\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5!}{3!}=5\cdot 4=20$$

**Respuesta**

El número de variaciones de 2 estudiantes en un grupo de 5 es 20.

**788.** Encuentre el número de variaciones de 4 ríos tomados de Beni, Mamore, Pilcomayo, Desaguadero, Paraguay y Bermejo

**Resolución**

$$V(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}\Rightarrow V(6,4)=\frac{6!}{(6-4)!}=\frac{6!}{2!}=360$$

**Respuesta**

El número de variaciones de 4 ríos entre un grupo de 6 es 360.

**789.** En la selección Boliviana se tiene 5 defensores. ¿Encuentre el número de variaciones de 3 defensores?

**Resolución**

$$V(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}\Longrightarrow V(5{,}3)=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=60$$

**Respuesta**
El número de variaciones de 3 defensores es 60.

**790.** En una feria artesanal hay 4 puestos de artesanías distintos que deben organizarse en círculo. ¿De cuantas maneras se puede organizar?

**Resolución**

Cuando se dispone de n elementos en un círculo (permutación circular), el número de permutaciones distintas se determina con:

$$P_c(n)=(n-1)!\Longrightarrow P_c(4)=(4-1)!=3!=3\cdot 2\cdot 1=6$$

**Respuesta**
Hay 6 maneras de organizar los puestos en un círculo.

## Binomio de Newton

**791.** Aplicar el teorema del binomio de Newton y determinar: $(x+2)^2$

**Resolución**

El binomio de Newton tiene la forma:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\cdots+\binom{n}{1}ab^{n-1}+\binom{n}{0}b^n$$

Así:

$$(x+2)^2=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x^{2-k}2^k$$

**Nota:** El factorial de cero es uno, es decir:
$0!=1$

$$=\binom{2}{0}x^{2-0}+\binom{2}{1}x^{2-1}\cdot 2^1+\binom{2}{2}x^{2-2}\cdot 2^2$$

$$=\frac{2!}{0!\,(2-0)!}x^2\cdot 2^0+\frac{2!}{1!\,(2-1)!}x^1\cdot 2^1+\frac{2!}{2!\,(2-2)!}x^0\cdot 2^2$$

**Nota:** Para este capítulo se asumirá la siguiente igualdad:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}$$
$$(a)(b) = ab = a \cdot b$$

$$= \frac{2!}{0!\,2!}x^2 2^0 + \frac{2!}{1!\,1!}x^1 2^1 + \frac{2!}{2!\,0!}x^0 2^2$$
$$= 1 \cdot x^2 \cdot 1 + 2 \cdot x \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 4$$
$$= x^2 + 4x + 4$$

**Respuesta**
El resultado es: $x^2 + 4x + 4$

**792.** Mariel quiere aplicar el teorema del binomio de Newton y resolver: $(3x-1)^2$

## Resolución

El binomio de Newton tiene la forma:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \cdots + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \binom{n}{0} b^n$$

Así:

$$(3x-1)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} (3x)^{2-k}(-1)^k$$
$$= \binom{2}{0}(3x)^2 + \binom{2}{1}(3x)^{2-1}(-1)^1 + \binom{2}{2}(3x)^{2-2}(-1)^2$$
$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!}9x^2 \cdot 1 + \frac{2!}{1!\,(2-1)!}3x \cdot (-1) + \frac{2!}{2!\,(2-2)!}1 \cdot 1$$
$$= \frac{2!}{0!\,2!}9x^2 - \frac{2!}{1!\,1!}3x + \frac{2!}{2!\,0!}1$$
$$= 1 \cdot 9x^2 - 2 \cdot 3x + 1 \cdot 1$$
$$= 9x^2 - 6x + 1$$

**Respuesta**
El resultado es: $9x^2 - 6x + 1$

**793.** Determinar el resultado usando el teorema del binomio de Newton: $(2x+3)^2$

## Resolución

$$(2x+3)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} (2x)^{2-k}(3)^k$$

$$= \binom{2}{0}(2x)^2 + \binom{2}{1}(2x)^{2-1}(3)^1 + \binom{2}{2}(2x)^{2-2}(3)^2$$

$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!}4x^2 + \frac{2!}{1!\,(2-1)!}2x \cdot 3 + \frac{2!}{2!\,(2-2)!}1 \cdot 9$$

$$= \frac{2!}{0!\,2!}4x^2 + \frac{2!}{1!\,1!}6x + \frac{2!}{2!\,0!}9$$

$$= 1 \cdot 4x^2 + 2 \cdot 6x + 1 \cdot 9$$

$$= 4x^2 + 12x + 9$$

**Respuesta**

El resultado es: $4x^2 + 12x + 9$

**794.** La maestra de matemática deja de tarea, resolver: $(x-4)^2$ usando el teorema del binomio de Newton.

**Resolución**

$$(x-4)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^{2-k}(-4)^k$$

$$= \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}x^{2-1}(-4)^1 + \binom{2}{2}x^{2-2}(-4)^2$$

$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!}x^2 + \frac{2!}{1!\,(2-1)!}x \cdot (-4) + \frac{2!}{2!\,(2-2)!}1 \cdot 4^2$$

$$= \frac{2!}{0!\,2!}x^2 - \frac{2!}{1!\,1!}4x + \frac{2!}{2!\,0!}16$$

$$= 1 \cdot x^2 - 2 \cdot 4x + 1 \cdot 16$$

$$= x^2 - 8x + 16$$

**Respuesta**

El resultado es: $x^2 - 8x + 16$

**795.** Usando el teorema del binomio de Newton determinar:

**Resolución**

$$(5x+2)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} (5x)^{2-k}2^k$$

$$= \binom{2}{0}(5x)^2 + \binom{2}{1}(5x)^{2-1} \cdot 2^1 + \binom{2}{2}(5x)^{2-2} \cdot 2^2$$

$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!}25x^2 + \frac{2!}{1!\,(2-1)!}5x\cdot 2 + \frac{2!}{2!\,(2-2)!}1\cdot 4$$

$$= \frac{2!}{0!\,2!}25x^2 + \frac{2!}{1!\,1!}10x + \frac{2!}{2!\,0!}4$$

$$= 1\cdot 25x^2 + 2\cdot 10x + 1\cdot 4$$

$$= 25x^2 + 20x + 4$$

**Respuesta**

El resultado es: $25x^2 + 20x + 4$

**796.** Hallar el valor de la expresión: $(7-x)^2$

usando el teorema del binomio de Newton:

**Resolución**

$$(7-x)^2 = \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}(7)^{2-k}(-x)^k$$

$$= \binom{2}{0}7^2 + \binom{2}{1}7^{2-1}(-x)^1 + \binom{2}{2}7^{2-2}(-x)^2$$

$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!}49 + \frac{2!}{1!\,(2-1)!}7\cdot(-x) + \frac{2!}{2!\,(2-2)!}1\cdot x^2$$

$$= \frac{2!}{0!\,2!}49 - \frac{2!}{1!\,1!}7x + \frac{2!}{2!\,0!}x^2$$

$$= 1\cdot 49 - 2\cdot 7x + 1\cdot x^2$$

$$= 49 - 14x + x^2$$

**Respuesta**

El resultado es: $49 - 14x + x^2$

**797.** Hallar el valor de la expresión:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

usando el teorema del binomio de Newton determinar:

**Resolución**

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x^{2-k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}x^{2-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{2}{2}x^{2-2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!}x^2 + \frac{2!}{1!\,(2-1)!}x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2!}{2!\,(2-2)!}1\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{2!}{0!\,2!}x^2 - \frac{2!}{1!\,1!}\frac{1}{2}x + \frac{2!}{2!\,0!}\frac{1}{4}$$

$$= 1\cdot x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + 1\cdot\frac{1}{4}$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{4}$$

**Respuesta**
Andrés encuentra el valor que sale: $x^2 - x + \frac{1}{4}$

**798.** Resolver con el teorema del binomio de Newton: $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$

**Resolución**

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 = \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x^{2-k}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}x^{2-1}\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{2}{2}x^{2-2}\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!}x^2 + \frac{2!}{1!\,(2-1)!}x\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2!}{2!\,(2-2)!}1\cdot\frac{1}{9}$$

$$= \frac{2!}{0!\,2!}x^2 + \frac{2!}{1!\,1!}\frac{1}{3}x + \frac{2!}{2!\,0!}\frac{1}{9}$$

$$= 1\cdot x^2 + 2\cdot\frac{1}{3}x + 1\cdot\frac{1}{9}$$

$$= x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$$

**Respuesta**
El resultado es: $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

**799.** Usando el teorema del binomio de Newton resolver:

$$\left(2-\frac{1}{2}x\right)^2$$

$$\left(2-\frac{1}{2}x\right)^2=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}2^{2-k}\left(-\frac{1}{2}x\right)^k$$

$$=\binom{2}{0}2^2+\binom{2}{1}2^{2-1}\left(-\frac{1}{2}x\right)^1+\binom{2}{2}2^{2-2}\left(-\frac{1}{2}x\right)^2$$

$$=\frac{2!}{0!\,(2-0)!}2^2+\frac{2!}{1!\,(2-1)!}2\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right)+\frac{2!}{2!\,(2-2)!}1\cdot\frac{1}{4}x^2$$

$$=\frac{2!}{0!\,2!}2^2-\frac{2!}{1!\,1!}x+\frac{2!}{2!\,0!}\frac{1}{4}x^2$$

$$=1\cdot 2^2-2\cdot x+1\cdot\frac{1}{4}x^2$$

$$=4-2x+\frac{1}{4}x^2$$

**Respuesta**
Andrés encuentra el desarrollo: $4-2x+\frac{1}{4}x^2$

**800.** Usando el teorema del binomio de Newton, resolver:

$$\left(4+\frac{2}{3}x\right)^2$$

**Resolución**

$$\left(4+\frac{2}{3}x\right)^2=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}4^{2-k}\left(\frac{2}{3}x\right)^k$$

$$=\binom{2}{0}4^2+\binom{2}{1}4^{2-1}\left(\frac{2}{3}x\right)^1+\binom{2}{2}4^{2-2}\left(\frac{2}{3}x\right)^2$$

$$=\frac{2!}{0!\,(2-0)!}16+\frac{2!}{1!\,(2-1)!}4\cdot\left(\frac{2}{3}x\right)+\frac{2!}{2!\,(2-2)!}1\cdot\frac{4}{9}x^2$$

$$=\frac{2!}{0!\,2!}16+\frac{2!}{1!\,1!}4\left(\frac{2}{3}x\right)+\frac{2!}{2!\,0!}\frac{4}{9}x^2$$

$$=1\cdot 16+2\cdot 4\left(\frac{2}{3}x\right)+1\cdot\frac{4}{9}x^2$$

$$=16+\frac{16}{3}x+\frac{4}{9}x^2$$

**Respuesta**
El resultado es: $16+\frac{16}{3}x+\frac{4}{9}x^2$

## Principios del conteo

**801.** Un maestro de matemática tiene 5 libros de nivel inicial sobre resolución de ecuaciones que son: matemática 1, iniciando matemática y el arte de la matemática en ecuaciones. ¿cuántos libros puede recomendar a sus estudiantes?

**Resolución**

**Datos**

$x = 5$ matemática 1
$y = 5$ iniciando matemática
$z = 5$ arte de la matemática en ecuaciones
N: Número de libros para recomendar

Por la regla de la suma:

$$N = x + y + z \Longrightarrow N = 5 + 5 + 5$$
$$\Longrightarrow N = 15$$

*Fuente: Estudio ediciones*

**Respuesta**

El maestro puede recomendar 15 libros.

**802.** Un turista llegó la ciudad de La Paz y quiere ir de paseo al Valle de la Luna. Para llegar ahí hay 3 líneas de buses, 1 micro y 2 trufis. ¿cuántas maneras tiene de llegar a su destino?

**Resolución**

**Datos**

$B = 3$ Buses
$M = 1$ Micro
$T = 2$ Trufis
$N$: Número de posibilidades

Por la regla de la suma:

$$N = B + M + T \Longrightarrow N = 3 + 2 + 1$$
$$\Longrightarrow N = 6$$

**Respuesta**

El turista tiene 6 posibilidades de llegar a su destino.

**803.** Néstor quiere practicar deporte, tiene 3 escuelas de futbol, 4 escuelas de raquet y 2 escuelas de básquet. ¿cuántas opciones tiene para elegir?

**Resolución**

**Datos**

$F = 3$ Escuela de futbol
$R = 4$ Escuela de raquet
$B = 2$ escuela de básquet
$N$: Número de posibilidades

Tiene 3 escuelas de futbol, 4 de raquet y 2 de básquet. Por la regla de la suma:

$$N = F + R + B$$
$$\Rightarrow N = 3 + 4 + 2$$
$$\Rightarrow N = 9$$

**Respuesta**

Tiene 9 opciones para elegir.

**804.** Daniela va al parque de diversiones, tiene 3 tipos de montaña rusa, 4 tipos de ruedas de la fortuna y 3 tipos de tiro al blanco. ¿cuántas atracciones diferentes puede elegir Daniela?

**Resolución**

**Datos**

$M = 3$ Montaña rusa
$R = 4$ Rueda de la fortuna
$T = 3$ Tiro al blanco
$N$: Número de posibilidades

Por la regla de la suma:

$$N = M + R + T$$
$$\Rightarrow N = 3 + 4 + 3$$
$$\Rightarrow N = 10$$

**Respuesta**

Daniela puede escoger 10 atracciones diferentes.

**805.** Un hotel tiene el menú de desayuno con 5 tipos de jugo, 3 tipos de café y 4 tipos de batido. ¿Cuántas opciones de desayuno tiene en total?

**Resolución**

**Datos**

$J = 5$ Jugos
$C = 3$ Cafés
$B = 4$ Batidos
$N$: Número de posibilidades

Como se tiene 5 juegos, 3 cafés y 4 batidos. Por la regla de la suma:

$$N = J + C + B$$
$$\Rightarrow N = 5 + 3 + 4$$
$$\Rightarrow N = 12$$

**Respuesta**

Existen 12 opciones de desayunos.

**806.** En Potosí se quiere organizar un festival cultural donde se presenten cuatro grupos de música folklórica, cuatro grupos de música moderna y tres grupos de danza tradicional. Se pretende armar un programa donde exactamente incluya un grupo de cada tipo. ¿cuántas presentaciones diferentes se puede hacer?

**Resolución**

**Datos**

$F = 4$ Música folklórica
$M = 4$ Música moderna
$T = 3$ Música tradicional
$N$: Número de posibilidades

Hay 4 grupos de música folklórica, 4 de música moderna y 3 de música tradicional, usando la regla del producto se tendrá:

$$N = F \cdot M \cdot T \Longrightarrow N = 4 \cdot 4 \cdot 3$$
$$\Longrightarrow N = 48$$

**Respuesta**

Se pueden hacer 48 combinaciones diferentes.

**807.** Un colegio en Sucre tiene 4 libros diferentes: matemática, ciencias, literatura e historia, se quiere repartir cada uno. ¿cuántas maneras diferentes se pueden repartir los libros?

**Resolución**

**Datos**

$L_i = 1$ donde $i = 1,2,3,4$
Los cuatro libros
$N$: Número de posibilidades

Se tiene 4 opciones para repartir un libro, si reparte otro libro tiene 3 opciones y así sucesivamente, es decir:

$$P_n = n!$$
$$P_4 = 4!$$
$$\Longrightarrow N = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$\Longrightarrow N = 24$$

**Respuesta**

Se pueden repartir de 24 maneras diferentes los libros.

**808.** En un colegio se organizan una serie de conferencias de 2 días. Cada día se puede elegir entre 4 conferencias de ciencia y 3 conferencias de literatura. Si un estudiante quiere asistir exactamente a una conferencia durante los 2 días. ¿Cuántas elecciones diferentes de asistencia puede planear?

**Resolución**

**Datos**

$D = 2$ Días

$C = 4$ Conferencias de ciencia

$L = 3$ Conferencias de literatura

$N$: Número de posibilidades

Son 2 días para cada día el estudiante puede elegir una combinación. Se tiene 4 conferencias de ciencia y 3 de literatura. Por la regla del producto:

$N = D = D_1 \cdot D_2$ donde

$D_1$ y $D_2$ son días diferentes

$D_1 = L \cdot C \Longrightarrow D_1 = 3 \cdot 4 = 12$

$D_2 = L \cdot C \Longrightarrow D_1 = 3 \cdot 4 = 12$

$N = D_1 \cdot D_2 \Longrightarrow N = 12 \cdot 12 = 144$

**Respuesta**

Tienen 144 combinaciones entre los 2 días.

**809.** En una feria se presentan 3 proyectos. Hay 5 proyectos de biología, 4 proyectos de química y 3 proyectos de física. El jurado debe elegir un proyecto de cada uno. ¿cuántos proyectos diferentes puede elegir el jurado?

**Resolución**

**Datos**

$B = 5$ Proyectos de biología

$Q = 4$ Proyectos de química

$F = 3$ Proyectos de física

$N$: Número de posibilidades

Hay 5 proyectos de biología, 4 de química y 5 de física. Por la regla del producto:

$$N = B \cdot Q \cdot F \Longrightarrow N = 5 \cdot 4 \cdot 3$$
$$\Longrightarrow N = 60$$

**Respuesta**

El jurado puede elegir un proyecto de cada área de 60 maneras..

**810.** Se lanzan tres dados. ¿cuántas posibilidades existen de que salgan los tres números sin repeticiones?

**Resolución**

**Datos**

$D_1 = 6$ Posibilidad dado 1

$D_2 = 5$ Posibilidad dado 2

$D_3 = 4$ Posibilidad dado 3

$N$: Número de posibilidades

Si se lanza un dado hay seis posibilidades de que salga una cara, si se vuelve a lanzar reduce una posibilidad ya que no se quiere repeticiones y así sucesivamente. Por la regla del producto:

$$N = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \Longrightarrow N = 6 \cdot 5 \cdot 4$$
$$\Longrightarrow N = 120$$

**Respuesta**
Existen 120 posibilidades de lanzar los dados.

## Factorial

**811.** La maestra le pide a Adriana determinar el número:

$$\frac{4!}{2!}$$

**Resolución**

$$\frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

**Respuesta**
Andriana encuentra el valor que da: 12.

**812.** Le dejan de tarea a María calcular el número:

$$\frac{7!}{4!}$$

**Resolución**

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

**Respuesta**
El resultado es 210.

**813.** Simplificar la expresión:

$$\frac{8!}{6!}$$

**Resolución**

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56$$

**Respuesta**
La simplificación es 56.

**814.** Hallar el valor de: $\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}$

**Resolución**

$$\frac{6!}{4!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2\cdot 1}=3\cdot 5=15$$

**Respuesta**
El resultado es 15.

**815.** Hallar el valor de: $\dfrac{7!}{5!\cdot 3!}$

**Resolución**

$$\frac{7!}{5!\cdot 3!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=7$$

**Respuesta**
La simplificación es 7.

**816.** Simplificar la expresión: $\dfrac{7!\cdot 5!}{4!\cdot 3!}$

**Resolución**

$$\frac{7!\cdot 5!}{4!\cdot 3!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{4!\cdot 3!}=7\cdot 6\cdot 5\cdot 5\cdot 4=4200$$

**Respuesta**
La simplificación es 4200.

**817.** Le dejaron de tarea a Ana, simplificar la expresión: $\dfrac{8!\cdot 5!}{7!\cdot 4!}$

**Resolución** $\dfrac{8! \cdot 5!}{7! \cdot 4!} = \dfrac{8 \cdot 7! \cdot 5 \cdot 4!}{7! \cdot 4!} = 8 \cdot 5 = 40$

**Respuesta**
El resultado es 40.

**818.** Simplificar la expresión: $\dfrac{2! \cdot 5!}{3!}$

**Resolución** $\dfrac{2! \cdot 5!}{3!} = \dfrac{2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$

**Respuesta**
La simplificación es 40.

**819.** Determinar el valor de: $\dfrac{12! \cdot 2!}{10!}$

**Resolución** $\dfrac{12! \cdot 2!}{10!} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10! \cdot 2 \cdot 1}{10!} = 12 \cdot 11 \cdot 2 = 264$

**Respuesta**
La expresión da como resultado 264.

**820.** Simplificar la expresión: $\dfrac{7! \cdot 5!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}$

**Resolución** $\dfrac{7! \cdot 5!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{4! \cdot 3! \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 2100$

**Respuesta**
La simplificación es 2100.

## Números combinatorios

**821.** Hay un grupo de 10 estudiantes, donde 5 son hombres y 5 son mujeres. ¿cuántas maneras se puede formar un comité de 3 personas si en cada comité debe haber al menos una mujer y un hombre?

### Resolución

Veamos los casos para las combinaciones:

1 mujer de un grupo de 5 y 2 hombres de un grupo de 5

$n_1 = 5$

$k_1 = 1$

$n_2 = 5$

$k_2 = 1$

$$\binom{n}{m}\cdot\binom{n}{h} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\cdot\frac{n!}{h!\,(n-h)!}$$

$m$: mujeres y $h$: hombres

$$\Rightarrow \binom{5}{1}\cdot\binom{5}{2} = \frac{5!}{1!\,(5-1)!}\cdot\frac{5!}{2!\,(5-2)!}$$

$$\Rightarrow \binom{5}{1}\cdot\binom{5}{2} = \frac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}$$

$$\Rightarrow \binom{5}{1}\cdot\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4!}{1\cdot 4!}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 1\cdot 3!}$$

$$\Rightarrow \binom{5}{1}\cdot\binom{5}{2} = 5\cdot 10$$

simplificando términos semejantes

$$\Rightarrow \binom{5}{1}\cdot\binom{5}{2} = 50$$

2 mujeres de un grupo de 5 y 1 hombre de un grupo de 5.

$n_1 = 5$

$k_1 = 2$

$n_2 = 5$

$k_2 = 1$

$$\binom{n}{m}\cdot\binom{n}{h} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\cdot\frac{n!}{h!\,(n-h)!}$$

donde $m$: mujeres y $h$: hombres

$$\Rightarrow \binom{5}{2}\cdot\binom{5}{1} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!}\cdot\frac{5!}{1!\,(5-1)!}$$

$$\Rightarrow \binom{5}{2}\cdot\binom{5}{1} = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{5!}{1!\cdot 4!}$$

$$\Rightarrow \binom{5}{2}\cdot\binom{5}{1} = 10\cdot 5$$

simplificando términos semejantes

$$\Rightarrow \binom{5}{2}\cdot\binom{5}{1} = 50$$

simplificando términos semejantes

$$N = \binom{5}{1}\cdot\binom{5}{2} + \binom{5}{2}\cdot\binom{5}{1} = 50 + 50 = 100$$

**Respuesta**

Se puede conformar el comité de 100 maneras con al menos una mujer y un hombre.

**822.** ¿Cuántas maneras se puede combinar 4 camisas de un grupo de 12 si 2 deben ser del mismo color?

## Resolución

Primero elije las camisas del mismo color, es decir:

$n = 12$

$k = 2$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{12}{2} = \frac{12!}{2!\,(12-2)!}$$

$$\Rightarrow \binom{12}{2} = \frac{12!}{2!\cdot 10!}$$

$$\Rightarrow \binom{12}{2} = \frac{12\cdot 11\cdot 10!}{2\cdot 1\cdot 10!}$$

$$\Rightarrow \binom{12}{2} = 6\cdot 11$$

simplificando términos semejantes

$$\Rightarrow \binom{12}{2} = 66$$

Elije 2 camisas de las camisas restantes, es decir:

$n = 10$

$k = 2$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!}$$

$$\Rightarrow \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!}$$

$$\Rightarrow \binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{2\cdot 1\cdot 8!}$$

$$\Rightarrow \binom{10}{2} = 5\cdot 9$$

simplificando términos semejantes

$$\Rightarrow \binom{10}{2} = 45$$

Por la regla del producto:

$$N = \binom{12}{2}\cdot\binom{10}{2} = 66\cdot 45 = 2970$$

**Respuesta**

Se pueden combinar de 2970 maneras y elegir las 4 camisas.

**823.** ¿Cuántas maneras se puede elegir 5 hombres y 2 mujeres de un grupo de 7 hombres y 6 mujeres para formar un comité?

## Resolución

Primero se elije 5 hombres de un grupo de 7.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\,(7-5)!}$$

$$\Rightarrow \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\cdot 2!}$$

$$\Rightarrow \binom{7}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow \binom{7}{5} = 7 \cdot 3$$

simplificando términos semejantes

$$\Rightarrow \binom{7}{5} = 21$$

Se elije 2 mujeres de un grupo de 6.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!}$$

$$\Rightarrow \binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!}$$

$$\Rightarrow \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 1 \cdot 4!}$$

$$\Rightarrow \binom{6}{2} = 3 \cdot 5$$

simplificando términos semejantes

$$\Rightarrow \binom{6}{2} = 15$$

Por la regla del producto:

$$N = \binom{7}{5} \cdot \binom{6}{2} = 21 \cdot 15 = 315$$

**Respuesta**

Se puede formar el comité de 315 formas .

**824.** Existen 12 equipos de futsal entre 1ro a 6to de secundaria, se quiere formar 6 equipos para realizar un campeonato. ¿cuántas maneras se puede conformar a los equipos, si se debe tener un presidente para organizar el campeonato?

*Fuente: Colegio Británico Tarija*

Primero se elige al presidente.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{12}{1} = \frac{12!}{1!(12-1)!}$$

$$\Rightarrow \binom{12}{1} = 12$$

Se eligen a los otros 5 equipos de los restantes:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{11}{5} = \frac{11!}{5!\,(11-5)!}$$

$$\Rightarrow \binom{11}{5} = \frac{11!}{5! \cdot 6!}$$
$$\Rightarrow \binom{11}{5} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!}$$
$$\Rightarrow \binom{11}{5} = 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$
$$\Rightarrow \binom{11}{5} = 462$$

Por la regla del producto:

$$N = \binom{12}{1} \cdot \binom{11}{5} = 12 \cdot 462 = 5544$$

**Respuesta**

Existen 5544 formas de conformar los 6 equipos.

**825.** La tienda de un colegio, tiene 5 tipos de chocolates y 7 tipos de galletas. Un estudiante quiere comprar o un chocolate o una galleta. ¿cuántas maneras tiene para hacer su elección?

## Resolución

Formas de elegir un chocolate.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{5}{1} = 5$$

Formas de elegir una galleta.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{7}{1} = 7$$

Por la regla de la suma se tendrá:

$$N = \binom{5}{1} + \binom{7}{1} = 5 + 7 = 12$$

**Respuesta**

Tiene 12 maneras de elegir o un chocolate o una galleta.

**826.** En una biblioteca hay 10 libros de matemática y 8 libros de física. ¿cuántas maneras se puede elegir 2 libros de matemática o 2 libros de física?

## Resolución

Formas de elegir un libro de matemática:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!}$$

$$\Rightarrow \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!}$$

$$\Rightarrow \binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{2\cdot 1\cdot 8!}$$

$$\Rightarrow \binom{10}{2} = 5\cdot 9$$

simplificando términos semejantes

$$\Rightarrow \binom{10}{2} = 45$$

Formas de elegir un libro de física:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!}$$

$$\Rightarrow \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\cdot 6!}$$

$$\Rightarrow \binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{2\cdot 1\cdot 6!}$$

$$\Rightarrow \binom{8}{2} = 4\cdot 7$$

simplificando términos semejantes

$$\Rightarrow \binom{8}{2} = 28$$

Por la regla de la suma se tendrá:

$$N\binom{10}{2} + \binom{8}{2} = 45 + 28 = 73$$

**Respuesta**

Existen 73 maneras de tomar 2 libros de matemática o 2 libros de física.

**827.** Una salteñera permite que los clientes seleccionen 4 ingredientes entre carne, pollo, huevo, papas y aceituna. ¿cuántas maneras se pueden seleccionar los ingredientes?

## Resolución

*Fuente: Pagina Azafran*

Como les permiten elegir 4 opciones entre 5 elementos se tendrá:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

$$\Rightarrow \binom{4+5-1}{4} = \frac{(4+5-1)!}{4!\,(5-1)!} = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4!} = 70$$

**Respuesta**

Hay 70 maneras diferentes de seleccionar los 4 ingredientes para las salteñas.

**828.** Un cocinero tiene 7 ingredientes para preparar un saice, usando solo 5 ingredientes. ¿cuántas maneras puede hacer la combinación de ingredientes?

## Resolución

Tiene 7 ingredientes, y solo puede escoger 5 de ellos para preparar un plato

*Fuente: Los Tiempos*

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

$$\Rightarrow \binom{7+5-1}{7} = \frac{(7+5-1)!}{7!\,(5-1)!} = \frac{11!}{7!\cdot 4!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 330$$

**Respuesta**

Existen 330 maneras diferentes de combinar los ingredientes.

**829.** En una reserva natural, un biólogo quiere observar 5 especies de animales entre 6 tipos disponibles. ¿cuántas maneras se puede hacer la observación?

## Resolución

Se tiene 6 tipos animales y se quiere observar 5 entonces:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

$$\Rightarrow \binom{5+6-1}{5} = \frac{(5+6-1)!}{5!\,(6-1)!} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5!} = 252$$

**Respuesta**

Existen 252 maneras diferentes de observar a los animales.

**830.** Un farmacéutico debe preparar 7 dosis para un medicamento contra el resfrío por las bajas temperaturas, solo tomando 4 ingredientes activos. ¿Cuántas maneras puede combinar los ingredientes?

**Resolución**

Tiene 4 elementos para preparar 7 dosis, entonces:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

$$\Rightarrow \binom{7+4-1}{7} = \frac{(7+4-1)!}{7!\,(4-1)!} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 120$$

**Respuesta**

Puede combinar de 120 los ingredientes para crear las dosis.

## Permutación

**831.** Maya tiene en su mochila un cuaderno, un libro, lapicero, lentes, gorra y una chompa. ¿cuál es el número de permutaciones que tiene en los elementos de su mochila?

**Resolución**

Como tiene 6 elementos en su mochila el número de permutaciones será:

*Fuente: Periódico Los Tiempos*

$$6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$$

**Respuesta**

El número de permutaciones de los elementos en su mochila es 702.

**832.** ¿Cuál es el número de permutaciones que tiene las letras de la palabra VASO?

**Resolución**

Como tiene 4 letras la palabra VASO entonces:

$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$$

**Respuesta**

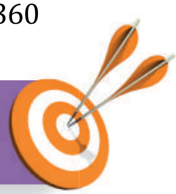
El número de permutaciones es 24.

**833.** Determinar el número de permutaciones que tienen las letras de la palabra QUINUA.

**Resolución**

Es una permutación con repeticiones, la letra U se repite 2 veces, la fórmula para un conjunto con $(n)$ elementos donde algunos se repiten, tiene la forma:

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \cdots \cdot n_r!} \Rightarrow \frac{6!}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!\cdot 1}$$
$$= 360$$



**Respuesta**

Las letras de la palabras QUINUA tienen 360 permutaciones.

**834.** ¿Cuál es el número de permutaciones que tienen las letras de la palabra PAPAYA?

**Resolución**

Es una permutación con repeticiones, la letra P se repite 2 veces y A se repite 3 veces, luego:

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \cdots \cdot n_r!} \Rightarrow \frac{6!}{2!\cdot 3!\cdot 1!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!\cdot 1}$$
$$= 60$$

**Respuesta**

Las letras de la palabra PAPAYA tiene 60 permutaciones.

**835.** Laura quiere saber cuál es el número de permutaciones que tienen las letras de su nombre.

**Resolución**

La letra A se repite 2 veces, la luego:

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \cdots \cdot n_r!} \Rightarrow \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!\cdot 1} = 60$$

**Respuesta**

Las letras del nombre de Laura tienen 60 permutaciones.

**836.** Determinar el número de variaciones de 4 platos de Bolivia entre, fricase, pique macho, silpancho, majadito y ají de fideo.

## Resolución

*Fuente: Periódico Voces Plus*

Son 4 platos de un conjunto de 5 platos, tiene la notación $V(n, k)$ y se calcula de la forma:

$$V(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}\Rightarrow V(5,4)=\frac{5!}{(5-4)!}=120$$

**Respuesta**

El número de variaciones de 4 platos es 120.

**837.** Encuentre el número de variaciones de 3 cultivos entre papa, maíz, cebada, trigo, arroz y yuca.

## Resolución

*Fuente: Instituto nacional de seguro agrario*

Son 3 cultivos de un conjunto de 6, tiene la notación $V(n,k)$ y se calcula de la forma:

$$V(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}\Rightarrow V(6,3)=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6!}{3!}$$
$$=120$$

**Respuesta**

El número de variaciones de 4 cultivos es 120.

**838.** Un grupo de estudiantes tocan los siguientes instrumentos: bombo, zampoña, quena, guitarra. Determinar el número de variaciones de 2 instrumentos.

## Resolución

Son 4 instrumentos y se quiere determinar el número de variaciones de 2 intrumentos, tiene la notación $V(n,k)$ y se calcula de la forma:

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \Longrightarrow V(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

**Respuesta**

El número de variaciones de 2 instrumentos es 12.

**839.** Calcular el número de 3 personajes históricos entre Simón Bolivar, Antonio José de Sucre, Eduardo Avaroa, Juancito Pinto, Melchor Pérez.

**Resolución**

Son 5 personajes históricos, se quiere el grupo de permutaciones de 3, tiene la notación $V(n,k)$ y se calcula de la forma:

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \Longrightarrow V(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

**Respuesta**

El número de personajes históricos es 60.

**840.** Durante una ceremonia en el Salar de Uyuni, 7 fotógrafos deben colocarse en un círculo, dos de ellos son del mismo equipo. ¿De cuántas maneras pueden organizarse?

**Resolución**

Cuando se dispone de 7 elementos en un círculo y hay repeticiones $\mathrm{k}_1 = 2$, el número de permutaciones distintas es:

$$V_{c_k}(n) = \frac{(n-1)!}{k_i!} \Longrightarrow V_{c_k}(7) = \frac{(7-1)!}{2!} = \frac{6!}{2!} = 360$$

**Respuesta**

Hay 360 maneras de organizar a los 7 fotografos.

## Binomio de Newton

**841.** Usando el teorema del binomio de Newton desarrollar:

$$\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}\right)^2$$

**Resolución**

El binomio de Newton tiene la forma:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\cdots+\binom{n}{1}ab^{n-1}+\binom{n}{0}b^n$$

Así:

$$\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}\right)^2=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\left(\frac{3}{4}x\right)^{2-k}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

$$=\binom{2}{0}\left(\frac{3}{4}x\right)^2+\binom{2}{1}\left(\frac{3}{4}x\right)^{2-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^1+\binom{2}{2}\left(\frac{3}{4}x\right)^{2-2}\left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$=\frac{2!}{0!\,(2-0)!}\left(\frac{3}{4}x\right)^2+\frac{2!}{1!\,(2-1)!}\left(\frac{3}{4}x\right)\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2!}{2!\,(2-2)!}1\cdot\frac{1}{9}$$

$$=\frac{2!}{0!\,2!}\left(\frac{3}{4}x\right)^2-\frac{2!}{1!\,1!}\left(\frac{3}{4}x\right)\frac{1}{3}+\frac{2!}{2!\,0!}\frac{1}{9}$$

$$=1\cdot\frac{9}{16}x^2-2\cdot\frac{1}{4}x+1\cdot\frac{1}{9}$$

$$=\frac{9}{16}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{9}$$

**Respuesta**

El desarrollo es: $\frac{9}{16}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{9}$

**842.** Usando el teorema del binomio de Newton desarrollar:

$$\left(\frac{2}{5}x+\frac{5}{2}\right)^2$$

**Resolución**

El binomio de Newton tiene la forma:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \cdots + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \binom{n}{0} b^n$$

Así:

$$\left(\frac{2}{5}x + \frac{5}{2}\right)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \left(\frac{2}{5}x\right)^{2-k} \left(\frac{5}{2}\right)^k$$

$$= \binom{2}{0} \left(\frac{2}{5}x\right)^2 + \binom{2}{1} \left(\frac{2}{5}x\right)^{2-1} \left(\frac{5}{2}\right)^1 + \binom{2}{2} \left(\frac{2}{5}x\right)^{2-2} \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!} \left(\frac{2}{5}x\right)^2 + \frac{2!}{1!\,(2-1)!} \left(\frac{2}{5}x\right) \left(\frac{5}{2}\right) + \frac{2!}{2!\,(2-2)!} 1 \cdot \frac{25}{4}$$

$$= \frac{2!}{0!\,2!} \left(\frac{2}{5}x\right)^2 + \frac{2!}{1!\,1!} \left(\frac{2}{5}x\right) \frac{5}{2} + \frac{2!}{2!\,0!} \frac{25}{4}$$

$$= 1 \cdot \frac{4}{25} x^2 + 2 \cdot x + 1 \cdot \frac{25}{4}$$

$$= \frac{4}{25} x^2 + 2x + \frac{25}{4}$$

**Respuesta**

La solución es: $\frac{4}{25} x^2 + 2x + \frac{25}{4}$

**843.** Usando el teorema del binomio de Newton desarrollar:

$$\left(\frac{2}{9}x - \frac{3}{4}\right)^2$$

## Resolución

$$\left(\frac{2}{9}x - \frac{3}{4}\right)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \left(\frac{2}{9}x\right)^{2-k} \left(-\frac{3}{4}\right)^k$$

$$= \binom{2}{0} \left(\frac{2}{9}x\right)^2 + \binom{2}{1} \left(\frac{2}{9}x\right)^{2-1} \left(-\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{2}{2} \left(\frac{2}{9}x\right)^{2-2} \left(-\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!} \left(\frac{2}{9}x\right)^2 + \frac{2!}{1!\,(2-1)!} \left(\frac{2}{9}x\right) \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{2!}{2!\,(2-2)!} 1 \cdot \frac{9}{16}$$

$$= \frac{2!}{0!\,2!}\left(\frac{2}{9}x\right)^2 - \frac{2!}{1!\,1!}\left(\frac{2}{9}x\right)\frac{3}{4} + \frac{2!}{2!\,0!}\frac{9}{16}$$

$$= 1\cdot\frac{4}{81}x^2 - 2\cdot\frac{1}{6}x + 1\cdot\frac{9}{16}$$

$$= \frac{4}{81}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{9}{16}$$

**Respuesta**

La solución es: $\frac{4}{81}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{9}{16}$

**844.** Determinar el valor de la expresión:

$$(2x+3)^3$$

usando el teorema del binomio de Newton.

**Resolución**

$$(2x+3)^3 = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(2x)^{3-k}(3)^k$$

$$= \binom{3}{0}(2x)^3 + \binom{3}{1}(2x)^{3-1}(3)^1 + \binom{3}{2}(2x)^{3-2}(3)^2 + \binom{3}{3}(2x)^{3-3}(3)^3$$

$$= \frac{3!}{0!\,(3-0)!}(2x)^3 + \frac{3!}{1!\,(3-1)!}(2x)^2(3)^1 + \frac{3!}{2!\,(3-2)!}(2x)^1(3)^2 + \frac{3!}{3!\,(3-3)!}(2x)^0(3)^3$$

$$= \frac{3!}{0!\,3!}8x^3 + \frac{3!}{1!\,2!}4x^2\cdot 3 + \frac{3!}{2!\,1!}2x\cdot 9 + \frac{3!}{3!\,0!}1\cdot 27$$

$$= 1\cdot 8x^3 + 3\cdot 4x^2\cdot 3 + 3\cdot 2x\cdot 9 + 1\cdot 1\cdot 27$$

$$= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$$

**Respuesta**

La solución es: $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

**845.** Determinar el valor de la expresión:

$$(x-5)^3$$

usando el teorema del binomio de Newton.

## Resolución

$$(x-5)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (x)^{3-k}(-5)^k$$

$$= \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^{3-1}(-5)^1 + \binom{3}{2} x^{3-2}(-5)^2 + \binom{3}{3} x^{3-3}(-5)^3$$

$$= \frac{3!}{0!\,(3-0)!}x^3 + \frac{3!}{1!\,(3-1)!}x^2(-5)^1 + \frac{3!}{2!\,(3-2)!}x^1(-5)^2 + \frac{3!}{3!\,(3-3)!}x^0(-5)^3$$

$$= \frac{3!}{0!\,3!}x^3 - \frac{3!}{1!\,2!}x^2 \cdot 5 + \frac{3!}{2!\,1!}x \cdot 25 - \frac{3!}{3!\,0!}1 \cdot 125$$

$$= 1 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 5 + 3 \cdot x \cdot 25 - 1 \cdot 125$$

$$= x^3 - 15x^2 + 75x - 125$$

**Respuesta**

La solución es: $x^3 - 15x^2 + 75x - 125$

**846.** Sean a, b números reales, hallar el valor de la expresión:

$$(2a+b)^3$$

usando el teorema del binomio de Newton.

## Resolución

$$(2a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (2a)^{3-k} b^k$$

$$= \binom{3}{0} (2a)^3 + \binom{3}{1} (2a)^{3-1} b^1 + \binom{3}{2} (2a)^{3-2} b^2 + \binom{3}{3} (2a)^{3-3} b^3$$

$$= \frac{3!}{0!\,(3-0)!}(2a)^{3} + \frac{3!}{1!\,(3-1)!}(2a)^{2}b^{1} + \frac{3!}{2!\,(3-2)!}(2a)^{1}b^{2} + \frac{3!}{3!\,(3-3)!}(2a)^{0}b^{3}$$

$$= \frac{3!}{0!3!}8a^3 + \frac{3!}{1!2!}4a^2\cdot b + \frac{3!}{2!1!}2a\cdot b^2 + \frac{3!}{3!0!}1\cdot b^3$$

$$= 1\cdot 8a^3 + 3\cdot 4a^2\cdot b + 3\cdot 2a\cdot b^2 + 1\cdot 1\cdot b^3$$

$$= 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$$

**Respuesta**

La solución es: $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$

**847.** Hallar el valor de la expresión: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^3$ usando el teorema del binomio de Newton.

**Resolución**

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^3 = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}x^{3-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^{3-1}\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{3}{2}x^{3-2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{3}{3}x^{3-3}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{3!}{0!\,(3-0)!}x^3 + \frac{3!}{1!\,(3-1)!}x^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{3!}{2!\,(3-2)!}x^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3!}{3!\,(3-3)!}x^0\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{3!}{0!\,3!}x^3 + \frac{3!}{1!\,2!}x^2\cdot\frac{1}{2} + \frac{3!}{2!\,1!}x\cdot\frac{1}{4} + \frac{3!}{3!\,0!}1\cdot\frac{1}{8}$$

$$= 1\cdot x^3 + 3\cdot x^2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot x\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot 1\cdot\frac{1}{8}$$

$$= x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$$

**Respuesta**

La solución es: $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$

**848.** Usando el teorema del binomio de Newton hallar el valor de:

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)^3$$

## Resolución

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{2}{k} \left(\frac{1}{2}x\right)^{3-k} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$= \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}x\right)^3 + \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}x\right)^{3-1}\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^{3-2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}x\right)^{3-3}\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$= \frac{3!}{0!(3-0)!}\left(\frac{1}{2}x\right)^3 + \frac{3!}{1!(3-1)!}\left(\frac{1}{2}x\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \frac{3!}{2!(3-2)!}\left(\frac{1}{2}x\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3!}{3!(3-3)!}\left(\frac{1}{2}x\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$= \frac{3!}{0!\,3!}\frac{1}{8}x^3 + \frac{3!}{1!\,2!}\frac{1}{4}x^2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3!}{2!\,1!}\frac{1}{2}x \cdot \frac{9}{16} + \frac{3!}{3!\,0!}1 \cdot \frac{27}{64}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{8} \cdot x^3 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{9}{16} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{27}{64}$$

$$= \frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{27}{32}x + \frac{27}{64}$$

**Respuesta**

La solución es: $\frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{27}{32}x + \frac{27}{64}$

**849.** Usando el teorema del binomio de Newton hallar el valor de:

$$\left(\frac{1}{3}m - \frac{2}{3}n\right)^3$$

para n,m números reales cuales quiera

## Resolución

$$\left(\frac{1}{3}m-\frac{2}{3}n\right)^3=\sum_{k=0}^{3}\binom{2}{k}\left(\frac{1}{3}m\right)^{3-k}\left(-\frac{2}{3}n\right)^k$$

$$=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}m\right)^3+\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}m\right)^{3-1}\left(-\frac{2}{3}n\right)^1+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}m\right)^{3-2}\left(-\frac{2}{3}n\right)^2$$

$$+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}m\right)^{3-3}\left(-\frac{2}{3}n\right)^3$$

$$=\frac{3!}{0!\,(3-0)!}\left(\frac{1}{3}m\right)^3+\frac{3!}{1!\,(3-1)!}\left(\frac{1}{3}m\right)^2\left(-\frac{2}{3}n\right)^1$$

$$+\frac{3!}{2!\,(3-2)!}\left(\frac{1}{3}m\right)^1\left(-\frac{2}{3}n\right)^2$$

$$+\frac{3!}{3!\,(3-3)!}\left(\frac{1}{3}m\right)^0\left(-\frac{2}{3}n\right)^3$$

$$=\frac{3!}{0!\,3!}\frac{1}{27}m^3-\frac{3!}{1!\,2!}\frac{1}{9}m^2\cdot\frac{2}{3}n+\frac{3!}{2!\,1!}\frac{1}{3}m\cdot\frac{4}{9}n^2-\frac{3!}{3!\,0!}1\cdot\frac{8}{27}n^3$$

$$=1\cdot\frac{1}{27}m^3-3\cdot\frac{1}{9}m^2\cdot\frac{2}{3}n+3\cdot\frac{1}{3}m\cdot\frac{4}{9}n^2-1\cdot1\cdot\frac{8}{27}n^3$$

$$=\frac{1}{27}m^3-\frac{2}{9}m^2n+\frac{4}{9}mn^2-\frac{8}{27}n^3$$

**Respuesta**

La solución es: $\frac{1}{27}m^3-\frac{2}{9}m^2n+\frac{4}{9}mn^2-\frac{8}{27}n^3$

**850.** Usando el teorema del binomio de Newton hallar el valor de:

$$\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}y\right)^3$$

para x,y números reales cuales quiera.

## Resolución

$$\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}y\right)^3=\sum_{k=0}^{3}\binom{2}{k}\left(\frac{1}{4}x\right)^{3-k}\left(\frac{1}{5}y\right)^k$$

$$= \binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}x\right)^{3} + \binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}x\right)^{3-1}\left(\frac{1}{5}y\right)^{1} + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}x\right)^{3-2}\left(\frac{1}{5}y\right)^{2} + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}x\right)^{3-3}\left(\frac{1}{5}y\right)^{3}$$

$$= \frac{3!}{0!\,(3-0)!}\left(\frac{1}{4}x\right)^{3} + \frac{3!}{1!\,(3-1)!}\left(\frac{1}{4}x\right)^{2}\left(\frac{1}{5}y\right)^{1} + \frac{3!}{2!\,(3-2)!}\left(\frac{1}{4}x\right)^{1}\left(\frac{1}{5}y\right)^{2} + \frac{3!}{3!\,(3-3)!}\left(\frac{1}{4}x\right)^{0}\left(\frac{1}{5}y\right)^{3}$$

$$= \frac{3!}{0!\,3!}\frac{1}{64}x^{3} + \frac{3!}{1!\,2!}\frac{1}{16}x^{2}\cdot\frac{1}{5}y + \frac{3!}{2!\,1!}\frac{1}{4}x\cdot\frac{1}{25}y^{2} + \frac{3!}{3!\,0!}1\cdot\frac{1}{125}y^{3}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{64}x^{3} + 3\cdot\frac{1}{16}x^{2}\cdot\frac{1}{5}y + 3\cdot\frac{1}{4}x\cdot\frac{1}{25}y^{2} + 1\cdot 1\cdot\frac{1}{125}y^{3}$$

$$= \frac{1}{64}x^{3} + \frac{3}{80}x^{2}y + \frac{3}{100}xy^{2} + \frac{1}{125}y^{3}$$

**Respuesta**

La solución es: $\frac{1}{64}x^{3} + \frac{3}{80}x^{2}y + \frac{3}{100}xy^{2} + \frac{1}{125}y^{3}$

**851.** Hallar el valor de:

$$\left(\frac{3}{5}a - \frac{2}{7}b\right)^{3}$$

para a, b números reales cualesquiera, usando el teorema del binomio de Newton

## Resolución

$$\left(\frac{3}{5}a - \frac{2}{7}b\right)^{3} = \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\left(\frac{3}{5}a\right)^{3-k}\left(-\frac{2}{7}b\right)^{k}$$

$$\left(\tfrac{3}{5}a-\tfrac{2}{7}b\right)^{3}=\Sigma_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\left(\tfrac{3}{5}a\right)^{3-k}\left(-\tfrac{2}{7}b\right)^{k}=\binom{3}{0}\left(\tfrac{3}{5}a\right)^{3}+\binom{3}{1}\left(\tfrac{3}{5}a\right)^{3-1}\left(-\tfrac{2}{7}b\right)^{1}$$

$$+\binom{3}{2}\left(\frac{3}{5}a\right)^{3-2}\left(-\frac{2}{7}b\right)^{2}+\binom{3}{3}\left(\frac{3}{5}a\right)^{3-3}\left(-\frac{2}{7}b\right)^{3}$$

$$=\frac{3!}{0!\,(3-0)!}\left(\frac{3}{5}a\right)^{3}+\frac{3!}{1!\,(3-1)!}\left(\frac{3}{5}a\right)^{2}\left(-\frac{2}{7}b\right)^{1}+\frac{3!}{2!\,(3-2)!}\left(\frac{3}{5}a\right)^{1}\left(-\frac{2}{7}b\right)^{2}$$

$$+\frac{3!}{3!\,(3-3)!}\left(\frac{3}{5}a\right)^{0}\left(-\frac{2}{7}b\right)^{3}$$

$$=\frac{3!}{0!\,3!}\frac{27}{125}a^{3}-\frac{3!}{1!\,2!}\frac{9}{25}a^{2}\cdot\frac{2}{7}b+\frac{3!}{2!\,1!}\frac{3}{5}a\cdot\frac{4}{49}b^{2}-\frac{3!}{3!\,0!}1\cdot\frac{8}{343}b^{3}$$

$$=1\cdot\tfrac{27}{125}a^{3}-3\cdot\tfrac{9}{25}a^{2}\cdot\tfrac{2}{7}b+3\cdot\tfrac{3}{5}a\cdot\tfrac{4}{49}b^{2}-1\cdot1\cdot\tfrac{8}{343}b^{3}$$

$$=\frac{27}{125}a^{3}-\frac{54}{175}a^{2}b+\frac{36}{245}ab^{2}-\frac{8}{343}b^{3}$$

**Respuesta**

La solución es: $\frac{27}{125}a^{3}-\frac{54}{175}a^{2}b+\frac{36}{245}ab^{2}-\frac{8}{343}b^{3}$

## Principios del conteo

**852.** Un turista que está en la ciudad de Santa Cruz, quiere visitar el parque Noel Kempff o el parque Nacional Amboró. Para ir a cada parque tiene la opción de transportarse en 2 aerolíneas, 3 buses y 4 empresas de renta de coches particulares, ¿cuántas maneras tiene de llegar a uno de estos parques?

### Resolución

**Datos**

$A = 2$ Aerolíneas
$B = 3$ Buses
$R = 4$ Rentar
$P_1$: Primer parque
$P_2$: Segundo parque
$N$: Número de posibilidades

Tiene la posibilidad de transportarse en, 2 aerolíneas, 3 buses y 4 empresas de renta de coches particulares. Por la regla de la suma: $N = N_1 + N_2$ donde,
Entonces:

$$N_1 = A + B + R \Longrightarrow N_1 = 2 + 3 + 4$$
$$\Longrightarrow N_1 = 9$$
$$N_2 = A + B + R \Longrightarrow N_2 = 2 + 3 + 4$$
$$\Longrightarrow N_2 = 9$$
$$N = N_1 + N_2 \Longrightarrow N = 9 + 9$$
$$\Longrightarrow N = 18$$

**Respuesta**
El turista tiene 18 posibilidades de transportarse a un parque.

**853.** Abel se puso a pensar en su nombre y quiere saber de cuántas maneras distintas puede re ordenar cada letra de su nombre

### Resolución

**Datos**

$a$: Primera letra
$b$: Segunda letra
$c$: Tercera letra
$d$: Cuarta letra
$N$: Número posibilidades

Abel tiene 4 letras en su nombre, si pone una letra, le quedarían 3 letras, si pone otra letra le quedan 2 letras y si pone otra letra le queda 1 letra, entonces por la regla del producto se tendrá:

$$N = a \cdot b \cdot c \cdot d \Longrightarrow N = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$\Longrightarrow N = 24$$

**Respuesta**
Abel puede re ordenar las letras de su nombre 24 veces.

**854.** Laura se pone a observar la placa del automóvil de su papá, nota que consta de 2 letras seguidas y 4 dígitos, ¿de cuántas formas podrá formar una placa si las letras y dígitos no se repiten?

## Resolución

### Datos

$a = 26$ Primera letra
$b = 25$ Segunda letra
$w = 10$ Primera digito
$x = 9$ Segundo digito
$y = 8$ Tercer digito
$z = 7$ Cuarto digito
$N$: Número posibilidades

Existen 26 letras en el abecedario y 10 dígitos, se pone una letra en el primer espacio tenemos 26 opciones, si ponemos una letra en el segundo espacio nos quedará 25 opciones, si ponemos un número en el tercer espacio tenemos 10 opciones, si ponemos un número en la cuarta posición tenemos 9 opciones y así sucesivamente, se tendrá:

$$N = a \cdot b \cdot w \cdot x \cdot y \cdot z$$
$$\Rightarrow N = 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$
$$\Rightarrow N = 3\,276\,000$$

**Respuesta**
Habrían 3 276 000 formas de generar una placa.

**855.** Se observa la placa de un automóvil que consta de 2 letras seguidas y 3 números impares, ¿de cuántas formas podrá formar una placa si las letras y números no se repiten?

## Resolución

### Datos

$a = 26$ Primera letra
$b = 25$ Segunda letra
$w = 5$ Número impar
$x = 4$ Número impar
$y = 3$ Número impar
$N$: Número posibilidades

Existen 26 letras en el abecedario y 10 números, se pone una letra en el primer espacio tenemos 26 opciones, si ponemos una letra en el segundo espacio nos quedará 25 opciones, si ponemos un número impar en el tercer espacio tenemos 5 opciones, si ponemos un número en la cuarta posición tenemos 4 opciones y así sucesivamente, se tendrá:

$$N = a \cdot b \cdot w \cdot x \cdot y$$
$$\Rightarrow N = 26 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$
$$\Rightarrow N = 39\,000$$

**Respuesta**
Habrían 39 000 formas de generar una placa.

**856.** El maestro de matemática asigna a la clase cuatro ejercicios de sistemas de ecuaciones, además les pide resolverlos por tres métodos diferentes en dos diferentes variables, ¿cuántos ejercicios resolverán?

**Resolución**

**Datos**

$a = 4$ Sistemas de ecuaciones
$b = 3$ Métodos
$c = 2$ Variables
$N$: Número posibilidades

Son cuatro sistemas, 3 métodos en variables diferentes, por la regla del producto se tendrá:

$$N = a \cdot b \cdot c$$
$$\Longrightarrow N = 4 \cdot 3 \cdot 2$$
$$\Longrightarrow N = 24$$

**Respuesta**

Resolverán los problemas de 24 manera diferentes.

**857.** Mayela quiere ir de paseo, tiene 5 pantalones, 6 chompas y 4 tenis, ¿cuántas maneras puede combinar su atuendo?

**Resolución**

**Datos**

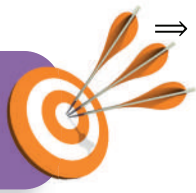
$P = 5$ Pantalones
$C = 6$ Chompas
$T = 4$ Tenis
$N$: Número posibilidades

Tiene 5 pantalones, 6 chompas y 4 tenis, por la regla del producto:

$$N = P \cdot C \cdot T$$
$$\Longrightarrow N = 5 \cdot 6 \cdot 4$$
$$\Longrightarrow N = 120$$

**Respuesta**

Tiene 120 posibilidades de combinar su atuendo.



**858.** Un maestro de matemática tiene 5 temas diferentes para asignar tareas a sus estudiantes. Si decide asignar una tarea a cada estudiante, ¿cuántas asignaciones de tareas diferentes puede asignar?

**Resolución**

**Datos**

$T_1 = 5$ Temas
$T_i = 5$ Tareas, donde $i = \{1,2,3,4,5\}$
$N$: Número posibilidades

Tiene 5 temas y se quiere 5 tareas, notemos que cada tarea es independiente de los temas. Por la regla del producto se tendrá:

$$N = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5$$
$$\Longrightarrow N = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$
$$\Longrightarrow N = 5^5$$
$$\Longrightarrow N = 3125$$

**Respuesta**
Tiene 3125 asignaciones para las tareas diferentes.

**859.** En un curso de 15 estudiantes, el maestro de matemática quiere asignar 5 proyectos diferentes, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden asignar los proyectos?

**Resolución**

**Datos**

$E = 15$ Estudiantes
$P = 4$ Proyectos
$N$: Número de posibilidades

Tiene 4 proyectos y son 15 estudiantes, cuando reparta un proyecto le quedaran 14, y cuando reparta otro le quedaran 13 y así sucesivamente. Por la regla del producto.

$$N = (E) \cdot (E-1) \cdot (E-2) \cdot (E-3)$$
$$\Longrightarrow N = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$$
$$\Longrightarrow N = 32\,760$$

**Respuesta**
Puede signar los proyectos de 32 760 maneras diferentes.

Hay exposiciones en tres salas y en cada sala se presentan cuatro diferentes exposiciones. Además, cada conferencia es para el turno de la mañana y la tarde, ¿cuántas presentaciones de sala hay en los 2 turnos?

**Resolución**

**Datos**

$M = 3$ Mañana
$T = 4$ Tarde
$Tu = 2$ Turnos
$N$: Número de posibilidades

Se tienen 3 salas, 4 exposiciones por sala y 2 turnos. Entonces

$$N = M \cdot T \cdot Tu$$
$$\Longrightarrow N = 3 \cdot 4 \cdot 2$$
$$\Longrightarrow N = 24$$

**Respuesta**
Existen 24 presentaciones entre los 2 turnos.

**860.** En una tienda venden 5 modelos de zapatos y cada modelo está disponible en 4 colores diferentes. Además, cada combinación de modelo y color están disponibles en 4 tallas diferentes. ¿Cuántos zapatos diferentes hay en total?

### Resolución

**Datos**

$M = 5$ Modelos
$C = 4$ Color
$T = 4$ Talla
$N$: Número de posibilidades

Como hay 5 modelos, 4 colores y 4 tallas entonces, por la regla del producto.

$$N = M \cdot C \cdot T$$
$$\Longrightarrow N = 5 \cdot 4 \cdot 4$$
$$\Longrightarrow N = 80$$

**Respuesta**
Hay 80 zapatos diferentes.

## Factorial

**861.** Determinar el número: $\dfrac{6! \cdot 5! \cdot 4!}{3! \cdot 2!}$

### Resolución

$$\frac{6! \cdot 5! \cdot 4!}{3! \cdot 2!} = \frac{6! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{3! \cdot 2!}$$
$$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 172\,800$$

**Respuesta**
El valor encontrado es 172 800.

**862.** Hallar el valor de: $\dfrac{2! \cdot 4! \cdot 6!}{3! \cdot 5!}$

### Resolución

$$\frac{2! \cdot 4! \cdot 6!}{3! \cdot 5!} = \frac{2! \cdot 4 \cdot 3! \cdot 6 \cdot 5!}{3! \cdot 5!} = 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 6 = 48$$

**Respuesta**
El resultado es 48.

**863.** Simplificar la expresión: $\dfrac{8!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}$

**Resolución**

$$\frac{8!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=4\cdot 7\cdot 5=140$$

**Respuesta**
La simplificación da 140

**864.** Simplificar la expresión: $\dfrac{12!}{10!\cdot 3!\cdot 2!}$

**Resolución**

$$\frac{12!}{10!\cdot 3!\cdot 2!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10!}{10!\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=11$$

**Respuesta**
La simplificación es 11.

**865.** Le dejan de tarea a Miguel simplificar la expresión: $\dfrac{3!\cdot 5!\cdot 7!}{2!\cdot 4!\cdot 6!}$

**Resolución**

$$\frac{3!\cdot 5!\cdot 7!}{2!\cdot 4!\cdot 6!}=\frac{3\cdot 2!\cdot 5\cdot 4!\cdot 7\cdot 6!}{2!\cdot 4!\cdot 6!}=3\cdot 5\cdot 7=105$$

**Respuesta**
Miguel simplifica la expresión, resulta 105.

**866.** Determinar el valor de la expresión:

$$\frac{11!\cdot 12!\cdot 13!}{(8!\cdot 9!\cdot 10!)(10^2\cdot 11^3\cdot 12^2)}$$

**Resolución**

$$\frac{11!\cdot 12!\cdot 13!}{8!\cdot 9!\cdot 10!\,(10^2\cdot 11^3\cdot 12^2)}$$

$$=\frac{11\cdot 10!\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8!}{(8!\cdot 9!\cdot 10!)(10^2\cdot 11^3\cdot 12^2)}=13\cdot 9=117$$

**Respuesta**

El resultado es 117.

**867.** Determinar el valor de la expresión:

$$\frac{14!\cdot 16!\cdot 18!}{17!\cdot 15!\cdot 13!}$$

**Resolución**

$$\frac{14!\cdot 16!\cdot 18!}{17!\cdot 15!\cdot 13!}=\frac{14\cdot 13!\cdot 16\cdot 15!\cdot 18\cdot 17!}{17!\cdot 15!\cdot 13!}$$

$$=14\cdot 16\cdot 18=4032$$

**Respuesta**

El valor da como resultado 4032.

**868.** Simplificar la expresión dada:

$$\frac{(n+2)!-n!}{n!}$$

**Resolución**

$$\frac{(n+2)!-n!}{n!}=\frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n!-n!}{n!}$$

$$=\frac{n!\big((n+2)\cdot(n+1)-1\big)}{n!}=(n+2)\cdot(n+1)-1$$

$$=n^2+3n+1$$

**Respuesta**

El resultado es: $n^2+3n+1$

**869.** Determinar el valor de:

$$\frac{(n+3)!-2(n+2)!}{(n+1)!}$$

## Resolución

$$\frac{(n+3)!-2(n+2)!}{(n+1)!}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!-2(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!\big((n+3)(n+2)-2(n+2)\big)}{(n+1)!}$$

$$=(n+2)(n+3-2)=(n+2)(n+1)$$

**Respuesta**

El resultado es: $(n+2)(n+1)$

**870.** Determinar el valor de:

$$\frac{(n+5)!-2(n+4)!+(n+3)!}{(n+3)!}$$

## Resolución

$$\frac{(n+5)(n+4)(n+3)!-2(n+4)(n+3)!+(n+3)!}{(n+3)!}$$

$$=\frac{(n+3)!\big((n+5)(n+4)-2(n+4)+1\big)}{(n+3)!}$$

$$=(n+4)(n+5-2)+1$$

$$=(n+4)(n+3)+1$$

$$=n^2+7n+13$$

**Respuesta**

El resultado es: $n^2+7n+13$

**871.** En una escuela tienen 8 estudiantes de matemática y 7 estudiantes de física. Se quiere formar un equipo de 4 estudiantes con la condición de que haya al menos, un estudiante de cada especialidad. ¿de cuántas maneras se puede formar el equipo?

## Resolución

Existen tres casos posibles.

**Caso 1:**

1 estudiante de matemática y 3 de física

$n = 8$

$k = 1$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{8}{1} = 8$$

$n = 7$

$k = 3$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4!} = 35$$

Formas de elegir 1 estudiante de matemática y 3 de física

$$N_1 = \binom{8}{1}\binom{7}{3} = 8\cdot 35 = 280$$

**Caso 2:**

2 estudiante de matemática y 2 de física

$n = 8$

$k = 2$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{2\cdot 1\cdot 6!} = 28$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5!}{2\cdot 1\cdot 5!} = 21$$

Formas de elegir 2 estudiante de matemática y 2 de física

$n = 7$

$k = 2$

$$N_2 = \binom{8}{2}\binom{7}{2} = 28\cdot 21 = 588$$

**Caso 3:**

3 estudiante de matemática y 1 de física

$n = 8$

$k = 3$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 5!} = 56$$

$n = 7$

$k = 1$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{7}{1} = 7$$

Formas de elegir 1 estudiante de matemática y 3 de física

$$N_3 = \binom{8}{3}\binom{7}{1} = 56\cdot 7 = 392$$

Total, de formas de elegir a los estudiantes

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 280 + 588 + 392 = 1260$$

**Respuesta**

Existen 1260 posibilidades de formar el equipo.

**872.** En una universidad hay 9 profesores de ciencia y 6 de historia. Se necesita formar un comité de 5 profesores con al menos 2 de ciencias y dos de historia. ¿De cuántas maneras se puede formar el comité?

**Resolución**

Existen dos casos posibles.

**Caso 1:**

2 de ciencia y 3 de historia

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Longrightarrow \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!\,(9-2)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7!}{2\cdot 1\cdot 7!} = 36$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Longrightarrow \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3!} = 20$$

Formas de elegir 2 de ciencia y 3 de historia

$$N_1 = \binom{9}{2}\binom{6}{3} = 36\cdot 20 = 720$$

**Caso 2:**

3 de ciencia y 2 de historia

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Longrightarrow \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 6!} = 84$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Longrightarrow \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 1\cdot 4!} = 15$$

Formas de elegir 3 de ciencia y 2 de historia

$$N_2 = \binom{9}{3}\binom{6}{2} = 84\cdot 15 = 1260$$

Total, de formas de elegir a los estudiantes

$$N = N_1 + N_2 = 720 + 1260 = 1980$$

**Respuesta**

Se puede formar el comité de 1980 maneras.

**873.** En una empresa, se requiere contratar 2 gerentes, 3 ingenieros y 1 asistente. Si se están postulando 5 gerentes, 7 ingenieros y 4 asistentes, ¿de cuántas maneras se puede formar este equipo?

**Resolución**

Eligiendo 2 gerentes de 5

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\Rightarrow\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 1\cdot 3!}=10$$

Eligiendo 3 ingenieros de 7

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\Rightarrow\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4!}=35$$

*Fuente: endeavor*

Eligiendo 1 asistente de 4

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\Rightarrow\binom{4}{1}=4$$

Por la regla del producto se tendrá:

$$N=\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{1}=10\cdot 35\cdot 4=1400$$

**Respuesta**

Existen 1400 maneras de formar el equipo.

**874.** En una conferencia se quiere seleccionar 5 expertos que contengan 1 experto en tecnología, 2 en comunicación y 2 en ciencias sociales. Si hay 4 expertos en tecnología, 5 en economía y 6 en ciencias sociales, ¿de cuántas maneras se puede formar un panel?

**Resolución**

Eligiendo 1 experto en tecnología de 4

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\Rightarrow\binom{4}{1}=4$$

Eligiendo 2 expertos de comunicación de 5

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\Rightarrow\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\,(5-2)!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 1\cdot 3!}=10$$

Eligiendo 2 expertos de ciencias sociales de 6

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\Rightarrow\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\,(6-2)!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 1\cdot 4!}=15$$

Usando la regla del producto se tendrá:

$$N=\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{2}=4\cdot 10\cdot 15=600$$

**Respuesta**

Se pueden formar un panel de 600 maneras.

**875.** Se lanzan 5 dados de 6 caras. ¿de cuántas maneras se pueden obtener exactamente tres seis y dos números distintos de seis?

## Resolución

Se eligen 3 de los 6 dados para que salgan solo 6.
Aquí se toma en cuenta el número de dados.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Los otros 2 dados pueden salir cualquier número, menos el 6.
Aquí se toma en cuentan el número de caras de los dados menos el 6, es decir, cada dado tiene 5 opciones y son 2 dados. Por la regla del producto.

$$N_1 = 5 \cdot 5 = 25$$

Así el total de formas de serán:

$$N = \binom{6}{3} \cdot N_1 = 10 \cdot 25 = 250$$

**Respuesta**
Hay 250 maneras de obtener exactamente tres seis y dos números diferentes

**876.** En una tienda hay 4 frutas diferentes entre 6 manzanas, 5 peras, 4 plátanos y 3 naranjas. Un cliente quiere comprar 10 frutas, pero almenos una fruta de cada una, ¿de cuántas maneras puede hacer su elección?

## Resolución

Como quiere comprar una fruta de cada una, entonces 4 frutas ya están comprometidas, es decir:

$$N_1 = 10 - 4 = 6$$

Escojamos las 6 frutas restantes de 14, pues ya se tiene 4 frutas entre los 4 grupos, entonces:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{14}{6} = \frac{14!}{6!(14-6)!}$$

$$\Rightarrow \binom{14}{6} = \frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8!}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot8!}$$

$$\Rightarrow \binom{14}{6} = 3003$$

Así el total de formas serán

$$N = \binom{14}{3} \cdot N_1 = 3003 \cdot 4 = 12\,012$$

**Respuesta**
Tiene 12 012 maneras de hacer su compra.

**877.** En una empresa se deben distribuir 12 recursos entre 4 departamentos. Además, se deben seleccionar 3 proyectos de un conjunto de 5, ¿de cuántas maneras se pueden seleccionar los proyectos y distribuir los recursos?

**Resolución**

Primero calculemos las combinaciones para distribuir los recursos.

$n = 4$

$k = 12$

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

$$\Rightarrow \binom{4+12-1}{12} = \frac{(4+12-1)!}{12!\,(4-1)!} = \frac{15!}{12! \cdot 3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow \binom{4+12-1}{12} = 455$$

Calculemos las combinaciones para seleccionar los proyectos.

$n = 5$

$k = 3$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = 10$$

Por la regla del producto, para el número total de maneras:

$$N = \binom{4+12-1}{12} \cdot \binom{5}{3} = 455 \cdot 10 = 4550$$

**Respuesta**
Existen 4550 maneras distribuir los recursos y seleccionar los proyectos.

**878.** Un estudiante debe seleccionar 4 materias de un total de 6. Además, debe distribuir 7 horas de estudio entre 3 días. ¿De cuántas maneras puede seleccionar las materias y distribuir las horas?

**Resolución**

Primero calculemos las combinaciones para distribuir las horas.

$$\Rightarrow \binom{3+7-1}{7} = \frac{(3+7-1)!}{7!\,(3-1)!} = \frac{9!}{7!\cdot 2!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 2\cdot 1}$$

$$\Rightarrow \binom{3+7-1}{7} = 36$$

Calculemos las combinaciones para la selección de las materias.

$n = 6$

$k = 4$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2\cdot 1} = 15$$

Por la regla del producto para el número total de maneras:

$$N = \binom{3+7-1}{7}\cdot\binom{6}{4} = 36\cdot 15 = 540$$

**Respuesta**

Hay 540 maneras de seleccionar las materias y distribuir los horarios.

**879.** En una obra de construcción se debe distribuir 18 herramientas entre 4 obreros. Además, deben seleccionar 2 líderes de equipo de un grupo de 6, ¿de cuántas maneras se puede distribuir las herramientas y seleccionar los lideres?

**Resolución**

Primero calculemos la distribución de las herramientas.

$$\Rightarrow \binom{4+18-1}{18} = \frac{(4+18-1)!}{18!\,(4-1)!} = \frac{21!}{18!\cdot 3!} = \frac{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18!}{18!\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$\Rightarrow \binom{4+18-1}{18} = 1330$$

Calculemos la selección de los líderes.

$n = 6$

$k = 2$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 1\cdot 4!} = 15$$

Para distribuir las herramientas, por la regla del producto:

$$N_1 = \binom{4+18-1}{18}\cdot\binom{6}{2} = 1330\cdot 15 = 19\,950$$

Para seleccionar al líder por la regla de la suma

$$N_2 = \binom{4+18-1}{18} + \binom{6}{2} = 1330 + 15 = 1345$$

**Respuesta**
Existen 19 950 maneras de distribuir las herramienta y 1345 maneras de seleccionar dos líderes.

**880.** Un entrenador de fútbol quiere reforzar su equipo y debe seleccionar 3 jugadores de un grupo de 7 jugadores. Además, debe distribuir 8 tareas diferentes entre 4 jugadores. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar los jugadores y distribuir las tareas?

### Resolución

Calculemos las combinaciones de los jugadores, entonces:

$$\Rightarrow \binom{8+4-1}{8} = \frac{(8+4-1)!}{8!\,(4-1)!} = \frac{11!}{8!\cdot 3!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$\Rightarrow \binom{8+4-1}{8} = 165$$

Calculemos las combinaciones para seleccionar jugadores, entonces:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4!} = 35$$

Para la combinación de jugadores, por la regla del producto:

$$N_1 = \binom{4+8-1}{8}\cdot\binom{7}{3} = 165\cdot 35 = 5775$$

Para seleccionar las tareas, por la regla de la suma

$$N_2 = \binom{4+8-1}{8} + \binom{7}{3} = 165 + 35 = 200$$

**Respuesta**
Hay 5775 maneras diferentes de seleccionar los jugadores y 200 maneras de distribuir las tareas.

## Permutación

**881.** ¿Cuál es el número de permutaciones que tiene los elementos en la palabra CORDIAL?

### Resolución

La palabra tiene 6 elementos, luego:

$$P_6 = 6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$$

**Respuesta**
Las letras de la palabra CORDIAL tiene 720 permutaciones.

**882.** ¿Cuál es el número de permutaciones de las letras que tiene los elementos en la palabra PERMUTACIÓN?

**Resolución**
La palabra tiene 11 elementos, luego:

$$P_{11} = 11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 39\,916\,800$$

**Respuesta**
Las letras de la palabra PERMUTACIÓN tiene 39 916 800 permutaciones.

**883.** ¿Cuál es el número de permutaciones de las letras de la palabra HIPOPOTAMO?

**Resolución**
La palabra tiene 10 letras con repeticiones, luego:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!} \Rightarrow \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!}$$

$$= 302\,400$$

**Respuesta**
Las letras de la palabra HIPOPOTAMO tienen 302 400 permutaciones.

**884.** ¿Determine el número de permutaciones en las letras de la palabra RADIOLOGIA?

**Resolución**

La palabra tiene 10 letras con repeticiones, luego:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!} \Rightarrow \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{8}$$

$$= 453\,600$$

**Respuesta**
Existen 453 600 permutaciones en las letras de la palabra RADIOLOGIA.

**885.** ¿Cuántas permutaciones existen en las letras, de la palabra ANÁLISIS?

**Resolución**
La palabra tiene 8 letras con repeticiones entonces:

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \cdots \cdot n_r!} \Rightarrow \frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 5040$$

**Respuesta**
Las letras de la palabra análisis tienen 5040 permutaciones.

**886.** Un mazo de cartas tiene 52 cartas. ¿Cuántas maneras de elegir y ordenar 3 cartas existen?

**Resolución**
Como es un mazo de 52 cartas, se quiere variaciones de 3, luego:

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow V(52{,}3) = \frac{52!}{(52-3)!} = \frac{52!}{49!}$$

$$= \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49!}{49!} = 132\,600$$

**Respuesta**
Existen 132 600 de elegir 3 cartas de un grupo de 52.

**887.** ¿De cuántas maneras se puede elegir y ordenar 4 sabores para un helado, con 11 sabores diferentes?

**Resolución**
Como son 4 sabores a elegir de un grupo de 11 entonces:

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow V(11{,}4) = \frac{11!}{(11-4)!} = \frac{11!}{7!}$$

$$= \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!} = 7920$$

**Respuesta**
Hay 7920 maneras de elegir 4 sabores.

**888.** Calcular el número de maneras de elegir y ordenar 2 libros de una biblioteca con 15 libros diferentes.

**Resolución**

Se quiere 2 libros a elegir de un grupo de 15 entonces:

$$V(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}\Rightarrow V(15{,}2)=\frac{15!}{(15-2)!}=\frac{15!}{13!}$$

$$=\frac{15\cdot 14\cdot 13!}{13!}=210$$

**Respuesta**

Existen 210 maneras de elegir y ordenar 2 libros.

**889.** En la promoción hay 20 estudiantes. Encuentre el número de maneras de elegir y ordenar a 3 estudiantes.

**Resolución**

Se quiere elegir 3 estudiantes de un grupo de 20 entonces:

$$V(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}\Rightarrow V(20{,}3)=\frac{20!}{(20-3)!}=\frac{20!}{17!}$$

$$=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17!}{17!}=6840$$

**Respuesta**

Se pueden elegir de 6840 maneras a los 3 estudiantes.

**890.** Hay un festival folklórico, 9 grupos de baile deben colocarse en círculo. Tres grupos son del mismo estilo y cuatro son de otros estilos, ¿cuántas formas diferentes hay?

**Resolución**

Como hay 9 grupos en círculo y hay repeticiones $k_1=3$ y $k_2=4$ el número de variaciones distintas es:

$$V_{c_k}(n)=\frac{(n-1)!}{k_i!}\Rightarrow V_{c_k}(9)=\frac{(9-1)!}{3!\cdot 4!}=\frac{8!}{3!\cdot 4!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4!}$$

$$\Rightarrow V_{c_k}(9)=280$$

**Respuesta**

Hay 280 maneras de organizar 9 grupos de forma circular.

## Binomio de Newton

**891.** Hallar el valor de la expresión:

$$(2a+3b)^4$$

para $a$, $b$ números reales cuales quiera, usando el teorema del binomio de Newton.

### Resolución

$$(2a+3b)^4=\sum_{k=0}^{4}\binom{n}{k}(2a)^{4-k}(3b)^k$$

$$=\binom{4}{0}(2a)^4+\binom{4}{1}(2a)^{4-1}(3b)^1+\binom{4}{2}(2a)^{4-2}(3b)^2+\binom{4}{3}(2a)^{4-3}(3b)^3+\binom{4}{4}(2a)^{4-4}(3b)^4$$

$$=\frac{4!}{0!\,4!}(2a)^4+\frac{4!}{1!\,3!}(2a)^3(3b)^1+\frac{4!}{2!\,2!}(2a)^2(3b)^2+\frac{4!}{3!\,1!}(2a)^1(3b)^3+\frac{4!}{4!\,0!}(2a)^0(3b)^4$$

$$=1\cdot 16a^4+4\cdot 8a^3\cdot 3b+6\cdot 4a^2\cdot 9b^2+4\cdot 2a\cdot 27b^3+1\cdot 1\cdot 81b^4$$

$$=16a^4+96a^3b+216a^2b^2+216ab^3+81b^4$$

**Respuesta**
El Resultado es: $16a^4+96a^3b+216a^2b^2+216ab^3+81b^4$

**892.** Desarrollar la expresión:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^4$$

usando el teorema del binomio de Newton.

### Resolución

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^4=\sum_{k=0}^{4}\binom{n}{k}x^{4-k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$=\binom{4}{0}x^4+\binom{4}{1}x^{4-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\binom{4}{2}x^{4-2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\binom{4}{3}x^{4-3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\binom{4}{4}x^{4-4}\left(-\frac{1}{2}\right)^4$$

$$=\frac{4!}{0!\,4!}x^4+\frac{4!}{1!\,3!}x^3\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\frac{4!}{2!\,2!}x^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4!}{3!\,1!}x^1\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{4!}{4!\,0!}x^0\left(-\frac{1}{2}\right)^4$$

$$=1\cdot x^4-4\cdot x^3\cdot\frac{1}{2}+6\cdot x^2\cdot\frac{1}{4}-4\cdot x\cdot\frac{1}{8}+1\cdot 1\cdot\frac{1}{16}$$

$$=x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$$

**Respuesta**
El Resultado es: $x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$

**893.** Desarrollar la expresión:

$$(2x+y)^5$$

**Resolución**

$$(2x+y)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{n}{k}(2x)^{5-k}y^k$$

$$=\binom{5}{0}(2x)^5+\binom{5}{1}(2x)^{5-1}y^1+\binom{5}{2}(2x)^{5-2}y^2+\binom{5}{3}(2x)^{5-3}y^3+\binom{5}{4}(2x)^{5-4}y^4+\binom{5}{5}(2x)^{5-5}y^5$$

$$=\frac{5!}{0!\cdot 5!}(2x)^5+\frac{5!}{1!\cdot 4!}(2x)^4y^1+\frac{5!}{2!\cdot 3!}(2x)^3y^2+\frac{5!}{3!\cdot 2!}(2x)^2y^3+\frac{5!}{4!\cdot 1!}(2x)^1y^4+\frac{5!}{5!\cdot 0!}(2x)^0y^5$$

$$=1\cdot 32x^5+5\cdot 16x^4y^1+10\cdot 8x^3y^2+10\cdot 4x^2y^3+5\cdot 2xy^4+1\cdot 1y^5$$

$$= 32x^5 + 80x^4y^1 + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$$

**Respuesta**
La expresión desarrollada es:
$32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$

**894.** Desarrollar la expresión:

$$\left(x - \frac{1}{3}y\right)^5$$

usando el teorema del binomio de Newton.

## Resolución

$$\left(x - \frac{1}{3}y\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{n}{k} x^{5-k} \left(-\frac{1}{3}y\right)^k$$

$$= \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^{5-1} \left(-\frac{1}{3}y\right)^1 + \binom{5}{2} x^{5-2} \left(-\frac{1}{3}y\right)^2 + \binom{5}{3} x^{5-3} \left(-\frac{1}{3}y\right)^3 + \binom{5}{4} x^{5-4} \left(-\frac{1}{3}y\right)^4 + \binom{5}{5} x^{5-5} \left(-\frac{1}{3}y\right)^5$$

$$= \frac{5!}{0!\cdot 5!}x^5 + \frac{5!}{1!\cdot 4!}x^4\left(-\frac{1}{3}y\right)^1 + \frac{5!}{2!\cdot 3!}x^3\left(-\frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{5!}{3!\cdot 2!}x^2\left(-\frac{1}{3}y\right)^3 + \frac{5!}{4!\cdot 1!}x^1\left(-\frac{1}{3}y\right)^4 + \frac{5!}{5!\cdot 0!}x^0\left(-\frac{1}{3}y\right)^5$$

$$= 1\cdot x^5 - 5\cdot x^4\frac{1}{3}y + 10\cdot x^3\frac{1}{9}y^2 - 10\cdot x^2\frac{1}{27}y^3 + 5\cdot x\frac{1}{81}y^4 - \frac{1}{243}y^5$$

$$= x^5 - \frac{5}{3}x^4y + \frac{10}{9}x^3y^2 - \frac{10}{27}x^2y^3 + \frac{5}{81}xy^4 - \frac{1}{243}y^5$$

**Respuesta**
El desarrollo es:
$x^5 - \frac{5}{3}x^4y + \frac{10}{9}x^3y^2 - \frac{10}{27}x^2y^3 + \frac{5}{81}xy^4 - \frac{1}{243}y^5$

**895.** Encuentre el sexto término de la expresión:

$$(3a-2b)^9$$

## Resolución

Para calcular cualquier término de un expresión $(a+b)^n$ se usa:

$$T_r=\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}$$

$$T_6=\binom{9}{6-1}(3a)^{9-6+1}(-2b)^{6-1}=\binom{9}{5}(3a)^4(-2b)^5$$

$$=-\frac{9!}{5!\,(9-5)!}3^4a^42^5b^5=-\frac{9!}{5!\,4!}3^4\cdot 2^5\,a^4b^5$$

$$=-\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}3^4\cdot 2^5a^4b^5$$

$$=-3\cdot 7\cdot 6\cdot 3^4\cdot 2^5a^4b^5$$

$$=-326\,592a^4b^5$$

**Respuesta**

El sexto término es: $-326\,592a^4b^5$

**896.** Hallar el cuarto término de la expresión:

$$\left(\frac{1}{2}x+4y\right)^{10}$$

## Resolución

Para determinar el cuarto término , con $\mathrm{r}=4$, se hace:

$$T_4=\binom{10}{4-1}\left(\frac{1}{2}x\right)^{10-4+1}(4y)^{4-1}=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}x\right)^7(4y)^3$$

$$=\frac{10!}{3!\,(10-3)!}\cdot\frac{1}{2^7}x^7\cdot(2^2)^3y^3=\frac{10!}{3!\,7!}\cdot\frac{1}{2^7}x^7\cdot 2^6y^3$$

$$=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 7!}\cdot\frac{1}{2}x^7\,y^3$$

$$= 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} x^7 y^3$$

$$= 60x^7y^3$$

**Respuesta**
El cuarto término es: $60x^7y^3$

**897.** Determinar el tercer término de la expresión:

$$(2x + 3y)^7$$

## Resolución

$$T_3 = \binom{7}{3-1}(2x)^{7-3+1}(3y)^{3-1} = \binom{7}{2}(2x)^5(3y)^2$$

$$= \frac{7!}{2!\,(7-2)!} \cdot 2^5 \cdot 3^2 x^5 y^2$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} \cdot 2^5 \cdot 3^2 x^5 y^2$$

$$= 7 \cdot 3 \cdot 2^5 \cdot 3^2 x^5 y^2$$

$$= 6048x^5y^2$$

**Respuesta**
El tercer término es: $6048x^5y^2$

**898.** Cuál es el término en $x^4$ del desarrollo de:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$$

## Resolución

Se quiere hallar r en el desarrollo:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$$

donde $a = x^3$ y $b = \frac{1}{x}$ en $n = 12$

Para calcular cualquier término de una expresión $(a+b)^n$ se tiene:

$$T_r = \binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1} \Rightarrow T_r = \binom{12}{r-1} (x^3)^{12-r+1} \left(\frac{1}{x}\right)^{r-1}$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{12}{r-1} (x^3)^{13-r} \cdot (x^{-1})^{r-1}$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{12}{r-1} x^{39-3r} \cdot x^{1-r}$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{12}{r-1} x^{39-3r+1-r}$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{12}{r-1} x^{40-4r}$$

Se quiere hallar el término en $x^4$, entonces

$$x^4 = x^{40-4r} \Rightarrow 4 = 40 - 4r$$

$$\Rightarrow 4r = 40 - 4 = 36$$

$$\Rightarrow r = 9 \quad \text{(Noveno término)}$$

Necesitamos encontrar el noveno término en:

$$T_r = \binom{12}{r-1} x^{40-4r} \Rightarrow T_9 = \binom{12}{9-1} x^{40-4\cdot 9}$$

$$\Rightarrow T_9 = \binom{12}{8} x^{40-36}$$

$$\Rightarrow T_9 = \frac{12!}{8!\,(12-8)!} x^4 = \frac{12!}{8!\cdot 4!} x^4$$

$$\Rightarrow T_9 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} x^4 = 11\cdot 5\cdot 9x^4$$

$$\Rightarrow T_9 = 495x^4$$

**Respuesta**
El término que contiene $x^4$ es $495x^4$, el noveno término.

**899.** Encuentre el término independiente en:

$$\left(3x^4 - \frac{2}{x}\right)^5$$

## Resolución

Para calcular cualquier término de una expresión $(a+b)^n$, donde $a = 3x^4,\ b = -\frac{2}{x}$ y $n = 5$ se tiene:

$$T_r = \binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1} \Longrightarrow T_r = \binom{5}{r-1} (3x^4)^{5-r+1} \left(-\frac{2}{x}\right)^{r-1}$$

$$\Longrightarrow T_r = \binom{5}{r-1} 3^{6-r} (x^4)^{6-r} \cdot (-2)^{r-1} \left(\frac{1}{x}\right)^{r-1}$$

$$\Longrightarrow T_r = \binom{5}{r-1} 3^{6-r} \cdot (-2)^{r-1} \cdot (x^4)^{6-r} (x^{-1})^{r-1}$$

$$\Longrightarrow T_r = \binom{5}{r-1} 3^{6-r} \cdot (-2)^{r-1} \cdot x^{24-4r}\, x^{1-r}$$

$$\Longrightarrow T_r = \binom{5}{r-1} 3^{6-r} \cdot (-2)^{r-1} \cdot x^{25-5r}$$

Para ser un término independiente, se cumple $x^0$, entonces:

$$x^0 = x^{25-5r} \Longrightarrow 0 = 25 - 5r$$

$$\Longrightarrow 5r = 25$$

$$\Longrightarrow r = 5 \quad \text{(Quinto término)}$$

Necesitamos encontrar el término independiente en:

$$T_r = \binom{5}{r-1} 3^{6-r} \cdot (-2)^{r-1} \cdot x^{25-5r} \Longrightarrow T_5 = \binom{5}{5-1} 3^{6-5} \cdot (-2)^{5-1}$$

$$\Longrightarrow T_5 = \binom{5}{4} 3^1 \cdot (-2)^4 = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} \cdot 3 \cdot 16 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 3 \cdot 16$$

$$\Longrightarrow T_5 = 5 \cdot 3 \cdot 16 = 240$$

**Respuesta**

El término independiente es: 240

**900.** Determinar el término central en la expresión:

$$\left(3x+\frac{2}{x^2}\right)^7$$

## Resolución

Sea $a=3x$ y $b=\frac{2}{x^2}$ en $n=7$

Como $\mathrm{n}=7$ se tendrán dos términos centrales en:

$$r_1=\frac{n+1}{2}, \qquad r_2=\frac{n+3}{2} \Rightarrow r_1=\frac{7+1}{2}=4, \qquad r_2=\frac{7+3}{2}=5$$

Para $\mathrm{r}=4$:

$$T_r=\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1} \Rightarrow T_4=\binom{7}{4-1}(3x)^{7-4+1}\left(\frac{2}{x^2}\right)^{4-1}$$

$$\Rightarrow T_4=\binom{7}{3}(3x)^4\left(\frac{2}{x^2}\right)^3=\frac{7!}{3!\,(7-3)!}(3x)^4\left(\frac{2}{x^2}\right)^3=\frac{7!}{3!\,4!}(3x)^4\left(\frac{2}{x^2}\right)^3$$

$$\Rightarrow T_4=35\cdot 3^4\cdot x^4\cdot\frac{2^3}{x^6}=35\cdot 3^4\cdot 2^3\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow T_4=22\,680\,\frac{1}{x^2}$$

Para $\mathrm{r}=5$:

$$T_r=\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1} \Rightarrow T_5=\binom{7}{5-1}(3x)^{7-5+1}\left(\frac{2}{x^2}\right)^{5-1}$$

$$\Rightarrow T_5=\binom{7}{4}(3x)^3\left(\frac{2}{x^2}\right)^4=\frac{7!}{4!\,(7-4)!}(3x)^3\left(\frac{2}{x^2}\right)^4=\frac{7!}{4!\,3!}(3x)^3\left(\frac{2}{x^2}\right)^4$$

$$\Rightarrow T_5=35\cdot 3^3\cdot x^3\cdot\frac{2^4}{x^8}=35\cdot 3^3\cdot 2^4\cdot\frac{1}{x^5}$$

$$\Rightarrow T_5=15\,120\,\frac{1}{x^5}$$

**Respuesta**

Los términos centrales son:

$$T_4=22\,680\,\frac{1}{x^2} \text{ y } T_5=15\,120\,\frac{1}{x^5}$$

## Principios del conteo

**901.** Ana tiene tres hermanos, una hermana, cinco primos y cinco primas, quiere pedirle ayuda en un ejercicio de matemática a uno de ellos. ¿Cuántas posibilidades tiene para elegir?

a) 12  b) 13  c) 14  d) 16

**Resolución**

**Resolución**

**Datos**

$H_1 = 3$ Hermano
$H_2 = 1$ Hermana
$P_1 = 5$ Primos
$P_2 = 5$ Primas
$N$: Número de posibilidades

Por la regla de la suma se tiene:

$$N = H_1 + H_2 + P_1 + P_2$$

$$\Rightarrow N = 3 + 1 + 5 + 5$$

$$\Rightarrow N = 14$$

**Respuesta:** 14

**902.** Gabriel quiere participar en un concurso donde hay 3 categorías en deportes y 5 categorías en danzas nacionales. ¿cuántas categorías tiene para elegir una?

a) 8  b) 10  c) 15  d) Ninguna

**Resolución**

**Resolución**

**Datos**

$D_1 = 3$ Deporte
$D_2 = 5$ Danza
$N$: Número de posibilidades

Por la regla de la suma se tiene:

$$N = D_1 + D_2$$

$$\Rightarrow N = 3 + 5$$

$$\Rightarrow N = 8$$

**Respuesta:** 8

**903.** Se observa la placa de un automóvil que consta de 2 letras seguidas y 4 números de los cuales todos son números impares, ¿de cuántas formas se podrá formar una placa si las letras y números se repiten?

a) 422 000  b) 422 500  c) 423 000  d) 423 500

## Resolución

**Datos**

$a = 26$ Primera letra
$b = 26$ Segunda letra
$w = 5$ Primera letra
$x = 5$ Segunda letra
$y = 5$ Tercera letra
$z = 5$ Cuarta letra
$N$: Número posibilidades

$$N = a \cdot b \cdot w \cdot x \cdot y \cdot z$$
$$\Rightarrow N = 26 \cdot 26 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$
$$\Rightarrow N = 422\,500$$

**Respuesta:** 422 500

**904.** Se observa la placa de un automóvil que consta de tres vocales seguida de tres números pares, ¿de cuántas formas se podrá formar una placa si las vocales se repiten y los números no se repiten?

a) 7050 b) 7500 c) 7005 d) 7000

## Resolución

**Datos**

$a = 5$ Primera vocal
$b = 5$ Segunda vocal
$c = 5$ Tercera vocal
$x = 5$ Primera letra
$y = 4$ Segunda letra
$z = 3$ Tercera letra
$N$: Número posibilidades

$$N = a \cdot b \cdot c \cdot x \cdot y \cdot z$$
$$\Rightarrow N = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$
$$\Rightarrow N = 7500$$

**Respuesta:** 7500

**905.** En la promoción se quiere elegir a un presidente y vice presidente de curso entre 45 mujeres y 45 varones, ¿cuántos candidatos se pueden tomar en cuenta para ser elegidos?

a) 2020 b) 2025 c) 2030 d) 2035

## Resolución

**Datos**

$M = 45$ Mujeres
$H = 45$ Hombres
$N$: Número posibilidades

$$N = M \cdot H$$
$$\Rightarrow N = 45 \cdot 45$$
$$\Rightarrow N = 2025$$

**Respuesta:** 2025

**906.** En un restaurante se ofrece un menú con 5 platos principales, 4 entradas y 3 postres, ¿cuántas opciones tienes para tomar un plato de la carta que cuente con una entrada, plato principal y postre?

a) 50 b) 60 c) 70 d) 80

### Resolución

**Datos**

$E$=4 Entradas

$P$ =5 Platos principales

$P_0$=3 Postres

$N$: Número posibilidades

$N = E \cdot P \cdot Po$

$\Longrightarrow N = 4 \cdot 5 \cdot 3$

$\Longrightarrow N = 60$

**Respuesta:** 60

**907.** En un colegio se organizan una serie de conferencias durante 3 días. Cada día se puede elegir entre 4 conferencias de ciencia, 3 conferencias de literatura y 3 conferencias de psicología. Si un estudiante quiere asistir exactamente a una conferencia durante los 3 días, ¿cuántas opciones diferentes de asistencia puede planear?

a) 45 666 b) 46 566 c) 46 656 d) 46 665

### Resolución

**Datos**

$D = 3$ Días

$C = 4$ Conferencias de ciencia

$L = 3$ Conferencias de literatura

$P = 3$ Conferencias de psicología

$N$: Número de posibilidades

Por la regla del producto:

$N = D = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3$ donde

$D_1, D_2$ y $D_3$ son días diferentes

$D_1 = D \cdot C \cdot L \Longrightarrow D_1 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

$D_2 = D \cdot C \cdot L \Longrightarrow D_1 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

$D_3 = D \cdot C \cdot L \Longrightarrow D_1 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

$N = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \Longrightarrow N = 36 \cdot 36 \cdot 36$

$\Longrightarrow N = 46\,656$

**Respuesta:** 46 656

**908.** En un colegio se organizan una serie de conferencias de 3 días. Cada día se puede elegir entre 4 conferencias de ciencia, 3 conferencias de literatura y 3 conferencias de psicología. Si un estudiante quiere asistir a una conferencia durante los 3 días, ¿cuántas conferencias puede asistir los 3 días?

a) 36 b) 72 c) 108 d) 144

## Resolución

**Datos**

$D = 3$ Días
$C = 4$ Conferencias de ciencia
$L = 3$ Conferencias de literatura
$P = 3$ Conferencias de psicología
$N$: Número de posibilidades

Por la regla del producto:

$N = D = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3$ donde

$D_1$, $D_2$ y $D_3$ son días diferentes

$D_1 = D \cdot C \cdot L \Longrightarrow D_1 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

$D_2 = D \cdot C \cdot L \Longrightarrow D_1 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

$D_3 = D \cdot C \cdot L \Longrightarrow D_1 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

$N = D_1 + D_2 + D_3$

$\Longrightarrow N = 36 + 36 + 36$

$\Longrightarrow N = 108$

**Respuesta:** 108

**909.** En una feria se presentan proyectos de biología, química y física. Hay 5 proyectos de biología, 4 proyectos de química y 6 proyectos de física. El jurado debe elegir un proyecto de biología o química, y un proyecto de física, ¿cuántas posibilidades diferentes puede elegir el jurado?

a) 45 b) 54 c) 64 d) 46

## Resolución

**Datos**

$B = 5$ Proyectos de biología
$Q = 4$ Proyectos de química
$F = 6$ Proyectos de física
$P_1$: Proyecto de biología y física
$P_2$: Proyecto de química y física
$N$: Número de posibilidades

$N = P_1 + P_2$

$P_1 = B \cdot F \Longrightarrow P_1 = 5 \cdot 6 = 30$

$P_2 = Q \cdot F \Longrightarrow P_1 = 4 \cdot 6 = 24$

$N = P_1 + P_2 \Longrightarrow N = 30 + 24$

$\Longrightarrow N = 54$

**Respuesta:** 54

**910.** Se lanzan cinco dados, si al menos en uno de los dados sale el número 6, ¿cuántas posibilidades posibles existen con repeticiones?

a) 1629 b) 1269 c) 1692 d) 1296

**Resolución**

**Datos**

$D_1 = 1$ Posibilidad dado 1
$D_2 = 6$ Posibilidad dado 2
$D_3 = 6$ Posibilidad dado 3
$D_4 = 6$ Posibilidad dado 2
$D_5 = 6$ Posibilidad dado 3
$N$: Número de posibilidades

$$N = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \cdot D_4 \cdot D_5$$
$$\Longrightarrow N = 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$$
$$\Longrightarrow N = 1296$$

**Respuesta:** 1296

## Factorial

**911.** Determinar el valor de: 8!

a) 40 230 b) 40 320 c) 40 023 d) 42 030

**Resolución**

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$$

**Respuesta:** 40 320

**912.** ¿De cuántas maneras se puede ordenar las letras de la palabra ARTES?

a) 100 b) 110 c) 120 d) 130

**Resolución**

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

**Respuesta:** 120

**913.** Existen 8 maestros en una unidad educativa y se los quiere formar en fila para controlar exámenes, ¿de cuántas maneras se los puede formar sin repeticiones?

a) 40 023 b) 43 200 c) 40 320 d) 40 032

**Resolución**

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$$

**Respuesta:** 40 320

**914.** Simplificar la expresión: $\dfrac{8!}{6! \cdot 2!}$

a) 24 b) 26 c) 28 d) 30

**Resolución**

$$\frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2 \cdot 1} = 4 \cdot 7 = 28$$

**Respuesta:** 28

**915.** Simplificar la expresión: $\dfrac{8! \cdot 5!}{7! \cdot 4!}$

a) 10 b) 20 c) 30 d) 40

**Resolución**

$$\frac{8! \cdot 5!}{7! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7! \cdot 5 \cdot 4!}{7! \cdot 4!} = 8 \cdot 5 = 40$$

**Respuesta:** 40

**916.** Determinar el valor de: $\dfrac{11! \cdot 3!}{9!}$

a) 66 b) 606 c) 660 d) Ninguno

**Resolución**

$$\frac{11! \cdot 3!}{9!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9!} = 660$$

**Respuesta:** 660

**917.** Determinar el valor de: $\dfrac{45!\cdot 45}{44!}$

a) 2022 b) 2023 c) 2024 d) 2025

**Resolución**

$$\frac{45!\cdot 45}{44!}=\frac{45\cdot 44!\cdot 45}{44!}=45\cdot 45=2025$$

**Respuesta:** 2025

**918.** Determinar el valor de: $\dfrac{(n+3)!-2(n+2)!+(n+1)!}{(n+1)!}$

a) $(n-2)(n-1)+1$ b) $(n+2)(n-1)+1$
c) $(n-2)(n+1)+1$ d) $(n+2)(n+1)+1$

**Resolución**

$$=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!-2(n+2)(n+1)!+(n+1)!}{(n+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!\big((n+3)(n+2)-2(n+2)+1\big)}{(n+1)!}$$

$$=(n+2)(n+3-2)+1=(n+2)(n+1)+1$$

**Respuesta:** $(n+2)(n+1)+1$

**919.** Determinar el valor de: $\dfrac{(n+4)!-(n+3)!-(n+2)!}{(n+2)!}$

a) $(n+3)^2-1$ b) $(n-3)^2+1$
c) $(n+3)^2+1$ d) $Ninguno$

**Resolución**

$$=\frac{(n+4)(n+3)(n+2)!-(n+3)(n+2)!-(n+2)!}{(n+2)!}$$

$$=\frac{(n+2)!\big((n+4)(n+3)-(n+3)-1\big)}{(n+2)!}$$

$$= (n+4)(n+3) - (n+3) - 1 = (n+3)(n+4-1) - 1$$

$$= (n+3)^2 - 1$$

**Respuesta:** $(n+3)^2 - 1$

**920.** Simplificar: $\dfrac{(n+6)! - 3(n+5)!}{(n+5)! - 2(n+4)!}$

a) $n$ b) $n+5$ c) $(n+5)^2$ d) $Ninguno$

**Resolución**

$$\frac{(n+6)! - 3(n+5)!}{(n+5)! - 2(n+4)!} = \frac{(n+6)(n+5)! - 3(n+5)!}{(n+5)(n+4)! - 2(n+4)!}$$

$$= \frac{(n+5)!\left((n+6) - 3\right)}{(n+4)!\left((n+5) - 2\right)} = \frac{(n+5)!\,(n+3)}{(n+4)!\,(n+3)}$$

$$= \frac{(n+5)(n+4)!}{(n+4)!} = n+5$$

**Respuesta:** $n+5$

## Números combinatorios

**921.** ¿De cuántas maneras se puede elegir 6 estudiantes de un grupo de 15 estudiantes?

a) 0 b) 5500 c) 5050 d) 5005

**Resolución**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{15}{6} = \frac{15!}{6!(15-6)!}$$

$$\Rightarrow \binom{15}{6} = \frac{15!}{6!\cdot 9!}$$

$$\Rightarrow \binom{15}{6} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 9!}$$

$$\Rightarrow \binom{15}{6} = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11$$ simplificando términos semejantes

$$\Rightarrow \binom{15}{6} = 5005$$

**Respuesta:** 5005

**922.** En una fiesta hay 7 hombres y 10 mujeres, ¿de cuántas maneras se pueden formar parejas mixtas entre hombres y mujeres?

a) 820 b) 830 c) 840 d) 850

**Resolución**

Para cada pareja elijamos 7 hombres.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{7}{1} = 7$$

Para cada pareja elijamos 7 mujeres.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

Las parejas se tomarán en la forma:

$$P = \binom{7}{1}\binom{10}{7} = 7 \cdot 120 = 840$$

**Respuesta:** 840

**923.** Una pareja va a un restaurante a almorzar en el lugar tienen 3 tipos de entradas, 4 tipos de platos principales y 5 tipos de postres, ¿de cuántas maneras pueden hacer su elección si solo pedirán o una entrada o un plato principal o un postre?

a) 16 b) 17 c) 18 d) 19

**Resolución**

Formas de elegir una entrada.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1} = 3$$

Formas de elegir un plato principal.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2 \cdot 1} = 6$$

Formas de elegir un postre.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 1\cdot 3!} = 10$$

Las maneras para elegir solo una opción son:

$$N = \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = 3 + 6 + 10 = 19$$

**Respuesta:** 19

**924.** Una pareja va a un restaurante a almorzar, tienen 3 tipos de entradas, 4 tipos de platos principales y 5 tipos de postres, ¿de cuántas maneras pueden combinar sus platos?

a) 120 b) 150 c) 180 d) 210

## Resolución

Formas de elegir una entrada.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Formas de elegir un plato principal.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Formas de elegir un postre.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

Las combinaciones posibles son:

$$N = \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} = 3 \cdot 6 \cdot 10 = 180$$

**Respuesta:** 180

**925.** Un equipo de fútbol necesita 4 jugadores para reforzar al plantel, se postulan 6 defensores y 5 mediocampistas, ¿de cuántas maneras se puede elegir a los refuerzos, habiendo uno de cada uno como mínimo?

a) 300 b) 310 c) 320 d) 330

## Resolución

Existen tres casos posibles:

**Caso 1:**
1 defensa y 3 medioacampistas

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{6}{1} = 6$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\cdot4\cdot3!}{3!\cdot2\cdot1} = 10$$

Formas de elegir 1 defensa y 3 medioacampistas

$$N_1 = \binom{6}{1}\binom{5}{3} = 6\cdot10 = 60$$

**Caso 2:**
2 defensas y 2 medioacampistas

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6\cdot5\cdot4!}{2\cdot1\cdot4!} = 15$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5\cdot4\cdot3!}{2\cdot1\cdot3!} = 10$$

Formas de elegir 2 defensas y 2 medioacampistas

$$N_2 = \binom{6}{2}\binom{5}{2} = 15\cdot10 = 150$$

**Caso 3:**
3 defensa y 1 medioacampistas

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3\cdot2\cdot1\cdot3!} = 20$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{5}{1} = 5$$

Formas de elegir 3 defensa y 1 medioacampistas

$$N_3 = \binom{6}{3}\binom{5}{1} = 20\cdot5 = 100$$

Total, de formas de elegir a los estudiantes

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 60 + 150 + 100 = 310$$

**Respuesta:** 310

**926.** Se lanzan 6 dados de 6 caras cada uno, ¿de cuántas maneras se pueden obtener exactamente tres seis y tres números distintos de seis?

a) 2000  b) 2500  c) 3000  d) 3500

### Resolución

Se eligen 3 de los 6 dados para que salgan solo 6.
Aquí se toma en cuenta el número de dados

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 20$$

Los otros 3 dados pueden salir cualquier número, menos el 6.
Aquí se toma en cuentan el número de caras de los dados menos el 6, es decir, cada dado tiene 5 opciones y son tres dados. Por la regla del producto.

$$N_1 = 5\cdot 5\cdot 5 = 125$$

Así el total de formas de serán:

$$N = \binom{6}{3}\cdot N_1 = 20\cdot 125 = 2500$$

**Respuesta:** 2500

**927.** Un artesano elabora collares con 6 accesorios, donde cada cliente puede elegir 3 tipos de accesorios, ¿de cuántas maneras puede crear los collares?

a) 28 b) 30 c) 32 d) ninguno

### Resolución

$$\Rightarrow \binom{3+6-1}{6} = \frac{(3+6-1)!}{6!\,(3-1)!} = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 2\cdot 1} = 28$$

**Respuesta:** 28

**928.** En la promoción 2025 se quiere repartir 8 premios entre 3 estudiantes, ¿de cuántas maneras se puede repartir los premios?

a) 30 b) 35 c) 40 d) 45

### Resolución

$$\Rightarrow \binom{3+8-1}{8} = \frac{(3+8-1)!}{8!\,(3-1)!} = \frac{10!}{8!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 2\cdot 1} = 45$$

**Respuesta:** 45

**929.** Un restaurante debe planificar 9 menús diferentes usando solo combinaciones de 4 ingredientes. Además, debe seleccionar 3 bebidas de una lista de 5 bebidas. ¿De cuántas maneras se puede planificar los menús y seleccionar las bebidas?

a) 2002 b) 2020 c) 2200 d) 2000

**Resolución**

Primero calculemos las combinaciones para distribuir los menús:

$$\Rightarrow \binom{4+9-1}{9} = \frac{(4+9-1)!}{9!\,(4-1)!} = \frac{12!}{9!\cdot 3!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{9!\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$\Rightarrow \binom{4+9-1}{9} = 220$$

Ahora calculemos las combinaciones para seleccionar las bebidas:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 1\cdot 3!} = 10$$

El número total de menús es:

$$N = \binom{4+9-1}{9}\cdot\binom{5}{3} = 220\cdot 10 = 2200$$

**Respuesta:** 2200

**930.** Se deben distribuir 10 becas entre 3 universidades. Además, deben seleccionar 5 estudiantes de un grupo de 8, ¿cuántas maneras hay de distribuir las becas para los estudiantes?

a) 122 b) 212 c) 222 d) ninguno

**Resolución**

Primero calculemos las distribuciones de las becas:

$$\Rightarrow \binom{3+10-1}{10} = \frac{(3+10-1)!}{10!\,(3-1)!} = \frac{12!}{10!\cdot 2!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10!}{10!\cdot 2\cdot 1}$$

$$\Rightarrow \binom{3+10-1}{10} = 66$$

Calculemos las selecciones de los estudiantes:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

Por la regla de la multiplicación para el número total de maneras:

$$N = \binom{3+10-1}{10} \cdot \binom{8}{5} = 66 \cdot 56 = 3696$$

**Respuesta:** 3696

## Permutación

**931.** ¿Cuál es el número de permutaciones del conjunto $\{a, b, c, d\}$ ?

a) 21 b) 22 c) 23 d) 24

### Resolución

El conjunto $\{a, b, c, d\}$ consta de 4 elementos.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

**Respuesta:** 24

**932.** Encuentre el número de permutaciones de las letras en la palabra ORURO.

a) 10 b) 20 c) 30 d) 40

### Resolución

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_r!} \Rightarrow \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 30$$

**Respuesta:** 30

**933.** Encuentre el número de variaciones de 3 ciudades entre La Paz, Cochabamba, Tarija y Beni.

a) 1 b) 4 c) 24 d) ninguno

### Resolución

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow P(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$$

**Respuesta:** 24

**934.** Javier tiene un juego de 7 colores. ¿Cuál es el número de permutaciones con los colores?

a) 5004 b) 5040 c) 5400 d) ninguno

**Resolución**

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

**Respuesta:** 5040

**935.** ¿Cuál es el número de permutaciones que tienen las letras de la palabra SACABA?

a) 100 b) 110 c) 120 d) ninguno

**Resolución**

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_r!} \Longrightarrow \frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 1} = 120$$

**Respuesta:** 120

**936.** Determinar el número de variaciones de 3 equipos de Bolivia entre, A, B, C, D y E.

a) 30 b) 40 c) 50 d) 60

**Resolución**

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \Longrightarrow P(5{,}3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

**Respuesta:** 60

**937.** ¿Cuál es el número de permutaciones que tienen los elementos de la palabra MURCIÉLAGO?

a) 3 268 800 b) 3 628 800 c) 3 628 080 d) 3 628 008

**Resolución**

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$$

**Respuesta:** 3 628 800

**938.** Determine el número de permutaciones con las letras de la palabra MATEMÁTICA

a) 115 200 b) 112 500 c) 151 020 d) 151 200

**Resolución**

La palabra tiene 10 letras con repeticiones entonces:

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\dots\cdot n_r!} \Rightarrow \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 4}$$

$$= 151\,200$$

**Respuesta:** 151 200

**939.** La banda del colegio tiene los instrumentos: trompeta, bombo, trombón, saxófono, tambor y corneta. Entre los instrumentos de viento determinar el número de maneras de elegir 2.

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13

**Resolución**

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow V(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

**Respuesta:** 12

**940.** En una reunión, 8 maestros deben sentarse en una mesa redonda. Cuatro son maestros ciencia y dos de arte, ¿de cuántas maneras se pueden sentar?

a) 100 b) 105 c) 110 d) 115

**Resolución**

$$P_{c_k}(n) = \frac{(n-1)!}{k_i!} \Rightarrow P_{c_k}(8) = \frac{(8-1)!}{4!\cdot 2!} = \frac{7!}{4!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2\cdot 1}$$

$$\Rightarrow P_{c_k}(8) = 105$$

**Respuesta:** 105

## Binomio de Newton

**941.** Usando el teorema del binomio de Newton determinar: $(2x+5)^2$

a) $x^2+20x+25$ b) $2x^2+20x+25$
c) $4x^2+20x+25$ d) $x^2+25x+20$

**Resolución**

$$(2x+5)^2=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}(2x)^{2-k}5^k$$

$$=\binom{2}{0}(2x)^2+\binom{2}{1}(2x)^{2-1}5^1+\binom{2}{2}(2x)^{2-2}5^2$$

$$=\frac{2!}{0!\,(2-0)!}4x^2+\frac{2!}{1!\,(2-1)!}2x\cdot 5+\frac{2!}{2!\,(2-2)!}1\cdot 25$$

$$=\frac{2!}{0!\,2!}4x^2+\frac{2!}{1!\,1!}10x+\frac{2!}{2!\,0!}25$$

$$=1\cdot 4x^2+2\cdot 10x+1\cdot 25$$

$$=4x^2+20x+25$$

**Respuesta:** $4x^2+20x+25$

**942.** Determinar el valor de la expresión: $(x-6)^2$ usando el teorema del binomio de Newton.

a) $x^2-6x+12$ b) $x^2-6x+36$
c) $x^2+12x+36$ d) $x^2-12x+36$

**Resolución**

$$(x-6)^2=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x^{2-k}(-6)^k$$

$$=\binom{2}{0}x^2+\binom{2}{1}x^{2-1}(-6)^1+\binom{2}{2}x^{2-2}(-6)^2$$

$$=\frac{2!}{0!\,(2-0)!}x^2+\frac{2!}{1!\,(2-1)!}x\cdot(-6)+\frac{2!}{2!\,(2-2)!}1\cdot 6^2$$

$$=\frac{2!}{0!\,2!}x^2-\frac{2!}{1!\,1!}6x+\frac{2!}{2!\,0!}36$$

$$=1\cdot x^2-2\cdot 6x+1\cdot 36$$

$$=x^2-12x+36$$

**Respuesta:** $x^2-12x+36$

**943.** Determinar el valor de la expresión: $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$

a) $x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{16}$ b) $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}$

c) $x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{16}$ d) $x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}$

## Resolución

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x^{2-k}\left(-\frac{3}{4}\right)^k$$

$$=\binom{2}{0}x^2+\binom{2}{1}x^{2-1}\left(-\frac{3}{4}\right)^1+\binom{2}{2}x^{2-2}\left(-\frac{3}{4}\right)^2$$

$$=\frac{2!}{0!\,(2-0)!}x^2+\frac{2!}{1!\,(2-1)!}x\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{2!}{2!\,(2-2)!}1\cdot\frac{9}{16}$$

$$=\frac{2!}{0!\,2!}x^2-\frac{2!}{1!\,1!}\frac{3}{4}x+\frac{2!}{2!\,0!}\frac{9}{16}$$

$$=1\cdot x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+1\cdot\frac{9}{16}$$

$$=x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}$$

**Respuesta:** $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}$

**944.** Determinar el valor de la expresión: $\left(6-\frac{1}{2}x\right)^2$

a) $36+6x+\frac{1}{4}x^2$ b) $36-6x+\frac{1}{4}x^2$

c) $36+6x-\frac{1}{4}x^2$ d) $36-6x-\frac{1}{4}x^2$

## Resolución

$$\left(6-\frac{1}{2}x\right)^2=\sum_{k=0}^{2}(6)\,x^{2-k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$=\binom{2}{0}6^2+\binom{2}{1}6^{2-1}\left(-\frac{1}{2}x\right)^1+\binom{2}{2}6^{2-2}\left(-\frac{1}{2}x\right)^2$$

$$=\frac{2!}{0!\,(2-0)!}6^2+\frac{2!}{1!\,(2-1)!}6\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right)+\frac{2!}{2!\,(2-2)!}1\cdot\frac{1}{4}x^2$$

$$= \frac{2!}{0!\,2!}36 - \frac{2!}{1!\,1!}3x + \frac{2!}{2!\,0!}\frac{1}{4}x^2$$
$$= 1 \cdot 36 - 2 \cdot 3x + 1 \cdot \frac{1}{4}x^2$$
$$= 36 - 6x + \frac{1}{4}x^2$$

**Respuesta:** $36 - 6x + \frac{1}{4}x^2$

**945.** Desarrollar: $\left(45x + \frac{45}{2}\right)^2$

a) $2022x^2 + 2022x + \frac{2022}{4}$ b) $2023x^2 + 2023x + \frac{2023}{4}$

c) $2024x^2 + 2024x + \frac{2024}{4}$ d) $2025x^2 + 2025x + \frac{2025}{4}$

**Resolución**

$$\left(45x + \frac{45}{2}\right)^2 = \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}(45x)^{2-k}\left(\frac{45}{2}\right)^k$$
$$= \binom{2}{0}(45x)^2 + \binom{2}{1}(45x)^{2-1}\left(\frac{45}{2}\right)^1 + \binom{2}{2}(45x)^{2-2}\left(\frac{45}{2}\right)^2$$
$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!}(45x)^2 + \frac{2!}{1!\,(2-1)!}(45x)\left(\frac{45}{2}\right) + \frac{2!}{2!\,(2-2)!}1 \cdot \left(\frac{45}{2}\right)^2$$
$$= \frac{2!}{0!\,2!}(45x)^2 + \frac{2!}{1!\,1!}(45x)\frac{45}{2} + \frac{2!}{2!\,0!}\left(\frac{45}{2}\right)^2$$
$$= 1 \cdot (45x)^2 + 2 \cdot (45x)\frac{45}{2} + 1 \cdot \left(\frac{45}{2}\right)^2$$
$$= 2025x^2 + 2025x + \frac{2025}{4}$$

**Respuesta:** $2025x^2 + 2025x + \frac{2025}{4}$

**946.** Determinar el desarrollo de la expresión: $(x^2 + 1)^3$

a) $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$ b) $x^6 + x^4 + 3x^2 + 3$

c) $x^6 + 3x^4 + x^2 + 3$ d) $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 3$

## Resolución

$$(x^2+1)^3=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(x^2)^{3-k}(1)^k$$

$$=\binom{3}{0}(x^2)^3+\binom{3}{1}(x^2)^{3-1}(1)^1+\binom{3}{2}(x^2)^{3-2}(1)^2+\binom{3}{3}(x^2)^{3-3}(1)^3$$

$$=\frac{3!}{0!\,(3-0)!}(x^2)^3+\frac{3!}{1!\,(3-1)!}(x^2)^2(1)^1+\frac{3!}{2!\,(3-2)!}(x^2)^1(1)^2$$

$$+\frac{3!}{3!\,(3-3)!}(x^2)^0(1)^3$$

$$=\frac{3!}{0!\,3!}x^6+\frac{3!}{1!\,2!}x^4\cdot 1+\frac{3!}{2!\,1!}x^2\cdot 1+\frac{3!}{3!\,0!}1\cdot 1$$

$$=1\cdot x^6+3\cdot x^4\cdot 1+3\cdot x^2\cdot 1+1\cdot 1\cdot 1$$

$$=x^6+3x^4+3x^2+1$$

**Respuesta:** $x^6+3x^4+3x^2+1$

**947.** Desarrollar: $\left(\frac{3}{4}a+\frac{2}{5}b\right)^3$

para a,b números reales cuales quiera.

a) $\frac{27}{64}a^3-\frac{27}{40}a^2b-\frac{9}{25}ab^2-\frac{8}{125}b^3$

b) $\frac{27}{64}a^3+\frac{27}{40}a^2b-\frac{9}{25}ab^2+\frac{8}{125}b^3$

c) $\frac{27}{64}a^3-\frac{27}{40}a^2b+\frac{9}{25}ab^2-\frac{8}{125}b^3$

d) $\frac{27}{64}a^3+\frac{27}{40}a^2b+\frac{9}{25}ab^2+\frac{8}{125}b^3$

## Resolución

$$\left(\frac{3}{4}a+\frac{2}{5}b\right)^3=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\left(\frac{3}{4}a\right)^{2-k}\left(\frac{2}{5}b\right)^k$$

$$=\binom{3}{0}\left(\tfrac{3}{4}a\right)^3+\binom{3}{1}\left(\tfrac{3}{4}a\right)^{3-1}\left(\tfrac{2}{5}b\right)^1+\binom{3}{2}\left(\tfrac{3}{4}a\right)^{3-2}\left(\tfrac{2}{5}b\right)^2+\binom{3}{3}\left(\tfrac{3}{4}a\right)^{3-3}\left(\tfrac{2}{5}b\right)^3$$

$$=\frac{3!}{0!\,(3-0)!}\left(\frac{3}{4}a\right)^3+\frac{3!}{1!\,(3-1)!}\left(\frac{3}{4}a\right)^2\left(\frac{2}{5}b\right)^1+\frac{3!}{2!\,(3-2)!}\left(\frac{3}{4}a\right)^1\left(\frac{2}{5}b\right)^2$$

$$+\frac{3!}{3!\,(3-3)!}\left(\frac{3}{4}a\right)^0\left(\frac{2}{5}b\right)^3$$

$$=\frac{3!}{0!\,3!}\frac{27}{64}a^3+\frac{3!}{1!\,2!}\frac{9}{16}a^2\cdot\frac{2}{5}b+\frac{3!}{2!\,1!}\frac{3}{4}a\cdot\frac{4}{25}b^2+\frac{3!}{3!\,0!}1\cdot\frac{8}{125}b^3$$

$$=1\cdot\frac{27}{64}a^3+3\cdot\frac{9}{16}a^2\cdot\frac{2}{5}b+3\cdot\frac{3}{4}a\cdot\frac{4}{25}b^2+1\cdot 1\cdot\frac{8}{125}b^3$$

$$= \frac{27}{64}a^3 + \frac{27}{40}a^2b + \frac{9}{25}ab + \frac{8}{125}b^3$$

**Respuesta:** $\frac{27}{64}a^3 + \frac{27}{40}a^2b + \frac{9}{25}ab^2 + \frac{8}{125}b^3$

**948.** Desarrollar: $(x-y)^4$

a) $x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3 + y^4$
b) $x^4 + 4x^3y - 6x^2y^2 + 4xy^3 - y^4$
c) $x^4 + 2x^3y - 4x^2y^2 + 2xy^3 - y^4$
d) $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

### Resolución

$$(x-y)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{n}{k}x^{4-k}(-y)^k$$

$$= \binom{4}{0}x^4 - \binom{4}{1}x^{4-1}y^1 + \binom{4}{2}x^{4-2}y^2 - \binom{4}{3}x^{4-3}y^3 + \binom{4}{4}x^{4-4}y^4$$

$$= \frac{4!}{0!\,4!}x^4 - \frac{4!}{1!\,3!}x^3y^1 + \frac{4!}{2!\,2!}x^2y^2 - \frac{4!}{3!\,1!}x^1y^3 + \frac{4!}{4!\,0!}x^0y^4$$

$$= 1\cdot x^4 - 4\cdot x^3\cdot y + 6\cdot x^2\cdot y^2 - 4\cdot x\cdot y^3 + 1\cdot y^4$$

$$= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

**Respuesta:** $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

**949.** Hallar el desarrollo de la expresión: $(a^2+b)^4$ usando el teorema del binomio de Newton

a) $a^4 + a^6b + a^4b^2 + a^2b^3 + b^4$
b) $a^6 + 2a^6b + 3a^4b^2 + 2a^2b^3 + b^4$
c) $a^8 + 4a^6b + 6a^4b^2 + 4a^2b^3 + b^4$
d) $a^{10} + 6a^6b + 9a^4b^2 + 6a^2b^3 + b^4$

### Resolución

$$(a^2+b)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{n}{k}(a^2)^{4-k}b^k$$

$$= \binom{4}{0}(a^2)^4 + \binom{4}{1}(a^2)^{4-1}b^1 + \binom{4}{2}(a^2)^{4-2}b^2 + \binom{4}{3}(a^2)^{4-3}b^3 + \binom{4}{4}(a^2)^{4-4}b^4$$

$$= \frac{4!}{0!\,4!}(a^2)^4 + \frac{4!}{1!\,3!}(a^2)^3b^1 + \frac{4!}{2!\,2!}(a^2)^2b^2 + \frac{4!}{3!\,1!}(a^2)^1b^3 + \frac{4!}{4!\,0!}(a^2)^0b^4$$

$$= 1\cdot a^8 + 4\cdot a^6\cdot b + 6\cdot a^4\cdot b^2 + 4\cdot a^2\cdot b^3 + 1\cdot b^4$$

$$= a^8 + 4a^6b + 6a^4b^2 + 4a^2b^3 + b^4$$

**Respuesta:** $a^8 + 4a^6b + 6a^4b^2 + 4a^2b^3 + b^4$

**950.** Desarrollar la expresión: $(2x + y^2)^5$

a) $8x^5 + 20x^4y^2 + 20x^3y^4 + 10x^2y^6 + 4xy^8 + y^{10}$
b) $16x^5 + 40x^4y^2 + 40x^3y^4 + 20x^2y^6 + 6xy^8 + y^{10}$
c) $24x^5 + 60x^4y^2 + 60x^3y^4 + 30x^2y^6 + 8xy^8 + y^{10}$
d) $32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$

## Resolución

$$(2x + y^2)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{n}{k}(2x)^{5-k}(y^2)^k$$

$$= \binom{5}{0}(2x)^5 + \binom{5}{1}(2x)^{5-1}(y^2)^1 + \binom{5}{2}(2x)^{5-2}(y^2)^2 + \binom{5}{3}(2x)^{5-3}(y^2)^3 + \binom{5}{4}(2x)^{5-4}(y^2)^4 + \binom{5}{5}(2x)^{5-5}(y^2)^5$$

$$= \frac{5!}{0!\cdot 5!}(2x)^5 + \frac{5!}{1!\cdot 4!}(2x)^4(y^2)^1 + \frac{5!}{2!\cdot 3!}(2x)^3(y^2)^2 + \frac{5!}{3!\cdot 2!}(2x)^2(y^2)^3 + \frac{5!}{4!\cdot 1!}(2x)^1(y^2)^4 + \frac{5!}{5!\cdot 0!}(2x)^0(y^2)^5$$

$$= 1\cdot 32x^5 + 5\cdot 16x^4y^2 + 10\cdot 8x^3y^4 + 10\cdot 4x^2y^6 + 5\cdot 2xy^8 + 1\cdot 1y^{10}$$

$$= 32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$$

**Respuesta:** $32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$

## Principios del conteo

**951.** En la biblioteca, en el área de ciencias hay 40 libros de arte, 30 de dibujo y 40 de psicología. Un estudiante quiere elegir 1 libro para leerlo como pasatiempo, ¿cuántas opciones tiene para elegir un libro?

a) 100 b) 110 c) 120 d) 130

**Respuesta:** ......

**952.** En la promoción se quiere elegir al secretario de deportes entre 7 mujeres y 5 varones. ¿Cuántos candidatos se pueden tomar en cuenta para ser el secretario de deportes?

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13

**Respuesta:** ......

**953.** Un turista que llegó a Bolivia, quiere visitar la ciudad de Oruro y Beni. Para ir a Oruro tiene la opción de transportarse en: 2 aerolíneas, 3 buses y 4 empresas de renta de coches particulares. Para ir a Beni tiene la opción de transportarse en 1 aerolínea y 2 buses, ¿cuántas maneras tiene de llegar a alguna de estas ciudades?

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16

**Respuesta:** ......

**954.** Se observa la placa de un automóvil que consta de 2 letras seguidas y 4 números, de los cuales todos son números pares, ¿de cuántas formas podrá formarse una placa, si las letras no se repiten y los números se repiten?

a) 460 250 b) 406 520 c) 460 5220 d) 406 250

**Respuesta:** ......

**955.** Se observa la placa de un automóvil que consta de tres vocales seguidas de tres números pares, ¿de cuántas formas se podrá formar una placa si las vocales y los números no se repiten?

a) 3600 b) 3005 c) 3605 d) 3500

**Respuesta:** ......

**956.** Un maestro cuenta con 5 tareas y decide asignar una tarea a cada estudiante, ¿cuántas maneras de tareas diferentes puede asignar?

a) 100 b) 110 c) 120 d) 130

**Respuesta: ......**

**957.** Luis tiene 3 hermanos y su papá tiene 10 dulces, quiere repartir a cada uno, ¿de cuántas maneras diferentes puede repartir los dulces?

a) 1290 b) 1029 c) 1209 d) 1920

**Respuesta: ......**

**958.** En una feria se presentan 5 proyectos de biología, 4 proyectos de química, 6 proyectos de física y 6 proyectos de matemática. El jurado debe elegir un proyecto de biología o química y un proyecto de física o matemática, ¿cuántos proyectos diferentes puede elegir el jurado?

a) 36 b) 56 c) 64 d) 46

**Respuesta: ......**

**959.** En la promoción y pre promoción se están reclutando jugadores para la selección. Si en cada curso hay 5 postulantes, ¿cuántas opciones tiene en total para elegir 4 jugadores?

a) 5 b) 4 c) 10 d) 20

**Respuesta: ......**

**960.** Hay exposiciones en una unidad educativa, con tres salas y en cada sala se presentan cuatro diferentes exposiciones. Además, cada conferencia es para el turno de la mañana, tarde y noche, ¿cuántas combinaciones de sala hay en los 2 turnos ?

a) 12 b) 24 c) 36 d) ninguna

**Respuesta: ......**

## Factorial

**961.** La maestra de matemática le pide a Carla calcular el número 6!.

a) 700 b) 720 c) 740 d) 760

**Respuesta:** ......

**962.** ¿De cuántas maneras diferentes se puede ordenar los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5?

a) 100 b) 110 c) 120 d) 130

**Respuesta:** ......

**963.** ¿De cuántas maneras se puede ordenar las letras de la palabra LORO?

a) 12 b) 24 c) 36 d) 48

**Respuesta:** ......

**964.** Simplificar la expresión:

$$\frac{9!}{7!}$$

a) 45 b) 54 c) 63 d) 72

**Respuesta:** ......

**965.** Le dejan de tarea a María calcular el número:

$$\frac{9!}{3!}$$

a) 60 480 b) 60 840 c) 64 080 d) 64 800

**Respuesta:** ......

**966.** Simplificar la expresión:

$$\frac{7! \cdot 5!}{6!}$$

a) 800 b) 810 c) 820 d) 840

**Respuesta:** ......

**967.** Determinar el valor de:

$$\frac{6!\cdot 3!}{5!}$$

a) 10 b) 20 c) 30 d) ninguno

**Respuesta: ......**

**968.** Hallar el valor de:

$$\frac{7!\cdot 9!\cdot 11!}{8!\cdot 99\cdot 10!}$$

a) 5004 b) 5040 c) 5400 d) ninguno

**Respuesta: ......**

**969.** Simplificar la expresión dada:

$$\frac{(n+1)!-(n-1)!}{(n-1)!}$$

a) $n^2-n+1$ b) $n^2+n-1$ c) $n^2-n-1$ d) $n^2+n+1$

**Respuesta: ......**

**970.** Simplificar:

$$\frac{(n+4)!-(n+3)!+(n+2)!}{(n+2)!}$$

a) $(n+3)^2$ b) $(n+3)^2-1$ c) $(n+3)^2+1$ d) $Ninguno$

**Respuesta: ......**

**971.** Una pareja va a cenar a un restaurant, donde encuentran 7 tipos de platos, ¿de cuántas formas pueden seleccionar 2 platos?

a) 7 b) 14 c) 21 d) 28

**Respuesta: ......**

**972.** Un examen de matemática tiene 2 partes, una que consta de 8 preguntas y otra de 7 preguntas, ¿cuántas combinaciones habrá si por cada parte de los exámenes les piden realizar solo 3 preguntas?

a) 1690 b) 1609 c) 1906 d) 1960

**Respuesta: ......**

**973.** Un restaurante tiene 3 tipos de entradas y 4 tipos de postres. Un cliente puede elegir solo una entrada o un postre, ¿de cuántas maneras puede hacer su elección?

a) 7 b) 10 c) 12 d) ninguna

**Respuesta:** ......

**974.** En un evento de música hay 9 cantantes, ¿de cuántas formas se puede escoger 3 cantantes, si uno debe ser solista?

a) 25 b) 26 c) 28 d) 27

**Respuesta:** ......

**975.** En una biblioteca se quiere seleccionar un conjunto de libros que contengan 1 libro de matemática, 2 libros de física y 1 de química. Si hay 6 libros de matemática, 8 libros de física y 5 libros de química, ¿de cuántas maneras se puede formar este conjunto de libros?

a) 810 b) 820 c) 830 d) 840

**Respuesta:** ......

**976.** En una tienda hay frutas entre 6 manzanas, 5 peras y 4 plátanos. Un cliente quiere comprar 6 frutas, pero al menos una fruta de cada una, ¿de cuántas maneras puede hacer su elección?

a) 606 b) 660 c) 66 d) ninguno

**Respuesta:** ......

**977.** En una casa, 3 personas deben realizar 6 tareas domésticas, ¿de cuántas maneras se pueden distribuir las tareas?

a) 22 b) 24 c) 26 d) 28

**Respuesta:** ......

**978.** En un hospital se deben repartir 5 dosis de medicinas entre 4 pacientes, ¿de cuántas maneras se pueden distribuir las dosis?

a) 26 b) 36 c) 46 d) 56

**Respuesta:** ......

## Propuestos 05

**979.** En una conferencia se deben planificar 8 eventos utilizando 3 tipos de salas. Además, se debe seleccionar 2 charlas de un grupo de 6, ¿de cuántas maneras se puede planificar los eventos y seleccionar las charlas?

a) 567 b) 657 c) 675 d) 765

**Respuesta: .....**

**980.** Un cocinero debe preparar 10 platos utilizando solo 5 tipos de ingredientes. Además, debe seleccionar 3 platos de un menú de 7, ¿de cuántas maneras se puede combinar los ingredientes y seleccionar los platos?

a) 30 535 b) 35 035 c) 35 305 d) 35 350

**Respuesta: .....**

**981.** ¿Cuál es el número de permutaciones del conjunto {a,b,c}?.

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

**Respuesta: .....**

**982.** Encuentre el número de permutaciones de las letras en la palabra COCA.

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16

**Respuesta: .....**

**983.** Hay 10 estudiantes en la promoción y se quiere 2 representantes. Encuentre el número de variaciones de estudiantes para representar al curso.

a) 30 b) 60 c) 90 d) ninguno

**Respuesta: .....**

**984.** ¿Cuál es el número de permutaciones que tienen los elementos de la palabra FLORES?

a) 120 b) 420 c) 620 d) 720

**Respuesta: .....**

**985.** Determinar el número de permutaciones que tienen las letras de la palabra COCHABAMBA.

a) 150 012 b) 151 002 c) 152 100 d) 151 200

**Respuesta: .....**

**986.** Calcular el número de permutaciones para los personajes históricos entre Simón Bolivar, Antonio José de Sucre, Eduardo Avaroa, Juancito Pinto, Melchor Pérez de Sucre.

a) 30 b) 60 c) 90 d) Ninguno

**Respuesta: .....**

**987.** ¿Cuál es el número de permutaciones que tienen los elementos de la palabra EUFORIA?

a) 5004 b) 5040 c) 5400 d) Ninguno

**Respuesta: .....**

**988.** ¿Determine el número de permutaciones de las letras en la palabra HIPOTÁLAMO?

a) 900 027 b) 970 200 c) 907 200 d) 902 700

**Respuesta: .....**

**989.** Calcular el número de maneras de elegir 5 letras de la palabra BIOQUÍMICA.

a) 30 024 b) 30 240 c) 30 204 d) 30 402

**Respuesta: .....**

**990.** En una asamblea nacional, 10 representantes de diferentes departamentos se sientan en una mesa redonda. Tres de ellos representan el mismo departamento, ¿cuántas maneras diferentes existen para que se acomoden?

a) 60 048 b) 60 480 c) 60 408 d) 64 800

**Respuesta: .....**

## Binomio de newton

**991.** Aplicar el teorema del binomio de Newton y desarrollar:

$$(x+7)^2$$

a) $x^2+7x+14$ b) $x^2+14x+7$

c) $x^2+49x+7$ d) $x^2+14x+49$

**Respuesta: .....**

**992.** Aplicar el teorema del binomio de Newton y desarrollar:

$$(4x-3)^2$$

a) $9x^2-16x+24$ b) $16x^2-9x+24$

c) $16x^2-24x+9$ d) $24x^2-16x+9$

**Respuesta: .....**

**993.** Desarrollar la expresión: $\left(x-\frac{1}{6}\right)^2$

a) $x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{36}$ b) $x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}$

c) $x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{36}$ d) $x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}$

**Respuesta: .....**

**994.** Usando el teorema del binomio de Newton resolver:

$$\left(5-\frac{1}{3}x\right)^2$$

a) $5-\frac{10}{3}x+\frac{1}{9}x^2$ b) $25+\frac{10}{3}x-\frac{1}{9}x^2$

c) $25-\frac{10}{3}x+\frac{1}{9}x^2$ d) $25-\frac{5}{3}x+\frac{1}{9}x^2$

**Respuesta: .....**

**995.** Usando el teorema del binomio de Newton, desarrollar:

$$\left(\frac{6}{5}x+\frac{4}{3}\right)^2$$

a) $\frac{6}{5}x^2+\frac{16}{5}x+\frac{16}{9}$  b) $\frac{36}{25}x^2+\frac{16}{5}x+\frac{4}{3}$

c) $\frac{36}{25}x^2+\frac{16}{9}x+\frac{16}{5}$  d) $\frac{36}{25}x^2+\frac{16}{5}x+\frac{16}{9}$

**Respuesta: .....**

**996.** Desarrollar la expresión:

$$(3x-2)^3$$

a) $27x^3+54x^2-36x+8$  b) $27x^3-54x^2+36x-8$

c) $27x^3+54x^2+36x-8$  d) $27x^3+54x^2-36x-8$

**Respuesta: .....**

**997.** Usando el teorema del binomio de Newton desarrollar: $\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)^3$

a) $\frac{8}{27}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$  b) $\frac{8}{27}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$

c) $\frac{8}{27}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$  d) $\frac{8}{27}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$

**Respuesta: .....**

**998.** Desarrollar la expresión: $(a+b)^4$

para a,b números reales cuales quiera.

a) $a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4$  b) $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

c) $a^4+6a^3b+8a^2b^2+6ab^3+b^4$  d) $a^4+8a^3b+1a^2b^2+8ab^3+b^4$

**Respuesta: .....**

**999.** Desarrollar la expresión: $\left(3a-\dfrac{2b}{a}\right)^4$

a) $81a^4-216a^2b+216b^2-96\frac{b^3}{a^2}+16\frac{b^4}{a^4}$

b) $81a^4+216a^2b-216b^2+96\frac{b^3}{a^2}-16\frac{b^4}{a^4}$

c) $81a^4-216a^2b+216b^2+96\frac{b^3}{a^2}-16\frac{b^4}{a^4}$

d) $81a^4+216a^2b-216b^2-96\frac{b^3}{a^2}+16\frac{b^4}{a^4}$

**Respuesta: .....**

**1000.** Desarrollar la expresión:

$(2x-y)^5$

a) $32x^5-80x^4y+80x^3y^2-40x^2y^3+10xy^4-y^5$

b) $32x^5+80x^4y-80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4-y^5$

c) $32x^5-80x^4y-80x^3y^2+40x^2y^3-10xy^4-y^5$

d) $32x^5+80x^4y+80x^3y^2-40x^2y^3+10xy^4+y^5$

**Respuesta: .....**

# Clave de respuestas

## Álgebra y Aritmética

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 201. | b) | 216. | b) | 231. | c) | 246. | a) |
| 202. | d) | 217. | c) | 232. | c) | 247. | b) |
| 203. | a) | 218. | a) | 233. | a) | 248. | a) |
| 204. | d) | 219. | b) | 234. | b) | 249. | b) |
| 205. | b) | 220. | a) | 235. | b) | 250. | a) |
| 206. | d) | 221. | c) | 236. | b) | | |
| 207. | a) | 222. | a) | 237. | a) | | |
| 208. | c) | 223. | a) | 238. | c) | | |
| 209. | b) | 224. | a) | 239. | b) | | |
| 210. | b) | 225. | c) | 240. | c) | | |
| 211. | a) | 226. | c) | 241. | c) | | |
| 212. | d) | 227. | c) | 242. | a) | | |
| 213. | b) | 228. | a) | 243. | b) | | |
| 214. | b) | 229. | d) | 244. | a) | | |
| 215. | c) | 230. | c) | 245. | a) | | |

## Geometría

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 451. | a) | 466. | c) | 481. | c) | 496. | b) |
| 452. | b) | 467. | a) | 482. | b) | 497. | a) |
| 453. | c) | 468. | d) | 483. | b) | 498. | b) |
| 454. | d) | 469. | c) | 484. | d) | 499. | c) |
| 455. | c) | 470. | b) | 485. | b) | 500. | d) |
| 456. | b) | 471. | b) | 486. | a) | | |
| 457. | c) | 472. | c) | 487. | c) | | |
| 458. | a) | 473. | a) | 488. | d) | | |
| 459. | b) | 474. | c) | 489. | a) | | |
| 460. | c) | 475. | d) | 490. | b) | | |
| 461. | b) | 476. | b) | 491. | c) | | |
| 462. | d) | 477. | a) | 492. | b) | | |
| 463. | d) | 478. | d) | 493. | c) | | |
| 464. | c) | 479. | c) | 494. | b) | | |
| 465. | c) | 480. | b) | 495. | d) | | |

## Trigonometría

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 701. | a) | 716. | a) | 731. | c) | 746. | b) |
| 702. | c) | 717. | c) | 732. | a) | 747. | d) |
| 703. | d) | 718. | b) | 733. | a) | 748. | d) |
| 704. | a) | 719. | d) | 734. | d) | 749. | b) |
| 705. | b) | 720. | b) | 735. | c) | 750. | c) |
| 706. | c) | 721. | a) | 736. | b) | | |
| 707. | b) | 722. | d) | 737. | c) | | |
| 708. | d) | 723. | b) | 738. | d) | | |
| 709. | a) | 724. | c) | 739. | c) | | |
| 710. | c) | 725. | d) | 740. | a) | | |
| 711. | b) | 726. | c) | 741. | b) | | |
| 712. | b) | 727. | d) | 742. | c) | | |
| 713. | a) | 728. | b) | 743. | d) | | |
| 714. | d) | 729. | c) | 744. | d) | | |
| 715. | d) | 730. | b) | 745. | a) | | |

## Combinatoria

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 951. | b) | 966. | d) | 981. | d) | 996. | b) |
| 952. | c) | 967. | d) | 982. | b) | 997. | c) |
| 953. | b) | 968. | b) | 983. | c) | 998. | b) |
| 954. | d) | 969. | b) | 984. | d) | 999. | a) |
| 955. | a) | 970. | c) | 985. | d) | 1000. | a) |
| 956. | c) | 971. | c) | 986. | d) | | |
| 957. | d) | 972. | d) | 987. | b) | | |
| 958. | b) | 973. | a) | 988. | c) | | |
| 959. | c) | 974. | c) | 989. | b) | | |
| 960. | c) | 975. | d) | 990. | b) | | |
| 961. | b) | 976. | b) | 991. | d) | | |
| 962. | c) | 977. | d) | 992. | c) | | |
| 963. | a) | 978. | d) | 993. | b) | | |
| 964. | d) | 979. | c) | 994. | c) | | |
| 965. | a) | 980. | b) | 995. | d) | | |

## BIBLIOGRAFÍA


- Allen R, A. (1998). *Algebra Elemental*. Mexico: Prentice Hall.
- Arturo Aguilar M. Fabián V. Bravo V. Herman A. Gallegos, Miguel Cerón V. Ricardo Reyes F. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Segunda edición.
- Dennis G. Zill (2012). *Álgebra, trigonométria y geometría analítica*. Tercera edición, Printed in México
- EARL W. SWOKOWSKI, *Álgebra y Trigonométria con geometría analítica.* Décimo Segunda edición.
- Graña, M., Gerónimo, G., Pacetti, A., Jancsa, A., & Petrovich, A. (2010). *Los Números, de los naturales a los complejos*. Buenos Aires - Argentina: Ministerio de Educación.
- Grimaldi, R. P. (1994). *Matemáticas discretas y combinatoria.* Tercera edición, Addison-Wesley Iberoamericana.
- Instituto Boliviano de Metrología (*IBMETRO*). Ministerio de Desarrollo Productivo y Economía Plural.
- Lazaro Cárdenas (2020). *Geometría y Trigonométria*. Guía de estudio.
- Lexus. (2008). *Álgebra, Manual de preparación Pre-universitaria*. Lima-Perú: Lexus Editores S.A.
- LEHMANN, Charles H. (1978). *Geometría Analítica*. México D. F.: Editorial Limusa.
- Sistema Internacional de unidades de medidas (2019). *Reglas de uso*. Novena edición. Editado en español por el Sistema Internacional de Metrología.
- Vanegas, M. D. A. y Noreña, Y. E. G. (2016). *Aritmética: teoría, ejemplos y problemas*. Instituto Tecnológico Metropolitano.

## ¿Qué es la Metrología?

Ciencia de las mediciones y sus aplicaciones.

## Legislación

En Bolivia el Sistema Internacional de Unidades (S.I.) fue declarado de uso obligatorio e irrestricto en 1978, mediante la Ley Nacional de Metrología.


**Ley N° 15380**
**Ley Nacional de Metrología**

**1978**

- Se crea el Servicio Metrológico Nacional (SERMETRO), para aplicar las políticas nacionales en materia de metrología.
- Se establece el uso obligatorio del Sistema Internacional de Unidades - (S.I.), en todo el territorio nacional.

**Decreto Supremo N° 24498**

**1997**

- Se crea el Instituto Boliviano de Metrología (IBMETRO), para administrar el SERMETRO.
- Se establece el Organismo Boliviano de Acreditación (OBA).
- Faculta a IBMETRO a prestar servicios en los ámbitos de metrología industrial, legal y científica.

**Decreto Supremo Nº 28243**

**2005**

- Se crea la Dirección Técnica de Acreditación (DTA) como parte de la estructura organizacional de IBMETRO.

**Decreto Supremo Nº 29727**

**2008**

- Se dispone que el Ministerio de Desarrollo Productivo y Economía Plural tiene bajo su tuición o dependencia al IBMETRO, como entidad desconcentrada.


IBMETRO
INSTITUTO BOLIVIANO DE METROLOGÍA

# REGLAS DE USO

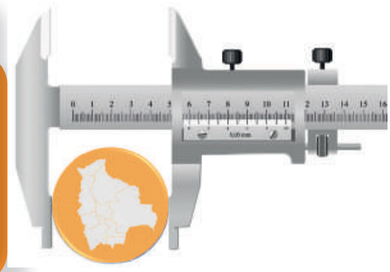
En la escritura de los símbolos del Sistema Internacional de Unidades (S.I.) se cometen una serie de errores fruto del desconocimiento de los mismos o simplemente por factores de castellanización.

Algunos de los errores más comunes se encuentran listados a continuación:

| Nombre | Correcto | Incorrecto |
|---|---|---|
| metro | m | mts, mt, Mt, M |
| kilogramo | kg | kgr, kgrs, Kilo, KG, Kg |
| gramo | g | Gr, grs, Grs, g. |
| litro | l o L | Lts, lt, Lt |
| kelvin | K | Kv |
| centímetro cúbico | $cm^3$ | cc, cmc, c.c. |
| kilómetro por hora | km/h | kph, kmph, kmh |
| kilómetro | km | Km, Kmt, kmt |

Los símbolos de las unidades no son seguidos de puntuación, salvo cuando se trate del fin de la oración. Es incorrecto pluralizar con la letra “s” como se muestra en el segundo ejemplo.

| Correcto | Incorrecto |
|---|---|
| 50 m | 50 m. |
| 50 kg | 50 kgs |



La sustitución de una mayúscula por una minúscula no se la debe realizar, pues puede alterar el significado.

| Correcto | Incorrecto |
|---|---|
| 5 km | 5 Km<br>Se lee 5 Kelvin metro |
| 20 kg | 20 Kg<br>Se lee 20 Kelvin gramo |

Los símbolos de las unidades son inalterables en el plural.

| Correcto | Incorrecto |
|---|---|
| 5 m | 5 mts |
| 2 s | 2 segs |
| 1 lux, 100 lux | 100 luxes |
| 1 hertz, 100 hertz | 100 hertzes |

Los valores numéricos serán expresados, cuando así correspondan, en decimales y nunca en fracciones.

| Correcto | Incorrecto |
|---|---|
| 1,75 m | 1 3/3 m |
| 0,5 °C | ½ °C |

Para la escritura de las fechas en forma numérica se debe respetar el siguiente orden: **AÑO MES DÍA**

| Ejemplo | Correcto | Incorrecto |
|---|---|---|
| 27 de septiembre de 2024 | 2024-09-27 | 27-09-2024 |
| | 2024 09 27 | 27/09/2024 |

Error

1. El símbolo de metro no es M. Debe ser: m
2. El símbolo de kilómetro no es KM. Debe ser km

Error

1. El símbolo de kilogramo (kg.) no termina en punto, salvo al final de la frase. Debe ser: kg
2. El símbolo de kilogramo no es Kg. Debe ser kg
3. Cuando se establece un intervalo entre medidas hay que indicar las unidades. No se escribe entre los 70 y los 95 kg. Debe escribirse: entre los 70 kg y los 95 kg

## Error

1. El símbolo de kilogramo no es KG. Debe ser: kg
2. El símbolo de kilogramo no es kgs. Debe ser: kg
3. 7,5KG no es correcto. Debe ser: 7,5 kg

Los símbolos de las unidades deben escribirse en minúscula a excepción de los que derivan del nombre de un/ una científico/a.

Los símbolos de las unidades no deben ponerse en plural, ya que la letra "s" puede originar confusión, al representar al segundo. Al expresar un espacio entre el valor numérico de la magnitud y el símbolo de su unidad.

## Error

1. No se escribe 9ºC. Debe ser: 9 ºC
2. El símbolo del grado Celsius no es º. Debe ser: ºC
3. La unidad de temperatura no es el grado centígrado. Es el grado Celsius desde 1948.

## Error

| Correcto | Incorrecto |
| --- | --- |
| $800\ \mathrm{W \cdot h/m^2}$ | $800\ \mathrm{w/h/m^2}$ |

1. En la expresión de un cociente no debe usarse más de una línea inclinada.
2. No se puede dividir potencia (W), por tiempo (h), y por superficie ($\mathrm{m^2}$). Genera un error en la expresión. Si es potencia por unidad de superficie, no puede estar dividida por una unidad de tiempo, h ($\mathrm{W/m^2}$). Si fuera energía por unidad de superficie, la barra de dividir debería cambiarse por un punto de multiplicar centrado, ($\mathrm{W \cdot h/m^2}$) o simplemente suprimirla y debería añadir el dato de cuánto tiempo tarda en generarla.
3. Error en la unidad reflejada (w), pues al proceder el vatio del apellido de James Watt, debería ponerse con mayúscula (W).

## Error

| Correcto | Incorrecto |
|---|---|
| 80 g·m$^{-2}$ | 80 g.m$^{-2}$ |

1. La expresión reflejada g.m-$^{2}$ contiene el error de colocar el punto de multiplicación bajo, cuando debería estar centrado verticalmente, de este modo g·m$^{-2}$
2. Otra forma correcta es g/m$^{2}$

## Ejemplo

Las **llantas de 19'' de serie** ofrecen acabados de metal mecanizado …

La vertiente tecnológica viene dada por **un cuadro de instrumentos digital con pantalla de 12,3'' y un sistema de infoentretenimiento SYNC 3 con pantalla táctil de 8''** y compatibilidad …

Bajo el capó, … esconde el bloque gasolina del … Estamos hablando del **motor 1.5 EcoBoost de 200 CV de potencia y un par máximo de 320 Nm**

*Fuente: AUTOFÁCIL*

1. La pulgada ('') no es una unidad del S.I. y por lo tanto no es una unidad legal de medida. La magnitud debería expresarse en mm, al menos entre paréntesis, complementando así en unidades legales la información dada.
2. El caballo de vapor (**CV**) no es unidad del SI y, por lo tanto no es una unidad legal de medida. La potencia debería expresarse en kilovatios (**kW**). La unidad de par está mal escrita. El newton y el metro han de separarse por un espacio en blanco o un punto centrado: **N m; N · m**

**Enzimas**

| Prueba | Resultado | Unidades | Valores de Normalidad |
|---|---|---|---|
| AST (GOT) | 17 | UI/I | (5 - 50) |
| ALT (GPT) | 14 | UI/I | (5 - 50) |
| Gamma - GT | 15 | UI/I | (Inf. 50) |
| Amilasa | 91 | UI/I | (80 - 118) |

*Fuente: LABORATORIO DE ANÁLISIS CLÍNICOS*

## Error

La unidad de actividad enzimática, **U** o **UI** no es unidad del S.I. y por lo tanto no es una unidad legal de medida. La unidad de medida del S.I. es el katal (**kat**). Los parámetros de ejemplo deberían darse en submúltiplos del katal: microkatal (**µkat**) y nanokatal (**nkat**).
La unidad de actividad enzimática (**UI**) es la cantidad de enzima que cataliza la transformación de 1 µmol de sustrato en un minuto. Se ha estado usando ampliamente en medicina y en bioquímica desde 1964 para expresar la actividad catalítica y desde 1999 la Conferencia General de Pesas y Medidas, sancionó como unidad de actividad enzimática el **katal** para evitar errores interpretativos provenientes de resultados de las medidas clínicas proporcionadas en diferentes unidades locales.

| Ejemplo | Correcto | Incorrecto |
|---|---|---|
| ¿Cómo deberia escribirse? 1200000 | 1 200 000 | 1.200.000 |

Los números con muchas cifras pueden agruparse de tres cifras separadas por un pequeño espacio.
Sin embargo cuando no hay más que cuatro cifras delante o detras del separador decimal, es usual no insertar un espacio.

# Redondeo de cifras

Redondear significa sustituir la magnitud de un número dado por otro número denominado número redondeado, seleccionado de la secuencia de múltiplos enteros de un intervalo de redondeo seleccionado.

*NB/ISO 80000-1:2022*

Ejemplo: 1

Intervalo de redondeo: 0,1

**Múltiplos enteros:** 10,1; 10,2; 10,3; 10,4; etc.

Ejemplo: 2

Intervalo de redondeo: 10

**Múltiplos enteros:** 1010; 1020; 1030; 1040; etc.

Si sólo hay un múltiplo entero más cercano al número dado, éste se acepta como el número redondeado

*NB/ISO 80000-1:2022*

Ejemplo: 1

Intervalo de redondeo: 0,1

**Número dado, número redondeado**

10,223 → 10,2
10,251 → 10,3
10,275 → 10,3

Ejemplo: 2

Intervalo de redondeo: 10

**Número dado, número redondeado**

1022,3 → 1020
1025,1 → 1030
1027,5 → 1030

Si hay dos múltiplos enteros sucesivos igualmente cerca del número dado, **hay en uso dos reglas diferentes.**

## Regla A

Se selecciona el múltiplo par como el número redondeado.

### Ejemplo: 1

Intervalo de redondeo: 0,1

**Número dado, número redondeado**

10,25 → 10,2
10,35 → 10,4

### Ejemplo: 2

Intervalo de redondeo: 10

**Número dado, número redondeado**

1025,0 → 1020
1035,0 → 1040

## Regla B

Se selecciona el múltiplo de mayor magnitud como el número redondeado.

### Ejemplo: 1

Intervalo de redondeo: 0,1

**Número dado, número redondeado**

10,25 → 10,3
10,35 → 10,4
-10,25 → -10,3
-10,35 → -10,4

### Ejemplo: 2

Intervalo de redondeo: 10

**Número dado, número redondeado**

1025,0 → 1030
1035,0 → 1040
-1025,0 → -1030
-1035,0 → -1040

Las reglas dadas anteriormente deberían utilizarse sólo si no existen criterios especiales a tomar en cuenta para la selección del número redondeado. Por ejemplo, en los casos en que tienen que respetarse los requisitos de seguridad u otros límites, es aconsejable redondear sólo en una dirección.
El intervalo de redondeo debería indicarse siempre.

*NB/ISO 80000-1:2022*

## Unidades básicas del S.I.

| Nombre | Nombre | Símbolo |
|---|---|---|
| Tiempo | segundo | s |
| Longitud | metro | m |
| Masa | kilogramo | kg |
| Corriente eléctrica | amperio | A |
| Temperatura termodinámica | Kelvin | K |
| Cantidad de sustancia | mol | mol |
| Intensidad luminosa | candela | cd |

Cuando se multiplican o dividen símbolos de magnitudes, puede emplearse cualquiera de las formas escritas siguientes:

**Multiplicación:**

$$ab,\ a\ b,\ a{\cdot}b,\ a \times b$$

**División:**

$$a/b,\ \frac{a}{b},\ a\ b^{-1}$$

## Unidades derivadas del S.I. con nombres especiales

| Magnitud Derivada | Nombre especial de la unidad | Símbolo y expresión en unidades básicas | Unidad expresada en S.I. |
|---|---|---|---|
| Ángulo plano | radián | rad = m/m | |
| Ángulo sólido | estereorradián | $sr = m^2/m^2$ | |
| Frecuencia | hercio | $Hz = s^{-1}$ | |
| Fuerza | newton | $N = kg\ m\ s^{-2}$ | |
| Presión, tensión | pascal | $Pa = kg\ m^{-1}\ s^{-2}$ | $N/m^2$ |
| Energía, trabajo, cantidad de calor | julio | $J = kg\ m^2\ s^{-2}$ | N m |
| Potencia, flujo radiante | vatio | $W = kg\ m^2\ s^{-3}$ | J/s |
| Carga eléctrica | culombio | C = A s | |
| Diferencia de potencial eléctrico | voltio | $V = kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-1}$ | W/A |
| Capacidad eléctrica | faradio | $F = kg^{-1}\ m^{-2}\ s^4\ A^2$ | C/V |
| Resistencia eléctrica | ohmio | $\Omega = kg\ m^{-2}\ s^{-3}\ A^2$ | V/A |
| Conductancia eléctrica | siemens | $S = kg^{-1}\ m^{-2}\ s^3\ A^2$ | A/V |
| Flujo magnético | weber | $Wb = kg\ m^2 s^{-2} A^{-1}$ | V s |
| Densidad de flujo magnético | tesla | $T = kg\ s^{-2}\ A^{-1}$ | $Wb/m^2$ |
| Inductancia | henrio | $H = kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-2}$ | Wb/A |
| Temperatura Celsius | grado Celsius | °C = K | |
| Flujo luminoso | lumen | lm = cd sr | |
| Iluminancia | lux | $lx = cd\ sr\ m^{-2}$ | $lm/m^2$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Actividad referida a un radionucleido | becquerel | $Bq = s^{-1}$ | Wb/A |
| Dosis absorbida, kerma | gray | $Gy = m^2 s^{-2}$ | J/kg |
| Dosis equivalente | sievert | $Sv = m^2 s^{-2}$ | J/kg |
| Actividad catalítica | katal | $kat = mol\ s^{-1}$ | |

## Prefijos de S.I.

| Factor | Prefijo | Símbolo | Factor | Prefijo | Símbolo |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^{1}$ | deca | da | $10^{-1}$ | deci | d |
| $10^{2}$ | hecto | h | $10^{-2}$ | centi | c |
| $10^{3}$ | kilo | k | $10^{-3}$ | mili | m |
| $10^{6}$ | mega | M | $10^{-6}$ | micro | µ |
| $10^{9}$ | giga | G | $10^{-9}$ | nano | n |
| $10^{12}$ | tera | T | $10^{-12}$ | pico | p |
| $10^{15}$ | peta | P | $10^{-15}$ | femto | f |
| $10^{18}$ | exa | E | $10^{-18}$ | atto | a |
| $10^{21}$ | zetta | Z | $10^{-21}$ | zepto | z |
| $10^{24}$ | yotta | Y | $10^{-24}$ | yocto | y |

# Conversión de unidades

## Tiempo

1 h = 3600 s    1 min = 60 s
1 día = 24 h    1 año = 365 días

## Masa

1 unidad de masa atómica (uma)
$= 1{,}6605 \times 10^{-27}$ kg
1 kg = 1000 g = 0,06852 slug
1 lb = 453,6 g

## Fuerza

$1\ lb_f = 4{,}448$ N    $1\ kg_f = 9{,}8$ N
$1\ N = 10^5\ dyn = 0{,}2248\ lb_f$    $1\ kg_f = 1$ kp

## Energía y trabajo

$1\ J = 10^7$ ergs = 0,7376 ft · lb
1 ft · lb = 1,356 J = $1{,}29 \times 10^{-3}$ Btu
$= 3{,}24 \times 10^{-4}$ kcal
1 kcal = $4{,}19 \times 10^3$ J = 3,97 Btu
1 eV = $1{,}602 \times 10^{-19}$ J
1 kWh = $3{,}600 \times 10^6$ J = 860 kcal

## Potencia

1 W = 1 J/s = 0,7376 ft · lb/s = 3,41 Btu/h
1 hp = 550 ft · lb/s = 746 W

## Presión

1 atm = 1,01325 bar = $1{,}01325 \times 10^5\ N/m^2$
$= 14{,}7\ lb/in^2 = 760$ torr
$1\ lb/in^2 = 6{,}895 \times 10^3\ N/m^2$
$1\ Pa = 1\ N/m^2 = 1{,}450 \times 10^{-4}\ lb/in^2$

## Ángulo

$\pi$ rad = 180°

## Longitud

1 in = 2,54 cm
1 cm = 0,3937 in
1 ft = 30,48 cm
1 m = 39,37 in = 3,281 ft
1 mi = 5280 ft = 1,609 km
1 km = 0,6214 mi
1 milla náutica (E.U.A.) = 1,151 mi
1 fermi = 1 fentómetro (fm) = $10^{-15}$ m
1 angstrom (Å) = $10^{-10}$ m = 0,1 nm
1 año-luz (a. l.) (ly) = $9{,}461 \times 10^{15}$ m
1 parsec = 3,26 ly = $3{,}09 \times 10^{16}$ m

## Volumen

1 litro (L) = 1000 mL = 1000 $cm^3$
$= 1{,}0 \times 10^{-3}\ m^3$ = 1,057 cuarto
(E.U.A) = 61,02 $in^3$

1 gal (U.S.) = 4 cuarto (E.U.A)
= 231 $in.^3$ = 3,785 = 0,8327 gal
(inglés)
1 pinta (inglesa) = 1,20 pintas
(E.U.A) = 568 mL
$1\ m^3 = 35{,}31\ ft^3$

BICENTENARIO DE
BOLIVIA

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN


(591) 71550970 - 71530671

www.minedu.gob.bo

@minedubol

Ministerio de Educación - Oficial

@minedu_bol

MinEduBol

@minedubol

informacion@minedu.gob.bo

@minedu_bolivia

AV. ARCE NO. 2147 · TELÉFONOS: (591-2) 2442144 - 2442074
LA PAZ - BOLIVIA